

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CHRISTOPHE STRICKER

**Approximation du crochet de certaines
semimartingales continues**

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 18 (1984), p. 144-147

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1984__18__144_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

APPROXIMATION DU CROCHET
DE CERTAINES SEMIMARTINGALES CONTINUES

C. STRICKER

Tous les processus ou filtrations considérés seront indexés par $[0, 1]$. Soit $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t), P)$ un espace probabilisé filtré vérifiant les conditions habituelles. Il est bien connu que si X est une semimartingale continue appartenant à \mathfrak{G}^2 , alors la suite $\sum_{\sigma_n} E[(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 | \mathfrak{F}_{t_i}]$ converge dans L^1 vers $\langle X, X \rangle_t$ lorsque le pas de la subdivision $\sigma_n = (0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p = t)$ tend vers 0. Nous nous proposons ici de préciser cette convergence lorsque X appartient à une certaine classe de semimartingales continues. Après avoir établi un théorème assez général, nous examinerons quelques cas particuliers qu'on rencontre notamment en mécanique aléatoire.

THEOREME. Soit H un processus prévisible borné dans L^2 et soit B un mouvement brownien. On pose $X_t = B_t + \int_0^t H_s ds$ et on suppose qu'il existe un processus prévisible borné dans L^2 et Riemann-intégrable tel que :

$$\epsilon_s(t) = E[(s-t)^{-1} (B_s - B_t) (H_s - H_t - H'_t(B_s - B_t))] | \mathfrak{F}_t]$$

tende uniformément vers 0 dans L^1 quand s tend vers t .

Alors $nu^{-1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} E[(X_{u(i+1)/n} - X_{ui/n})^2 | \mathfrak{F}_{ui/n}] - u \right)$ tend dans L^1 vers $\int_0^u H_s^2 ds + \int_0^u H'_s ds$.

DEMONSTRATION. On pose $t_i = ui/n$. En développant $(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2$ on décompose la somme $nu^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} E[(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 | \mathfrak{F}_{t_i}]$ en trois parties que nous allons étudier séparément.

i) Comme B est une martingale de carré intégrable et que $[B, B]_t = t$, on a :

$$\sum_{\sigma_n} E[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 | \mathfrak{F}_{t_i}] = u.$$

ii) Montrons que $Z^n = nu^{-1} \sum_{\sigma_n} E[(\int_{t_i}^{t_{i+1}} H_s ds)^2 | \mathfrak{F}_{t_i}]$ converge dans L^1 vers $\int_0^u H_s^2 ds$. On désigne par λ la mesure de Lebesgue sur $[0, u]$.

Comme le processus H est borné dans $L^2(P)$, pour presque tout ω , $H_s(\omega)$ appartient à $L^2(\lambda)$. Le théorème de convergence des martingales entraîne que pour presque tout ω $K_t^n = nu^{-1} \sum_{\sigma_n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} H_s ds$ converge dans $L^2(\lambda)$ vers H . En développant $\int_{t_i}^{t_{i+1}} (H_s - K_s^n)^2 ds$, on remarque que $\sum_{\sigma_n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (H_s^2 - (K_s^n)^2) ds$ tend vers 0, P. p. s. et même dans $L^1(P)$ car H est borné dans $L^2(P)$. Or :

$$\begin{aligned} E[|Z^n - \int_0^u H_s^2 ds|] &\leq E[\sum_{\sigma_n} |nu^{-1} E[(\int_{t_i}^{t_{i+1}} H_s ds)^2 | \mathfrak{F}_{t_i}] - E[\int_{t_i}^{t_{i+1}} H_s^2 ds | \mathfrak{F}_{t_i}]| \\ &\quad + E[\sum_{\sigma_n} |E[\int_{t_i}^{t_{i+1}} H_s^2 ds | \mathfrak{F}_{t_i}] - \int_{t_i}^{t_{i+1}} H_s^2 ds|]. \end{aligned}$$

La première somme ci-dessus converge vers 0 car, en vertu de l'inégalité de Jensen, elle est majorée par $E[\sum_{\sigma_n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} ((K_s^n)^2 - H_s^2) ds]$ qui tend vers 0. Montrons maintenant que la deuxième somme tend aussi vers 0.

D'après [1], il existe une version mesurable de $E[H_s^2 | \mathfrak{F}_{t_i}]$ si bien que

$$\begin{aligned} &\sum_{\sigma_n} E[|\int_{t_i}^{t_{i+1}} H_s^2 ds - E[\int_{t_i}^{t_{i+1}} H_s^2 ds | \mathfrak{F}_{t_i}]|] \\ &= \sum_{\sigma_n} E[|\int_{t_i}^{t_{i+1}} (H_s^2 - E[H_s^2 | \mathfrak{F}_{t_i}]) ds|] \\ &\leq \sum_{\sigma_n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} E[|H_s^2 - E[H_s^2 | \mathfrak{F}_{t_i}]|] ds. \end{aligned}$$

Cette somme converge vers 0 car H est borné dans $L^2(P)$ et H_s est \mathfrak{F}_{s-} -mesurable. Ainsi Z^n converge dans $L^1(P)$ vers $\int_0^u H_s^2 ds$.

iii) Pour achever la démonstration du théorème, il reste à examiner les termes mixtes. Comme B est une martingale de carré intégrable et que H est borné dans $L^2(P)$, la formule d'intégration par parties montre que :

$$\begin{aligned} E[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \int_{t_i}^{t_{i+1}} H_s ds | \mathfrak{F}_{t_i}] &= E[\int_{t_i}^{t_{i+1}} H_s (B_s - B_{t_i}) ds] \\ &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} E[H_s (B_s - B_{t_i}) | \mathfrak{F}_{t_i}] ds. \end{aligned}$$

Si on pose $\gamma_t(s) = H_s - H_t - H_t'(B_s - B_t)$, on a :

$$\begin{aligned} E[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \int_{t_i}^{t_{i+1}} H_s ds | \mathfrak{F}_{t_i}] &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} E[(B_s - B_{t_i})^2 ds H_t'] \\ &\quad + \int_{t_i}^{t_{i+1}} E[(B_s - B_{t_i}) \gamma_{t_i}(s) | \mathfrak{F}_{t_i}] ds. \end{aligned}$$

Reprenant les notations du théorème, il vient :

$$E[|(B_s - B_{t_i})Y_{t_i}(s)|] \leq |s - t_i| E[|\epsilon_{t_i}(s)|].$$

Comme H^1 est Riemann intégrable et borné dans $L^2(P)$, les sommes de Riemann $\sum_{\sigma_n} un^{-1} H_{t_i}^1$ convergent dans L^1 vers $\int_0^u H_s^1 ds$. Ainsi :

$$2nu^{-1} \sum_{\sigma_n} E[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \int_{t_i}^{t_{i+1}} H_s ds | \mathfrak{F}_{t_i}] \text{ converge dans } L^1(P) \text{ vers } \int_0^u H_s^1 ds.$$

Le théorème est établi.

REMARQUE. On peut noter que si X est une semimartingale continue appartenant à \mathfrak{g}^2 telle que pour tout $u, nu^{-1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} E[(X_{u(i+1)/n} - X_{ui/n})^2 | \mathfrak{F}_{ui/n}] - u \right)$ converge dans L^1 , alors $\langle X, X \rangle_u = u$ et la partie martingale de X est un mouvement brownien B . On pourrait sans doute montrer que $X_t = B_t + \int_0^t H_s ds$ où H est un processus prévisible vérifiant $\int_0^1 H_s^2 ds < +\infty$. Ainsi X appartiendrait à la classe $W^1(\mathfrak{F})$ définie dans [2].

Nous allons maintenant examiner quelques cas particuliers du théorème ci-dessus. Les hypothèses du théorème sont évidemment vérifiées lorsque H est un processus déterministe, mesurable et borné. Dans ce cas $H^1 = 0$. D'ailleurs, si on examine de près la démonstration précédente, on peut remplacer l'hypothèse "H borné" par "de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue" lorsque H est déterministe.

Voici un autre cas important où le théorème s'applique.

PROPOSITION. Soient H un processus prévisible borné et B un mouvement brownien. Posons $X_t = B_t + \int_0^t H_s ds$ et supposons qu'il existe un processus prévisible borné H^1 vérifiant :

$$H_s - H_t - H_t^1(X_s - X_t) = (X_t - X_s) \eta_t(s) \text{ où } \eta_t(s) \text{ tend vers } 0 \text{ uniformément dans } L^2.$$

Alors $\epsilon_s(t) = E[(s-t)^{-1} (B_s - B_t) (H_s - H_t - H_t^1(B_s - B_t)) | \mathfrak{F}_t]$ tend uniformément vers 0 dans L^1 quand s tend vers t .

DEMONSTRATION. D'après les hypothèses de cette proposition il existe une constante α majorant $|H|$ et $|H^1|$. Posons :

$$K_t(s) = (s-t)^{-1} (B_s - B_t) [H_s - H_t - H_t^1(B_s - B_t)] \\ = (s-t)^{-1} [(B_s - B_t) H_t^1 \int_t^s H_u du + (B_s - B_t)^2 \eta_t(s) + (B_s - B_t) \int_t^s H_u du \eta_t(s)].$$

Or $(B_s - B_t)^2 (s-t)^{-1}$ est borné dans L^2 d'après les inégalités de Burkholder - Davis - Gundy tandis que $\eta_t(s)$ et $B_s - B_t$ tendent uniformément vers 0 dans L^2 quand s tend vers t . Ainsi $K_t(s)$ tend uniformément vers 0 dans L^1 et il en est de même a fortiori pour $E[K_t(s) | \mathfrak{F}_t]$, ce qui achève la démonstration de la pro-

position ci-dessus.

La formule des accroissements finis nous donne immédiatement le :

COROLLAIRE. Si f est une fonction de classe C^1 à support compact ou si, plus généralement, f est de classe C^1 , f et f' étant bornés, alors $X_t = B_t + \int_0^t f(X_s) ds$ vérifie les hypothèses du théorème ci-dessus.

REFERENCES

- [1] STRICKER, C. , YOR, M. : Calcul stochastique dépendant d'un paramètre. Z. W. 45, 109-133 (1978).
- [2] STRICKER, C. : Quelques remarques sur les semimartingales gaussiennes et le problème de l'innovation. A paraître.

Ajouté sur les épreuves : Nous allons montrer que la conjecture émise dans la remarque est correcte.

Faisons d'abord quelques remarques dans le cas déterministe. Soit λ la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$. f désigne une fonction à variation bornée sur $[0, 1]$ et $\sigma_n = (0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1)$ est la $n^{\text{ième}}$ subdivision dyadique de $[0, 1]$.

On pose $h_n(t) = 2^n \sum_{\sigma_n} (f(t_{i+1}) - f(t_i)) 1_{[t_i, t_{i+1}]}(t)$. Il est bien connu que h_n est une martingale discrète par rapport à sa filtration naturelle et qu'elle converge λ p. s. D'autre part, elle converge dans $L^1(\lambda)$ si et seulement si f est absolument continue. En particulier si f n'est pas absolument continue, la martingale h_n n'est pas uniformément intégrable et ne peut donc pas être bornée dans $L^2(\lambda)$. Enfin si $f(t) = \int_0^t h(s) ds$ et si h_n est bornée dans $L^2(\lambda)$, le lemme de Fatou entraîne que $\int_0^1 h^2(s) ds$ est finie.

Revenons maintenant au cas général. Soit X une semimartingale continue appartenant à \mathfrak{g}^2 telle que pour tout u , $n u^{-1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} E[(X_{u(i+1)/n} - X_{ui/n})^2 | \mathfrak{F}_{ui/n}] - u \right)$ converge dans L^1 . Alors $\langle X, X \rangle_u = u$ et la partie martingale de X est un mouvement brownien $B : X = B + A$. Comme $\sum_{i=0}^{n-1} E[(B_{u(i+1)/n} - B_{ui/n})^2 | \mathfrak{F}_{ui/n}] = u$, l'inégalité de Cauchy-Schwartz montre que la suite $n u^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} E[(A_{u(i+1)/n} - A_{ui/n})^2]$ est bornée. En prenant $u = 1$ et la sous-suite associée aux subdivisions dyadiques, les remarques ci-dessus montrent que $A_t = \int_0^t H_s ds$ avec $\int_0^t H_s^2 ds < +\infty$.