SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MICHEL MÉTIVIER

Quelques problèmes liés aux systèmes infinis de particules et leurs limites

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 20 (1986), p. 426-446
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1986__20__426_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

QUELQUES PROBLEMES LIES AUX SYSTEMES

INFINIS DE PARTICULES ET LEURS LIMITES

Michel METIVIER

Ecole Polytechnique. 91128 Palaiseau Cédex. France*

INTRODUCTION

Le but de cet exposé est de présenter quelques idées et techniques qui deviennent classiques (qui le sont sans doute déjà pour les spécialistes) lorsque l'on considère la "limite de la loi d'un système fini de particules évoluant avec interaction, lorsque le nombre des particules tend vers l'infini". Notre but est également, après l'exposé de "situations classiques", de signaler quelques développements récents et de mentionner des problèmes ouverts d'existence et d'unicité de solutions fortes ou faibles d'équations stochastiques, qui se posent en liaison avec les systèmes étudiés et leurs limites.

Nous voulons considérer successivement deux catégories de problèmes. D'abord le cas où on considère un système d'un nombre fixe N de particules interagissant régi par un système de N équations différentielles stochastiques et où on fait tendre N vers ∞ . Ensuite le cas où l'on considère un système de particules donnant lieu à des diffusions avec branchement et où on considère une suite de systèmes indexés par N dans lesquels la masse des particules est $\frac{1}{N}$, la masse totale des particules en vie à l'instant 0 est fixe et le taux de branchement (la loi du branchement étant supposée critique) croît comme N .

Dans la première situation, on observe en général un phénomène appelé "propagation du chaos" selon une terminologie de M. Kac, 1956 [10], reprise par McKean, 1967 [14], correspondant à une forme particulière de "loi des grands nombres". Nous montrerons, suivant des exposés récents de A. Sznitman [20] et A. Aldous [1] (cf. aussi C. Léonard [11]), comment ce principe de "propagation du chaos" est lié aux propriétés des lois symétriques dans un espace produit S^{∞} . Nous n'aborderons pas les problèmes de fluctuation qui viennent dans le prolongement immédiat des lois des grands nombres.

(*): D'après un exposé donné au 3e Convegno su Calcolo Stocastico. Pise. 19 Sept. 1984.

Dans la situation des processus avec branchement, étudiés largement par D. Dawson, L. Gorostiza dans le cas sans interaction (cf. aussi S. Roelly [19]), on a des théorèmes limites de nature très différente. La limite est, en général, une diffusion à valeurs mesures. Si on introduit l'interaction entre les particules, on rencontre immédiatement des problèmes non résolus d'unicité de la solution de problèmes de martingale.

Notations

1. $M^p(S)$: espace de Banach des mesures μ sur l'espace mesurable $(S,\mathcal{B}_S)$ (dans cette définition, S est une partie fermée de $\mathbb{R}^d$) telles que $\int(1+|x|^p)|\mu|(dx) < \infty$ où $|\mu|$ est la mesure variation de μ, muni de la norme $\|\mu\|_p := \int(1+|x|^p)|\mu|(dx)$. ($S$ est un espace métrisable séparable et $\mathcal{B}_S$ sa tribu borélienne). $M^p(S)$ est le dual de $C^p(S) := \{ f:f$ fonctions réelles sur S telles que $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^d} \frac{|f(x)|}{1+|x|^p} \}$ muni de la norme $\|f\|_p := \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^d} \frac{|f(x)|}{1+|x|^p}$.

   On note $M^{p,f}(S)$ le dual faible de $C^p(S)$ et $M^p_+(S)$, $C^p_+(S)$ les cônes positifs de $M^p(S)$ et $C^p(S)$.

   $\Pi(S)$ (resp $\Pi^f(S)$) est le sous-espace topologique de $M^0_+(S)$ (resp. $M^{0,f}_+(S)$) constitué par les probabilités.

2. Soit F borélienne sur $\mathbb{R}^k$ et soit $u_i \in C^p(S)$, $i=1,\dots,k$.
   On note $\Phi_{F;u,\dots,u_k}$ la fonction définie sur $M^p(S)$ par :

   $$\Phi_{F;u,\dots,u_k}(\mu) = F(<u_1,\mu>,\dots,<u_k,\mu>).$$

3. Ayant à utiliser constamment le crochet de dualité $<,>$ entre un espace localement convexe et son dual, on notera $\ll,\gg$ le crochet de Meyer de deux martingales localement de carré intégrable.

I - N PARTICULES AVEC INTERACTION SE DEPLACANT DANS $\mathbb{R}^d$

L'exemple que nous traitons ici pour illustrer des idées qui deviennent classiques est essentiellement celui considéré par McKean, 1967 [14], et repris depuis par des auteurs comme Martin Löf, 1976 [13], K. Ito, 1979 [8], D. Dawson, 1981 [2], etc.

On considère un système de N particules évoluant dans $\mathbb{R}^d$. En notant $x_N^i(t)$ la position de la particule d'indice i à l'instant t, le mouvement du système est gouverné par le système suivant d'équations différentielles stochastiques

$$dx_N^i(t) = \alpha(x_N^i(t))dt + \sigma(x_N^i(t))dw^i(t) + \frac{1}{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \gamma(x_N^i(t), x_N^j(t))dt , \tag{I.1}$$

où α est un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^d$, σ un champ de matrices et $(x,y) \rightsquigarrow \gamma(x,y)$ une application de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ décrivant la "Force d'interaction" entre la particule située en x et la particule située en y, et les w^i sont N browniens indépendants.

I.1 - Première représentation (processus à valeurs mesures)

On décrit l'état du système à l'instant t par la mesure discrète

$$\mu_N(t) := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{x_N^i(t)} \in \Pi(\mathbb{R}^d) \tag{I.1.1}$$

où δ_a est la "masse de Dirac" en a.

Faisons des hypothèses (qui seront précisées par la suite) assurant que le système stochastique (I.1) a une solution (faible ou forte) continue sur un espace fondamental Ω_N avec une filtration $(F_N(t))_{t\in[0,T]}$ et des browniens appropriés, l'application $t \rightsquigarrow \mu_N(t,\omega)$ est, pour tout $\omega \in \Omega_N$, un élément de $C([0,T] ; \Pi^f(\mathbb{R}^d))$. Plus généralement c'est un élément de $C([0,T] ; \Pi^{\mathcal{T}}(\mathbb{R}^d))$ pour toute topologie $\mathcal{T}$ sur Π rendans continue $x \rightsquigarrow \delta_x$ de $\mathbb{R}^d$ dans $\Pi^{\mathcal{T}}(\mathbb{R}^d)$.

On notera $\tilde{\Omega}_\Pi$ l'espace canonique $C([0,T] ; \Pi^f(\mathbb{R}^d))$ et $\tilde{\mu}$ le processus canonique correspondant. Si $\tilde{P}_N$ est la loi sur $\tilde{\Omega}_\Pi$ du processus μ_n défini par (I.1.1), la loi $\tilde{P}_N$ est solution du "*problème de martingale*" suivant.

Définissons :

$$G := \sum_{i=1}^{d} \alpha^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} (\sigma\circ\sigma^*)^{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x^i\,\partial x^j} \tag{I.1.2}$$

$$H^k(\mu)(x) := \int_{x\neq y} \gamma^k(x,y)\mu(dy) \quad . \tag{I.1.3}$$

On a :

$[M_1]$ pour tout $u \in C_K^\infty(\mathbb{R}^d)$ le processus réel

$$M_t^u := <u,\widetilde{\mu}_t> - <u,\widetilde{\mu}_0> - \int_0^t <Gu,\widetilde{\mu}_s>ds - \int_0^t <\nabla u.H(\widetilde{\mu}_s),\widetilde{\mu}_s>ds$$

est une $\widetilde{P}_N$ martingale locale avec, pour tout u et $v \in C_K^\infty(\mathbb{R}^d)$.

$[M_2]$ $\langle\langle M^u,M^v\rangle\rangle_t = \frac{1}{N}\int_0^t <\sigma(\nabla u).\sigma(\nabla v),\widetilde{\mu}>ds$ pour $\widetilde{P}_N$.

en outre

$[M_3]$ $\widetilde{\mu}_0 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{x^i}$ $\widetilde{P}_N$ - p.s.

On peut donner du problème de martingale précédent une formulation équivalente en disant que la probabilité $\widetilde{P}_N$ vérifie $[M_3]$ et

$[M']$ pour toute $F \in C_K^\infty(\mathbb{R}^k)$, $u_1,\ldots,u_k \in C_K^\infty(\mathbb{R}^d)$ le processus

$$M^{F;u_1,\ldots,u_k} := \Phi_{F;u_1,\ldots,u_k}(\widetilde{\mu}_t) - \Phi_{F;u_1,\ldots,u_k}(\widetilde{\mu}_0) - \int_0^t \sum_{j=1}^k D_jF(<u_1,\widetilde{\mu}_s>,\ldots$$

$$\ldots<u_k,\widetilde{\mu}_s>)<u_j,(G^*\text{-div } H(\widetilde{\mu}_s)I - H(\widetilde{\mu}_s).\nabla)\widetilde{\mu}_s>ds -$$

$$-\frac{1}{2N}\int_0^t \sum_{j,\ell=1}^k D_{ij}F(<u_1,\widetilde{\mu}_s>,\ldots<u_k,\widetilde{\mu}_s><u_j,\widetilde{a}(\widetilde{\mu}_s)u_\ell>ds$$

est une $\widetilde{P}_N$-martingale.

Dans cette dernière formule on a noté G^* l'adjoint au sens des distributions de G , $\widetilde{a}(\widetilde{\mu})$ l'opérateur de $C_K^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ défini par :

$$<u,\widetilde{a}(\widetilde{\mu})v> := <\sigma(\nabla u).\sigma(\nabla v),\widetilde{\mu}> \tag{I.1.4}$$

et on a supposé que div $H(\widetilde{\mu})$, au sens des distributions, est une fonction localement sommable.

Le problème d'un "modèle limite" du système de particules se formule ici comme l'étude de la convergence étroite de la suite de lois $(\widetilde{P}_N)_{N\in\mathbb{N}}$.

I.2 - Deuxième représentation

Posons $S := C([0,T]\,;\mathbb{R}^d)$. On note ξ le "processus canonique" sur S. A l'espace métrique S on ajoute un point isolé $\emptyset$ pour former l'espace (polonais) $\hat{S} := S \cup \{\emptyset\}$.

A toute trajectoire $\{x_N^i(\omega)\ :\ i=1,\dots,N\}$ du processus solution de (I.1), on associe un élément $\tilde{\tilde{\omega}}$ de $\tilde{\tilde{\Omega}} := \hat{S}^{\otimes\infty}$ défini par

$$\left.\begin{array}{lll} \tilde{\tilde{\omega}}^i := x_N^i(\omega) & & \text{si } i \leq N \\ \tilde{\tilde{\omega}}^i := \emptyset & & \text{si } i > N \end{array}\right\} \qquad \text{(I.2.1)}$$

et on note $\tilde{\tilde{P}}_N$ la probabilité image de P_N sur $\tilde{\tilde{\Omega}}$ pour cette application.

Une deuxième façon d'étudier le modèle limite est d'*étudier la convergence étroite des mesures* $\tilde{\tilde{P}}_N$ *dans l'espace polonais* $\tilde{\tilde{\Omega}}$. La convergence de $\tilde{\tilde{P}}_N$ vers $\tilde{\tilde{P}}$ signifie d'ailleurs que pour tout $J \in \mathbb{N}$ la loi des variables $\{x_N^i\ :\ i \leq J\}$ converge étroitement vers la loi des variables $\{\xi^i\ :\ i \leq J\}$ pour $\tilde{\tilde{P}}$, où l'on désigne par ξ^i la projection $\tilde{\tilde{\Omega}} \to \hat{S}^i$, et où l'on pose (conformément à (1.2.1)) $x_N^i(\omega) = \emptyset$ si $i > N$.

Dans ce qui suit, on suppose les $x_N^i(0)$, $i=1,\dots,N$ i.i.d.

Remarque 1

La famille $(x_N^i)_{i\in\mathbb{N}}$ n'est pas pour N donné une famille "échangeable" de variables aléatoires à valeurs dans S, au sens suivant : pour toute permutation σ sur $\mathbb{N}$, laissant invariante le complémentaire d'un ensemble fini, la loi de $(x_N^i)_{i\in\mathbb{N}}$ est la même que celle de $(x_N^{\sigma(i)})_{i\in\mathbb{N}}$. Par contre, si la limite $\tilde{\tilde{P}}$ existe, les variables $(\xi^i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont "échangeables". On dit aussi que $\tilde{\tilde{P}}$ est "*symétrique*".

Remarque 2 (rappel du théorème de de Finetti ; cf. aussi E. Hervitt-Savage, 1955 [6], et Aldous, 1983 [1]).

Soit $\mathcal{S}$ la tribu sur $\hat{S}^{\otimes\infty}$ engendrée par les applications

$$\tilde{\tilde{\omega}} \sim \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{\xi^i(\tilde{\tilde{\omega}})} \text{ de } \tilde{\tilde{\Omega}} \text{ dans } \Pi(\hat{S}).$$

Il s'agit clairement de la tribu appelée habituellement la *tribu symétrique*. On a alors le

<u>*THEOREME 1*</u>

1°) Si $\widetilde{\widetilde{P}}$ *est symétrique sur* $\hat{S}^{\otimes\infty}$ *la suite*

$$\widetilde{\mu}_N = \frac{1}{N} \sum_{i \leqslant N} \delta_{\xi^i(.)} \qquad N \in \mathbb{N}^*$$

d'éléments aléatoires à valeurs dans $\Pi^f(\hat{S})$ *converge* $\widetilde{\widetilde{P}}$ *p.s. vers un élément aléatoire S-mesurable* $\widetilde{\mu}$ *à valeurs dans* $\Pi^f(\hat{S})$. *La probabilité aléatoire* $\widetilde{\mu}(\widetilde{\widetilde{\omega}})$ *est d'ailleurs telle que* $\widetilde{\mu}(\widetilde{\widetilde{\omega}})^{\otimes\infty}$ *est une version de la loi conditionnelle de* $\widetilde{\widetilde{P}}$ *sachant* S . .

2°) Si $\widetilde{\widetilde{P}}$ *est symétrique et si* $\widetilde{\mu} = \nu \in \Pi(\hat{S})$ P-*p.s., les variables* ξ^i *sont indépendantes de même loi* ν .

On appellera probabilité aléatoire directrice de $\widetilde{\widetilde{P}}$ *la probabilité aléatoire* $\widetilde{\mu}$ *ci-dessus.*

Toute loi symétrique $\widetilde{\widetilde{P}}$ *apparaît ainsi comme un "mélange"* $E(\widetilde{\mu}(.)^{\otimes\infty})$ *de lois produits sur* $\hat{S}^{\otimes\infty}$.

I.3 - <u>Convergence des lois $\widetilde{\widetilde{P}}_N$ et "propagation du chaos"</u>

Considérons les lois $\widetilde{\widetilde{P}}_N$ images de P_N par les applications (I.2.1) et pour chaque N considérons la probabilité aléatoire

$$\mu_N(\omega) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta_{x_N^i(\omega,.)} \in \Pi^f(S) \subset \Pi^f(\hat{S}) \ . \tag{I.3.1}$$

Notons $\mathcal{L}(\mu_N)$ la loi de μ_N : $\mathcal{L}(\mu_N) \in \Pi(\Pi^f(S))$.

On a le théorème suivant (cf. Aldous, 1983 [1]).

<u>*THEOREME 2*</u>

1°) La suite $(\mathcal{L}(\mu_N))_{N \in \mathbb{N}}$ *est tendue dans* $\Pi^f(\Pi^f(S))$ *si et seulement si* $(\mathcal{L}(x_N^1))_{N \in \mathbb{N}}$ *est tendue dans* $\Pi^f(S)$.

2°) La suite $(\tilde{\mathbb{P}}_N)_{N\in\mathbb{N}}$ *converge étroitement vers* $\tilde{\mathbb{P}}$ *symétrique dans* $S^{\otimes\infty}$ *de probabilité aléatoire directrice* $\tilde{\mu}$ *si et seulement si la suite* $\mathcal{L}(\mu_N)$ *converge vers* $\mathcal{L}(\tilde{\mu})$ *dans* $\Pi^f(\Pi^f(\hat{S}))$.

Cas particulier

Supposons que la suite (μ_N) converge en loi vers une probabilité aléatoire p.s. égale à une probabilité fixe $\nu\in\Pi^f(S)$, alors les lois $\tilde{\mathbb{P}}_N$ convergent vers $\nu^{\otimes\infty}$ et pour tout i la loi de la trajectoire (x_N^i) de la ième particule converge lorsque $N\to\infty$ vers la loi ν.

L'indépendance des lois limites des trajectoires des particules (pour des conditions initiales indépendantes et qui n'a pas lieu pour les trajectoires $x_N^i, N<\infty$) est un phénomène appelé *propagation du chaos* suivant une terminologie qu'on trouve dans M. Kac, 1956 [14].

I.4 - Traitement d'un exemple

Les considérations développées en I.1, I.2 et I.3 peuvent s'appliquer à n'importe quel système de particules pour lequel on peut démontrer la validité des hypothèses du théorème 2. Nous les appliquons au système décrit par (I.1) sous des hypothèses particulières.

(H_1) On a pour une constante $B\geqslant 0$ convenable :

$$\alpha(x).x\leqslant B|x|^2 \quad \text{pour tout} \quad x\in\mathbb{R}^d$$

et $x\rightsquigarrow\|\alpha(x)\|$ est majorée par une fonction continue.

(H_2) $\|\sigma(x)\|\leqslant\bar{\sigma}$ pour une constante $\bar{\sigma}$.

(H_3) $|\gamma(x,y)|\leqslant\Gamma(|x|.|y|)$ pour une constante Γ.

(H_4) Le système (I.1) admet une solution faible unique.

Remarque (Modèles de Curie-Weiss dynamiques)

Ces modèles sont ceux pour lesquels la fonction d'interaction $\gamma(x,y)$ a la forme

$$\gamma(x,y) = -\theta(x-y) \quad \text{avec} \quad \theta>0\ . \tag{I.4.1}$$

Il s'agit d'un cas particulier d'interaction dite "champ moyen".

Dans le cas particulier traité par Dawson [2], on a : $d=1$, $\alpha(x)=-x^3+x$, $\sigma(x)=\overline{\sigma}$.

THEOREME 3

Supposons (H_1) *à* (H_3) *et en outre que les probabilités* $\frac{1}{N}\sum_{i\leq N}\delta_{x^i(0)}$ *convergent en loi vers la probabilité* $\nu_0 \in \Pi(\mathbb{R}^d)$. *Alors la suite* $\mathcal{L}(\mu_N)$ (resp. $\tilde{\tilde{P}}_N$) *est relativement compacte dans* $\Pi^f(\Pi^f(S))$ (resp. $\Pi^f(\tilde{\tilde{\Omega}})$).

Si Q_∞ *est une des valeurs d'adhérence de la suite* $\mathcal{L}(\mu_N)$, *pour* Q_∞*-presque tout* $\nu \in \Pi^f(S)$ *on a la propriété suivante :*

a) ξ_0 *a pour loi* ν_0 ,

b) *si* ν_t *désigne la loi de* ξ_t *pour* ν , *le processus* M *:*

$$M_t := \xi_t - \xi_0 - \int_0^t \alpha(\xi_s)ds - \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^d} \gamma(\xi_s,y)\nu_s(dy)\right)ds$$

est une ν*-martingale locale avec*

c) $$\langle\langle M\rangle\rangle_t = \int_0^t \sigma(\xi_s) \circ \sigma^*(\xi_s)ds \qquad \textit{pour } \nu .$$

Le théorème 3 fournit un résultat de convergence si la loi ν est déterminée de façon unique par les conditions a, b, c. Pour énoncer des conditions suffisantes d'unicité, nous introduisons quelques hypothèses supplémentaires.

Si β est une application borélienne de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ et ν une probabilité sur S , on note :

$$\overline{\beta}_{\nu,s}(x) := \int\beta(x,y)\nu_s(dy) \tag{I.4.2}$$

sur l'espace $\Pi^2(\mathbb{R}^d) := M^2(\mathbb{R}^d) \cap \Pi(\mathbb{R}^d)$ considérons la distance

$$\|\lambda-\lambda'\|_L := \sup\left\{|\langle f,\lambda-\lambda'\rangle| : \sup_x \frac{|f(x)|}{1+|x|^2} + \sup_{x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leq 1\right\}$$

On notera $\Pi_L^2(\mathbb{R}^d)$ l'espace $\Pi^2(\mathbb{R}^d)$ avec cette topologie.

On formule les hypothèses suivantes :

(H_5) Pour toute $\nu \in \Pi(S)$ telle que $\nu_t \in \Pi^2(\mathbb{R}^d)$ pour tout t, on a (hypothèse de "monotonie") pour une constante $K \geq 0$:

$$(\overline{\beta}_{\nu,s}(x) - \overline{\beta}_{\nu,s}(y)).(x-y) \leq K|x-y|^2 .$$

(H_6) Si $\nu,\nu' \in \Pi(S)$, $\nu_t, \nu'_t \in \Pi^2(\mathbb{R}^d)$ pour tout t, on a :

$$\sup_x \|\overline{\beta}_{\nu,s}(x) - \overline{\beta}_{\nu',s}(x)\| \leq K'\|\nu_s - \nu'_s\|_L$$

On a alors le résultat suivant :

THEOREME 4

Considérons, sur une base stoxhastique donnée, $(\Omega,(F_t)_{t\in[0,T]},P$, *un brownien* w *et l'équation stochastique*

$$\begin{cases} x(t) = x(0) + \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^d} \beta(x(s),y)\nu_s(dy)\right)ds + \int_0^t \sigma(x(s))dw(s) \\ \nu_t = \text{loi de } x(t),\ x(0) \text{ donnée avec } E|x(0)|^2 < \infty \end{cases} \tag{I.4.3}$$

Si on suppose (H_5) *et* (H_6) *pour* β *et que* σ *est lipschitzienne, il existe un processus* $(x(t))_{t\in[0,T]}$ *unique à l'indistingabilité près, continu, solution de (1.4.3).*

Eléments de la démonstration du théorème 4

Soit Q une loi de probabilité sur $C([0,T],\mathbb{R}^d)$. Soit l'équation différentielle stochastique ordinaire

$$x^Q(t) = x(0) + \int_0^t \overline{\beta}_{Q,s}(x^Q(s))ds + \int_0^t \sigma(x^Q(s))d\,w_s .$$

Les hypothèses sur β et σ impliquent l'existence et l'unicité de x^Q. Notons $\psi(Q)$ la loi de x^Q. On a $(\psi(Q))_0 = \nu_0$ et on a facilement $\sup_{t\leq T} E|x^Q(t)|^2 < \infty$, soit $\sup_{t\leq T} \|\psi(Q)_t\|_L < \infty$.

Il est clair que la démonstration du théorème 4 revient à montrer que l'application $Q \rightsquigarrow \psi(Q)$ a un point fixe dans l'espace $C([0,T],\Pi_L^2(\mathbb{R}^d))$ (pour la topologie $\sup_{t\leq T} \|\nu_t-\nu'_t\|_L$). Or les propriétés (H_5) et (H_6) conduisent à une inégalité du type

$$\| x_t^Q - x_t^{Q'} \|^2 \leq C \int_0^t \| x_s^Q - x_s^{Q'} \|^2 ds + \int_0^t \| Q_s - Q_s' \|_L^2 \, ds \ . \tag{I.4.4}$$

D'où l'on déduit

$$E\Big(\sup_{t < T} \| x_t^Q - x_t^{Q'} \|^2 \Big) \leq T \Big(\sup_{t \leq T} \| Q_t - Q_t' \|_L \Big) \, e^{CT} \ . \tag{I.4.5}$$

La définition de $\| . \|_L$ montre par ailleurs que

$$| < f, \psi(Q)_t - \psi(Q')_t > | = | E(f(x_t^Q) - f(x_t^{Q'})) | \leq \| f \|_L \, E | x_t^Q - x_t^{Q'} |$$

et donc, d'après (I.4.5)

$$\sup_{t \leq T} \| \psi(Q)_t - \psi(Q')_t \|_L \leq T \, e^{CT} \sup_{t \leq T} \| Q_t - Q_t' \|_L \ . \tag{I.4.6}$$

On raisonne comme dans le cas des équations différentielles stochastiques ordinaires pour en déduire l'existence et l'unicité des solutions.

COROLLAIRE

Posons $\beta(x,y) = \alpha(x) + \gamma(x,y)$. Supposons (H_1), (H_2), (H_3), que σ soit lipschitzienne et que β vérifie (H_5) et (H_6). Alors les suites $(\mathcal{L}(\mu_N))$ et $(\tilde{P}_N)$ du théorème 3 convergent dans $\Pi^f(\Pi^f(S))$ (resp. $\Pi^f(\tilde{\Omega})$) vers δ_ν (resp. $\nu^{\otimes\infty}$) où ν est l'unique solution du problème de martingale a, b, c.

L'application $t \rightsquigarrow \nu_t$ est solution du problème d'évolution

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \nu_t}{\partial t} = G^* \nu_t - \operatorname{Div} H(\nu_t) \, \nu_t - H(\nu_t) . \nabla \nu_t \\ \nu_0 \end{cases} \tag{I.4.7}$$

La suite $((\mu_N(t))_{t \in [0,T]})_{N \geq 0}$ de processus à valeurs dans $M^f(\mathbb{R}^d)$ converge en loi vers le processus déterministe solution de (1.4.7).

Etape de la démonstration du théorème 3

1°) D'après le théorème 3, on a seulement à montrer, pour établir les compacité relatives souhaitées, que la suite des processus $(x_N^1)_{N \geq 0}$ a ses lois équitendues dans $C([0,T] \ ; \mathbb{R}^d)$.

Puisque $\|\sigma\| \leqslant \bar{\sigma}$

et $\quad x_N^1(t)=x_N^1(0)+\int_0^t [\alpha(x_N^1(s)+\frac{1}{N}\sum_{j\neq 1}\gamma(x_N^1(s),x_N^j(s))]ds+\int_0^t \sigma(x_N^1(s))dw^1(s)$,

la compacité résultera immédiatement de la majoration

$$E\Big(\sup_{t\leqslant T} |x_N^1(t)|+\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N |x_N^i(t)|\Big) < \infty \quad . \tag{1.4.8}$$

Or, on a d'abord le

<u>*LEMME 1*</u>

Si $y(t) = y(0) + \int_0^t \alpha(y(s))ds + \int_0^t f(s)ds + M_t$ *où* $\alpha(x).x \leqslant B|x|^2$ *pour tout* x *,*

où f *est borélienne et où* M_t *est une martingale de carré intégrable continue telle que* $M_0 = 0$ *et* trace $\langle\langle M\rangle\rangle_t \leqslant C_T\, t$ *pour tout* $t \leqslant T$ *, alors*

$$E\Big(\sup_{t\leqslant T} |y(t)|^2\Big) \leqslant \mathcal{C}_T\Big(E|y(0)|^2 + \int_0^T E|f(s)|^2\, ds\Big) . \tag{I.4.9}$$

Ce lemme s'obtient facilement à partir de la formule

$$|y(t)|^2 \quad |y(0)|^2 + 2\int_0^t y(s).\alpha(y(s))ds + 2\int_0^t y(s).f(s)ds + 2\int_0^t y(s)dM_s$$

$$\leqslant |y(0)|^2 + 2B\int_0^t |y(s)|^2 ds + \int_0^t |y(s)|^2 ds + \int_0^t |f(s)|^2 ds + 2\sup_{s\leqslant t}\Big|\int_0^s y(u)dM_u\Big|^2 ,$$

avec l'inégalité de Doob :

$$E(\sup_{t\leqslant T}|y(t)|^2) \leqslant |y(0)|^2 + E\int_0^t (2B+1+8C_T)|y(s)|^2 ds + \int_0^t E(|f(s)|^2)ds .$$

Il suffit alors d'appliquer l'inégalité de Gronwall pour obtenir le lemme.

Si maintenant on pose $K_N(t) := \frac{1}{N}\sum_{i=j}^N |x_N^i(t)|^2$ et si on applique le lemme 1 avec

$y = x^i$ et $f(t) := \frac{1}{N}\sum_{j\neq 1}\gamma(x^i(t), x^j(t))$, on obtient :

$$E(\sup_{t\leqslant T}|x_N^i(t)|^2) \leqslant \mathcal{C}_T\; E\Big\{|x_N^i(0)|^2 + 2\Gamma\int_0^T |x_N^i(t)|^2 dt + 2\Gamma\int_0^T k_N(t)dt$$

et aussi

$$E(\sup_{t \leq T} k_N(t)) \leq \tilde{C}_T \, E\left\{k_N(0) + 4\Gamma \int_0^T k_N(t)dt\right\} .$$

L'inégalité de Gronwall fournit immédiatement (I.4.8).

2°) Il nous reste à montrer que si la loi $\mathcal{L}(\mu_N)$ converge vers Q_∞ dans $\Pi^f(\Pi^f(S))$ pour Q_∞-presque tout $\nu \in \Pi^f(S)$, ν est solution du problème de martingale a, b, c.

Pour ceci introduisons, pour tout $s<t$, tout $F \in \mathcal{S}_s$ (où $(\mathcal{S}_s)_{s \in [0,T]}$ est la filtration continue à droite "canonique" sur S) et toute $\varphi \in C_K(\mathbb{R}^d)$ la fonctionnelle continue bornée sur $\Pi^f(S)$:

$$F(\nu) := <\nu, 1_F[\varphi(\xi_t) - \varphi(\xi_s) - \int_s^t [G\varphi(\xi_u) + (\nabla\varphi(\xi_u).H(\nu_u)(\xi_u))]du> .$$

Par définition :

$$E|F(\mu_N)|^2 = \frac{1}{N^2} E\left(\sum_{i=1}^{d} 1_F(M_t^{\varphi,i} - M_s^{\varphi,i})\right)^2 ,$$

où

$$M_t^{\varphi,i} := \varphi(x_N^i(t)) - \varphi(x_N^i(0)) - \int [\alpha(x_N^i(u)) + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \gamma(x_N^i, x_N^j)\nu_N(dy)].\nabla\varphi(x_N^i(u))du .$$

La propriété de martingale de $M^{\varphi,i}$ montre que :

$$E|F(\mu_N)|^2 \leq \frac{\bar{\sigma}}{N}(t-s) \, \|\varphi'\|_\infty .$$

La convergence de $\mathcal{L}(\mu_N)$ vers Q_∞ donne alors :

$$\int |F(\nu)|^2 Q_\infty(d\nu) = 0 .$$

Ceci prouve qu'on a :

$$F(\nu) = 0 \quad Q_\infty\text{-p.s.} \quad . \tag{I.4.10}$$

Ceci exprime précisément la propriété de martingale.

II - CAS DES PARTICULES EN MOUVEMENT DANS UN DOMAINE DE $\mathbb{R}^d$ ET AUTRES TYPES D'INTERACTION

L'extension de l'étude présentée au § 1 peut évidemment s'effectuer dans plusieurs directions :

a) Rien n'interdit dans l'équation (I.1) d'ajouter un terme d'interaction dans le coefficient de dw^i . Ce terme se traite comme le terme γ . Si on le soumet à des hypothèses de type Lipschitz, il n'apporte aucune difficulté supplémentaire.

b) Des problèmes tout à fait nouveaux apparaissent si l'on remplace (I.1) par :

$$\begin{aligned} &dx_N^i(t)=\alpha(x_N^i(t))dt+\sigma(x_N^i(t))dw^i(t)+\frac{1}{N}\sum_{i\neq j}\gamma(x_N^i(t),x_N^j(t)dt - k_N^i(t) \\ &x_N^i(t)\in\overline{O} \quad , \quad k_N^i(t) \doteq \int_0^t \vec{n}(x_N^i(s)1_{\partial O}(x_N^i(s))d|k_N^i|(s) \quad , \end{aligned} \tag{II.1}$$

en notant $|k_N^i|$ la variation du processus croissant, $\vec{n}$ la "normale extérieure" à $\overline{O}$, la frontière de $\overline{O}$ étant supposée régulière.

Le problème qui apparaît ici est celui de l'existence de la solution du *système* (II.1). En effet, même si $\overline{O}$ est régulier, le système de particules évolue dans le "cube" $\overline{O}^N$ qui présente des coins. Il y a donc un premier travail sur les équations différentielles stochastiques dans un domaine avec coin et avec réflexion à la frontière. Ceci a été résolu dans P.L. Lions et A.S. Sznitman, 1983 [12]. L'étude de la convergence et de la propagation du chaos qui, elle, n'introduit pas de difficulté fondamentale nouvelle par rapport au cas exposé dans I , est traité par A.S. Sznitman, 1983 [20].

c) De même que le théorème du § 1 permet de donner une interprétation "microscopique" de l'équation non linéaire (I.4.7), McKean avait proposé en 1967 [14] d'interpréter l'équation de Burger

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{2}u\frac{\partial u}{\partial x}$$

en considérant la limite lorsque $N\to\infty$ d'un système de N particules x^i dans $\mathbb{R}$ le "générateur" du processus $\{x^i(t) = i=1,\dots,N\}$ dans $\mathbb{R}^N$ étant :

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i} + \frac{1}{2N} \sum_{i \neq j} \delta(x^i - x^j) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial x^j}\right) .$$

A.S. Sznitman, 1984 [21] a donné une formulation probabiliste précise au problème. L'équation (I.1) est remplacée par

$$dx^i(t) = dw^i(t) + \frac{1}{N} \sum_{j \neq \ell} dL^0(x^i - x^j)_t \quad i=1,\ldots,N \tag{II.2}$$

où $L^0(x^i - x^j)$ est le temps local en 0 de $x^i - x^j$.

L'existence et l'unicité de la solution de II.2 ont été prouvées par A.S. Sznitman, S.R.S. Varadhan, 1984 [22].

d) En ce qui concerne le terme d'interaction γ , l'hypothèse (H_3) interdit des potentiels d'interaction croissant très vite avec $|x-y|$, encore moins des "barrières" du type de celle considérée en c). Que peut-on dire par exemple avec une répulsion qui croît très fortement avec $\frac{1}{|x-y|}$?

e) Un problème très intéressant est suggéré par l'évolution dans un tube de particules en phase gazeuse susceptibles d'être absorbées par une phase liquide déposée sur la paroi, avec un temps d'absorption fonction du nombre de particules au voisinage. Une formalisation possible du problème est la suivante, 0 étant un ouvert régulier de $\mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned} & dx_N^i(t) = 1_0(x_N^i(t))\ (x_N^i(t)dt + 1_0(x_N^i(t))dw_N^i(t) - dk_N^i(t) \\ & x_N^i(t) \in \overline{0}\ , \quad k_N^i(t) = \int_0^t 1_{\partial 0}(x_N^i(s))\vec{n}(x_N^i(s))d|k_N^i|(s) \\ & \int_0^t 1_{\partial 0}(x_N^i(s))ds = \int_0^t \frac{1}{N} \sum_{j \neq i} \rho(x_N^i(s),x_N^j(s))d|k_N^i|(s) . \end{aligned} \tag{II.3}$$

Le premier problème est celui de l'existence et l'unicité de la solution $(x_N^i : i=1,\ldots,N)$ de (II.3) dans $\overline{0}^N$. C. Graham vient d'établir l'existence faible (cf. [24]). Rien n'est connu sur l'existence et l'unicité forte, comme sur l'unicité faible.

III - PARTICULES AVEC INTERACTION ET BRANCHEMENT

Pour N donné, on considère un système de N particules, chacune de masse $\frac{1}{N}$, opérant un mouvement de diffusion de générateur G avec une interaction γ comme dans I. La différence résulte dans le fait que chaque particule peut mourir, donnant naissance au moment de sa mort à un nombre aléatoire de particules de même masse $\frac{1}{N}$ situées au point où se trouve la particule qui meurt. Après chaque "branchement" le système des k particules en présence est gouverné jusqu'au branchement suivant par un système différentiel du type

$$dx_N^i(t) = \alpha(x_N^i(t))dt+\sigma(x_N^i(t))dw^i(t) + \frac{1}{N}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \gamma(x_N^i(t)\,,\, x_N^j(t))dt \ ,$$

les w^i étant des browniens indépendants.

On suppose que les durées de vie des différentes particules sont des variables indépendantes exponentielles de paramètre $N\lambda$ et que le nombre de descendants de chaque particule est une variable aléatoire entière de loi $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$. On pose :

$$m := \sum_{k\geq 0} k\,p(k)$$

$$\overline{v}^2 := \sum_{k\geq 0} (k-1)^2\,p(k)\ .$$

III.1 - Problème de martingale associé

Nous pouvons ici encore représenter l'état du système à l'instant t par la mesure

$$\mu_N(t) := \sum_{k\in I_t} \frac{1}{N}\delta_{x_t^k} \in M_+(\mathbb{R}^d)\ , \tag{III.1.1}$$

où I_t est l'ensemble des indices des particules en vie à t et x_t^k est la position à l'instant t de la particule d'indice k.

Le processus $(\mu_N(t))_{t\in[0,T]}$ a ses trajectoires dans $\tilde{\Omega} := D([0,T];M_+(\mathbb{R}^d))$, les sauts correspondant aux instants de "branchement".

Pour tout $k > 0$, $F \in C_K^\infty(\mathbb{R}^k)$ et toute famille $u_i \in C_K^\infty(\mathbb{R}^d)$, $i=1,\dots,k$, posons (voir notation 2.) :

$$L^N\Phi_{F;u_1,\dots,u_k}(\mu) := \sum_{j=1}^{k} D_jF(<u_1,\mu>,\dots,<u_k,\mu> <u_j,(G^*\text{-div } H(\mu)I-H(\mu).\nabla)\mu>$$

$$-\frac{1}{2N}\sum_{i,j=1}^{k} D_{ij}F(<u_1,\mu>,\dots,<u_k,\mu>)<u_i,\tilde{a}(\mu)u_j> \quad \text{(III.1.2)}$$

$$+\sum_{\ell\in\mathbb{N}}\lambda Np(\ell)\int_{\mathbb{R}^d}[\Phi_{F;u_1,\dots u_k}(\mu+\frac{1}{N}(\ell-1)\delta_x)-\Phi_{F;u_1\dots,u_k}(\mu)]\mu(dx)$$

avec la même définition de $\tilde{a}$ qu'en (I.1.4) :

le processus μ_N possède alors la "propriété de martingale" pour toute Φ du type précédent :

$$[M''] : \Phi(\mu_N(t)) - \Phi(\mu_N(0)) - \int_0^t L^N\Phi(\mu_s)ds \;=\; \text{martingale}$$

Remarquons que la propriété [M"] implique (sans être équivalente en raison des sauts du processus μ_N) les deux propriétés suivantes $[M_1''']$ et $[M_2''']$:

$[M_1''']$ Pour tout $u \in C_K^\infty(\mathbb{R}^d)$ le processus réel

$$M^u_{N,t} := <u,\mu_N(t)> - <u,\mu_N(0)> - \int_0^t [<Gu+\nabla u.M(\mu_s),\mu_s> + N\lambda(m-1)<u,\mu_s>]ds$$

est localement une martingale de carré intégrable.

$[M_2''']$ Pour tout $u,v \in C_K^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$\langle\langle M_N^u,M_N^v\rangle\rangle_t = \int_0^t [\frac{1}{N}<\nabla u^*\sigma\sigma^*\nabla v,\mu_N(s)> + \bar{v}^2<uv,\mu_N(s)>]ds.$$

III.2 - Espaces de Sobolev pour les processus μ_N

Il est commode d'introduire des techniques hilbertiennes, c'est-à-dire de pouvoir considérer le processus μ_N comme un processus à valeurs dans un espace de Hilbert $\mathbb{G}$ de telle sorte que $[M_1''']$ puisse s'écrire :

$$M_N(t) := \mu_N(t)-\mu_N(0) - \int_0^t [G^*\mu_s\text{-div } H(\mu_s)\mu_s + N(m-1)\mu_s]ds \quad \text{(III.2.1)}$$

est une martingale à valeurs dans $\mathbb{E}$, la propriété $[M_2''']$ s'écrivant alors

Pour tout $u,v \in \mathbb{E}'$, on a

$$<u, \ll M_N \gg_t v> = \int_0^t <u,\tilde{a}_N(\mu_s)v>ds , \tag{III.2.2}$$

où $\tilde{a}_N(\mu)$ est l'opérateur de $\mathcal{L}_1(\mathbb{E}', \mathbb{E})$ (voir [17]) défini par

$$<u,\tilde{a}_B(\mu)v> = \frac{1}{N}<\nabla u^*\sigma\sigma^*\nabla v,\mu> + \lambda\bar{v}^2<uv,\mu> . \tag{III.2.3}$$

Nous introduisons à cet effet les espaces de Sobolev avec poids suivants :

Pour j entier > 0 , $p \geq 0$, on définit :

$$W^{j,2,p} := \left\{f : \sum_{|\alpha|\leq j} \int_{\mathbb{R}^d} |D_\alpha f(x)|^2 \frac{dx}{1+|x|^{2p}} < \infty \right\} \tag{III.2.4}$$

où $D_\alpha f$ désigne la dérivée au sens des distributions, supposée être une fonction, et α un multi-indice $(\alpha^1,\ldots\alpha^d)$ avec $|\alpha| := \sum_{i=1}^d \alpha^i$.

On considère la norme hilbertienne

$$\|f\|_{j,2,p} := \left(\sum_{|\alpha|\leq j} \int_{\mathbb{R}^d} |D_\alpha f(x)|^2 \frac{dx}{1+|x|^{2p}}\right)^{1/2} \tag{III.2.5}$$

On notera $W^{-j,2,p}$ le dual de $W^{j,2,p}$.

Comme conséquence des théorèmes classiques d'immersion de Sobolev et d'un théorème d'immersion de Hilbert-Schmidt, on a les propriétés suivantes (voir Adams [23]) :

- Si $j > \frac{d}{2}$ $W^{j,2,p}(\mathbb{R}^d) \subset C^P(\mathbb{R}^d)$ pour tout $p \geq 0$ et il existe une constante $K_{p,j}$ telle que

$$\|f\|_{C^P} \leq K_{p,j}\|f\|_{j,2,p} .$$

- Si $k > \frac{d}{2}$ et $q > d$ l'injection naturelle $W^{j+k,2,p}$ $W^{j,2,p+q}$ est une application de Hilbert-Schmidt.

<u>Conséquence</u>

a) Comme conséquence de ce qui précède, on a l'injection continue de $M^P(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow W^{-j,2,p}$ pour $j > \frac{d}{2}$.

Par ailleurs, si on identifie $W^{0,2,p+q} := L^2(\mathbb{R}^d \; ; \; \frac{1}{1+|x|^{p+d}}\, dx)$ à son dual, on a les injections "naturelles" continues $(j > \frac{d}{2}, k > \frac{d}{2}, p \geq 0)$:

$$W^{j+k,2,p} \subsetneq W^{j,2,p+q} \subsetneq W^{0,2,p+q} \subsetneq W^{-j,2,p+q} \subsetneq W^{-(j+k),2,p} .$$

b) Plaçons-nous dans le cas "sous-critique" ou "critique", c'est-à-dire $m \leq 1$. Si on part d'un système fini de particules, $\mu_N(t)$ est à support fini p.s. pour tout t . Donc, pour tout p :

$$\mu_N(t) \in M^P(\mathbb{R}^d) \subset W^{-j,2,p} .$$

Si on fait sur α, σ et γ des hypothèses de différentiabilité à l'ordre j et de croissance polynomiale, on voit que l'opérateur $\mu \to G^*\mu$ - div $H(\mu)\mu$ applique continûment $W^{-j+2,2,p}$ dans $W^{-j,2,p}$ pour un p convenable.

Si donc $(j-2) > \frac{d}{2}$ on a $M^P(\mathbb{R}^d) \subset W^{-j+2,2,p}$ et on voit immédiatement que pour tout (t,ω) l'application $u \sim M_N^u(t,\omega)$ est un élément de $W^{-j,2,p}$. On peut donc écrire la formule (III.2.1) avec $\mu_N(t,\omega) \in M^P(\mathbb{R}^d)$ et M_N : *martingale à valeurs dans* $W^{-j,2,p}$.

III.3 - Compacité de la suite μ_N et limites (lorsque $m = 1$)

En utilisant l'inégalité

$$|<u,\widetilde{a}_N(\mu)v>| \leq \frac{1}{N} K_{p+q,j+1} \|\sigma\sigma^*\|_\infty \|u\|_{j+1,2,p+q} \|v\|_{j+1,2,p+q} \|\mu\|_{p+q}$$
$$+ \lambda\, \overline{v}^2 K_{p+q,j} \|u\|_{j,2,p+q} \|v\|_{j,2,p+q} \|\mu\|_{p+q}$$

valable pour $j > \frac{d}{2}$, d'après le théorème d'immersion, et le fait que $W^{j+k,2,p} \subsetneq W^{j+1,2,p+q}$ est de Hilbert Schmidt pour $q > d$, $k > \frac{d}{2} + 1$ et tout $p \geq 0$ on voit que pour $\ell > d+1$:

$$\text{trace}_{W^{\ell,2,p}}(\widetilde{a}_N(\mu)) \leq K_{p+q,\ell} \, [\frac{1}{N} \|\sigma\sigma^*\|_\infty + \lambda\, \overline{v}^2] \, \|\mu\|_{p+q} \tag{III.3.1}$$

Pour cette raison il est important de montrer la borniture de moments suffisants de μ . On a le lemme suivant :

LEMME 2

On suppose que $|G(1+|x|^P)| \leq A_p(1+|x|^P)$ *pour une constante* A_p *convenable, que* div $H(\mu) \geq 0$ *pour tout* $\mu \in M^P$. *Alors, pour tout* $\mu_N(0)$ *à support compact et tout* *temps d'arrêt* τ :

$$\sup_{t \leqslant T} E_{\mu_N(0)} \|\mu^N_{T\wedge\tau}\|_p \leqslant \|\mu_N(0)\|_p \, e^{K_p T} \quad .$$

Ce lemme résulte facilement de l'expression qu'on dérive de (III.2.1) pour $E\left(\int (1+|x|^p)\mu_N(t)(dx)\right)$, de la positivité de $H(\mu)$ et du lemme de Gronwall.

On déduit dès lors très aisément de la formule (III.3.1) (par exemple à partir d'un critère du type Aldous-Rebolledo) que la suite de martingales $M_N(t)$ converge faiblement dans $D([0,T],W^{-m,2,p})$ pour $m \geqslant d+1$ et $p > d$ vers une martingale M de processus croissant :

$$< u, \ll M \gg_t v > \; = \lambda \, \overline{v}^2 \int < uv, \mu_s > ds \; . \qquad \text{(III.3.2)}$$

On a maintenant le résultat suivant en ce qui concerne la convergence de la suite $(\mu_N(\cdot))_{N \geqslant 0}$.

THEOREME 5

Supposons que la suite $(\mu_N(0))_{N\geqslant 0}$ *de mesures positives à support compact converge dans* $W^{-\ell,2,p}$ *vers* ν *(nécessairement* $\in M^P$*)* $p > d$, $\ell > d+1$. *Alors les lois* $\tilde{P}^N$ *des processus* μ_N *sont équitendues dans l'espace de Skorohod* $D([0,T];W^{-\ell,2,p})$ *et toute limite* $\tilde{P}$ *est un processus continu, solution du problème de martingale*

(i) $\quad \tilde{\mu}_t - \tilde{\mu}_0 - \int_0^t (G^*\tilde{\mu}_s - \operatorname{div} H(\tilde{\mu}_s)\tilde{\mu}_s - H(\tilde{\mu}_s).\nabla\tilde{\mu}_s)ds = \tilde{M}_t$

est une $\tilde{P}$*-martingale*

(ii) $\quad \ll \tilde{M} \gg_t = \int_0^t \tilde{a}(\mu(s))ds$ *avec*

$$< u, \tilde{a}(\mu)v > \; = \lambda \, \overline{v}^2 < uv, \mu > \; .$$

(iii) $\quad \tilde{P}$ *est portée par* $C([0,T];W^{-\ell,2,p}) \cap L^\infty([0,T];M_+^P(\mathbb{R}^d))$

et $\tilde{P}[\tilde{\mu}_0 = \nu] = 1$.

La compacité faible s'obtient assez facilement à l'aide du lemme 1 et d'une majoration du type :

$$\widetilde{E}^N \| \int_\tau^{\tau+\theta} (G^* \widetilde{\mu}_N(s) - \mathrm{div}\, H(\widetilde{\mu}_N(s))\widetilde{\mu}_N(s) - H(\widetilde{\mu}_N(s)).\nabla\widetilde{\mu}_N(s))ds \|_{-\ell,2,p}$$

$$\leqslant K \int_0^\theta \widetilde{E}_{\widetilde{\mu}_N(\tau)}(\|\widetilde{\mu}_N(s)\|_p)ds$$

Le passage à la limite de la propriété de martingale se fait comme d'habitude.

Remarque : Dans le cas sans interaction (H=0) et m=1 le problème de martingale est celui qui caractérise le "processus multiplicatif de D. Dawson (cf. [4] et [19]).

On a alors un théorème de convergence, en vertu du théorème d'unicité ([4], [19]).

Le problème est ouvert de l'unicité de la solution du problème de martingale (i), (ii), (iii) ci-dessus.

REFERENCES

[1] A. ALDOUS.- Exchangeability and related topics.- St-Flour, 1983.

[2] D. DAWSON.- Critical dynamics and fluctuations for a mean field model of cooperative behaviour. J. of Soc. Physics, 31, 1, 1983.

[3] D. DAWSON, G. IVANOFF.- Branching diffusions and random measures. Adv. in Prob., 5, 1978.

[4] D. DAWSON.- The critical measure diffusion process. Z. Wahr. verw. Gebiete 40, 1977, 135-145.

[5] R.L. DOBRUSHIN.- Vlasov equations. Fund. Anal. & Applied, 13-115, 1979.

[6] E. HEWITT, L.J. SAVAGE.- Symmetric measures on cartesian products. Trans. Amer. Math. Soc. 80, 1955, 470-501.

[7] R.A. HOLLEY, D.W. STROOCK.- Generalized Ornstein-Uhlenbeck processes and infinite particle branching brownian motion. Publ. Res. Inst. Math. Sc. Kyoto 14, 1979, 741-788.

[8] K. ITO.- Motions of infinite particles. Kyoto University 367, 1979, 1-33.

[9] A. JOFFE, M. METIVIER.- Weak convergence of sequences of semimartingales with applications to multitype branching processes. Adv. in Applied Proba. 1986.

[10] M. KAC.- Foundations of kinetic theory. Proc. of 3rd Berkeley Symposium on Math. Stat. & Prob. 3, 1956, 171-197.

[11] Ch. LEONARD. Thèse 3e Cycle. Univ. Paris XI, 1984.

[12] P.L. LIONS, A.S. SZNITMAN.- Stochastic differential equations with reflecting boundary conditions. 1982.

[13] A. MARTIN LÖF.- Limit theorems for the motions of a Poisson system of independent markovian particles with high density. Z. Wahr. verw. Gebiete 34, 1976, 205-223.

[14] H.P. McKEAN.- Propagation of chaos for a class of non linear parabolic equations. Lecture series in Diff. Eq. 7. Catholic Univ. 1967, 41-57.

[15] H.P. McKEAN.- A class of Markov processes associated with non linear parabolic equations. Proc. Nat. Acad. Sci. 56.

[16] H.P. McKEAN.- Fluctuations in the kinetic theory of gases. Comm. Pure Appl. Math. 28, 1975, 435-455.

[17] M. METIVIER.- Semimartingales. De Gruyter, 1982.

[18] P.A. MEYER.- Probabilités et potentiels. Hermann, 1966.

[19] S. ROELLY-COPPOLETTA.- Processus de diffusion à valeurs mesures multiplicatifs. Thèse. Univ. Paris VI, 1984.

[20] A.S. SZNITMAN.- An example of non linear diffusion process with normal reflecting boundary conditions and some related limit process. 1983.

[21] A.S. SZNITMAN.- A propagation of chaos result for Burgers'equation. Preprint, 1984.

[22] A.S. SZNITMAN, S.R.S. VARADHAN.- A multidimensional process involving local time. Preprint, 1984.

[23] R.A. ADAMS.- Sobolev spaces. Academic Press, 1975.

[24] C. GRAHAM. Systèmes de particules en interaction dans un domain à paroi collante et problèmes de martingales avec réflexion. Preprint. Ecole Polytechnique, Palaiseau.