MICHEL EMERY

En marge de l'exposé de Meyer : « Géométrie différentielle stochastique »

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome S16 (1982), p. 208-216
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__S16__208_0>

Séminaire de Probabilités
Volume XVI

EN MARGE DE L'EXPOSE DE MEYER
" GEOMETRIE DIFFERENTIELLE STOCHASTIQUE "

par M. Emery

Ce titre doit être pris au pied de la lettre : Il ne s'agit pas ici d'un exposé autonome, mais simplement d'annotations que j'avais faites sur mon exemplaire du preprint de Meyer. Si, poussé par Meyer, je me décide à les recopier ici, c'est seulement afin d'éviter à un lecteur qui serait aussi ignorant que moi en géométrie quelques unes de mes larmes. C'est dire que, si je vais enfoncer quelques portes ouvertes (ou même parfois retrouver laborieusement quelques remarques jugées par Meyer trop évidentes pour être explicitées), en contrepartie, le lecteur aura la garantie qu'aucune démonstration ne sera trop longue pour tenir dans une marge !

Ma première remarque concerne le théorème 3, dans lequel l'interpolation géodésique fournit une solution approchée de l'équation de Stratonovitch (13). Ce théorème fait intervenir, de manière un peu artificielle, une connexion linéaire parfaitement arbitraire, dont les symboles de Christoffel absolument quelconques $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$, introduits au début de la démonstration (ligne $(14)_b$), se promènent avec des coefficients variables jusqu'en bas de la page, pour finir par s'éliminer identiquement en $(14)_g$. Pour éviter cela, on peut remplacer la donnée de la connexion par ce qu'on pourrait appeler une " fonction d'interpolation " dans la variété $V = \mathbb{R}^k$: C'est une application i de $V \times V \times [0,1]$ dans V, C^{∞} en l'ensemble des variables, telle que

$$i(u,v,0) = u \quad ; \quad i(u,v,1) = v$$
$$\ddot{i}(u,v,t) \in O(|u-v|^2) \quad ; \quad \dddot{i}(u,v,t) \in O(|u-v|^3) \quad ,$$

où $\ddot{i}$ et $\dddot{i}$ désignent les dérivées d'ordre deux et trois de i par rapport à t, où $|u-v| = \sum_{\lambda}|u^{\lambda}-v^{\lambda}|$ (ça dépend de la carte, mais $O(|u-v|^n)$ n'en dépend pas) et où $\ddot{i} \in O(|u-v|^2)$ signifie que, si K est un compact de V, pour chaque

coordonnée λ , la fonction $\ddot{i}^{\lambda}(u,v,t)/|u-v|^2$ est bornée quand (u,v,t) décrit $K \times K \times [0,1]$ privé de la diagonale $\{u=v\}$; de même pour l'ordre trois.
Lorsque la variété est munie d'une connexion, les géodésiques de cette connexion définissent naturellement un tel procédé d'interpolation : Prendre pour fonction $t \longmapsto i(u,v,t)$ la géodésique joignant u à v si u et v sont assez voisins, et une courbe quelconque joignant u à v sinon. Je laisse le lecteur vérifier que sont bien alors satisfaites les conditions de majoration des dérivées (c'est d'ailleurs ce que fait Meyer au milieu de sa démonstration).

Avec une telle fonction d'interpolation, si l'on se donne l'équation de Stratonovitch (13) $Y_t = y + \int_0^t a(X_s,Y_s)*dX_s$, sa solution est approchée par la solution $\overset{n}{Y}$ de l'équation déterministe $\overset{n}{Y}_t = y + \int_0^t a(\overset{n}{X}_s,\overset{n}{Y}_s)d\overset{n}{X}_s$, où la courbe régulière par morceaux $\overset{n}{X}$ est ainsi définie : (t_ρ) est une subdivision, dépendant de n , dont le pas tend vers zéro, et, pour $t_\rho \leq t \leq t_{\rho+1}$,

$$\overset{n}{X}_t = i(X_{t_\rho},X_{t_{\rho+1}},\frac{t-t_\rho}{t_{\rho+1}-t_\rho}) .$$

La démonstration consiste à remarquer d'abord, à l'aide de la formule des accroissements finis, que

$$(\dot{i}^{\lambda} + \tfrac{1}{2}\ddot{i}^{\lambda})(u,v,0) = v^{\lambda} - u^{\lambda} - \tfrac{1}{6}\dddot{i}^{\lambda}(u,v,\theta) = v^{\lambda} - u^{\lambda} + O(|v-u|^3) ,$$

donc $\dot{i}^{\lambda} = v^{\lambda} - u^{\lambda} + O(|v-u|^2)$, et $\dot{i}^{\lambda} \in O(|v-u|)$. Cette majoration, jointe à celles postulées pour les dérivées seconde et troisième, fournit le résultat grâce, bien entendu, au même calcul que Meyer (la quantité qui disparaît magiquement en fin de calcul étant maintenant du type $v^{\lambda} - u^{\lambda} - (\dot{i}^{\lambda} + \tfrac{1}{2}\ddot{i}^{\lambda})$, qui est négligeable parce que, nous venons de le voir, petite d'ordre trois).

Passons maintenant à la correction géodésique au transport parallèle. Il est frappant de remarquer que, par leur définition géométrique, le transport parallèle le long d'une semimartingale et le transport de Dohrn et Guerra généralisé par Meyer sont tous les deux anticipants : ils nécessitent l'approximation de X par son interpolation géodésique $\overset{n}{X}$. Par ailleurs, tous deux sont donnés par une e.d.s., que l'on peut toujours écrire sous forme d'Itô, donc toujours susceptible d'une approximation non anticipante. A quoi ressemble cette approximation adaptée ? La réponse est une belle trivialité : Dans chacun des deux cas, on dispose d'une méthode déterministe pour prolonger un vecteur tangent B donné en un point x de V en un champ de vecteurs $B(y)$ défini sur tout un voisinage de x : si y est assez voisin de x, on définit $B(y)$ comme le résultat du déplacement de B le long de la géodésique menant de x à y par transport parallèle ordinaire — respectivement par transport géodésique de Dohrn et Guerra. L'approximation non anticipante du transport Y le long de la semimartingale X est alors tout bêtement fabriquée ainsi : Supposons notre transport approché construit jusqu'à un instant de subdivision t_ρ. Pour le définir dans l'intervalle $[t_\rho, t_{\rho+1}]$, il suffit, à l'instant t_ρ, de construire comme ci-dessus autour du point X_{t_ρ} le champ de vecteurs B tel que $B(X_{t_\rho}) = Y_{t_\rho}$ et, durant l'intervalle $t_\rho \leq t \leq t_{\rho+1}$, de poser simplement $Y_t = B(X_t)$. On a ainsi une approximation non anticipante qui coïncide avec l'approximation anticipante aux instants de subdivision.

Par cette méthode, tout procédé permettant de prolonger un vecteur tangent en x en un champ de vecteurs au voisinage de x fournira un moyen de transport. par exemple, en notant e_x l'application exponentielle de $T_x(V)$ dans V, on peut prolonger un vecteur $B \in T_x(V)$ en le champ $B(y) = (e_x)_*(e_x^{-1}(y))(B)$ (c'est-à-dire que le champ $B(y)$ est lu comme un champ uniforme dans toute carte normale en x) ; l'équation que l'on obtient dans ce cas est semblable à $(27)_b$, mais avec un coefficient $\frac{1}{6}$ au lieu de $\frac{1}{2}$ devant le terme correctif.

Toujours sous la rubrique transport géodésique, il faut signaler un détail dans la fin de la démonstration de la proposition 4. On y utilise la positivité stricte du produit scalaire riemannien $(B|R(B,A)A)$, en défaut si B est colinéaire à A. Il est facile d'y remédier en remarquant que B reste orthogonal (respectivement égal) à A s'il l'est à l'instant s_0, mais il est probablement plus conforme à l'esprit de l'exposé de tout reprendre par un calcul probabiliste, qui fournit en prime le cas, prévu par Meyer, de la courbure positive au sens large (c'était trop beau pour être faux !). Voici comment on peut procéder avec un minimum de calculs, ou plutôt en utilisant chaque fois que possible des calculs déjà faits par Meyer.

Soit f la fonction sur $T(V)$ donnée par $f(x,y) = \|y\|^2 = g_{ij}(x)y^iy^j$.

Il s'agit de vérifier que, si (Y_t) est un transport géodésique au dessus de (X_t), donc solution de l'e.d.s. $(27)_b$, la semimartingale réelle $f(X_t,Y_t)$ est en fait un processus croissant (ou décroissant, suivant l'hypothèse). Désignons, comme en (16) - (20), par $\bar{\bar{H}}$ le relèvement associé à l'équation $(27)_b$, et posons $Z = (X,Y)$. On a

$$d(f\circ Z)_t = \langle d^2 Z_t\,,\, d^2 f\rangle = \langle \bar{\bar{H}}_{Z_t}(d^2X_t)\,,\, d^2f\rangle_{Z_t}$$
$$= \langle H_{Z_t}(d^2X_t)\,,\, d^2f\rangle_{Z_t} + \tfrac{1}{2}\, d\langle X^\lambda, X^\mu\rangle\, c^i_{\lambda\mu}(Z_t)\, D_i f(Z_t)$$
(formule (20)).

Mais, si (Z'_s) est le transport parallèle au dessus de (X_s) qui coïncide avec Z à l'instant t, on a

$$\langle H_{Z_t}(d^2X_t)\,,\, d^2f\rangle = d(f(Z'_t)) = 0$$

car le transport parallèle conserve la longueur. Donc

$$d(f\circ Z)_t = \tfrac{1}{2}\, d\langle X^\lambda, X^\mu\rangle_t\, c^i_{\lambda\mu}(Z_t)\, D_i f(Z_t)\ .$$

Or $D_i f = 2\,g_{ij}\,y^j$ et $c^i_{\lambda\mu}$ peut, en vertu de la symétrie en λ et μ, être pris égal à $R^i_{\lambda\mu j}\,y^j$. En définitive,

$$d(g_{ij}(X_t)Y^i_tY^j_t) = R_{i\lambda\mu j}(X_t)\,Y^i_tY^j_t\, d\langle X^\lambda, X^\mu\rangle_t\ .$$

La proposition en découle par l'approximation discrète

$$\|Y_t\|^2 = \|Y_{t_0}\|^2 + \lim \sum R_{i\lambda\mu j}(X_{t_\rho})\,Y^i_{t_\rho}Y^j_{t_\rho}\,(X^\lambda_{t_{\rho+1}} - X^\lambda_{t_\rho})(X^\mu_{t_{\rho+1}} - X^\mu_{t_\rho})\ .$$

De même, on peut établir que, si Y et Y' sont transportés géodésiquement,

$$d(g_{ij}(X_t)Y^i_tY'^j_t) = R_{i\lambda\mu j}(X_t)\,Y^i_tY'^j_t\, d\langle X^\lambda, X^\mu\rangle_t\ .$$

Si l'on remplace dans cette démonstration le transport géodésique par le transport construit à l'aide de cartes exponentielles (voir page précédente), tout ceci reste vrai à condition de prendre maintenant un terme correctif trois fois plus petit, donc il faut remplacer R par $\frac{1}{3}R$ dans ces formules ; l'analogue de la proposition 4 reste vraie. Les théorèmes déterministes correspondant à ces résultats, aussi bien pour le cas géodésique que pour le cas exponentiel, nécessitent dans le cas positif une hypothèse de non-dégénérescence de la courbure (au moins dans les ouvrages de géométrie que j'ai consultés).

Dans le paragraphe suivant, Meyer donne les 5 formules $(31)_{a-e}$ qui permettent de relever dans W , au moyen d'une e.d.s. linéaire, une connexion donnée sur V . Voici comment on peut interpréter ces conditions. D'abord $(31)_a$. Comme le dit Meyer, elle exprime que la restriction à chaque fibre W_x de la connexion sur W est la connexion triviale. Puis $(31)_{b \text{ et } c}$. Prises ensemble, ces deux conditions expriment exactement le fait que Γ et π_* commutent, ce que l'on peut, si l'on veut faire plus bourbachic, illustrer par un diagramme

$$\begin{tikzcd} \tau(W) \arrow[r, "\Gamma"] \arrow[d, "\pi_*"] & T(W) \arrow[d, "\pi_*"] \\ \tau(V) \arrow[r, "\Gamma"] & T(V) \end{tikzcd} .$$

Ensuite $(31)_d$. Cette condition signifie que, si Q est un champ de vecteurs d'ordre 1 verticaux sur W et si R est un champ de vecteurs d'ordre 1 sur V , alors, en notant HR le champ sur W obtenu en remontant R par les applications $\bar{H}_z$ associées à l'e.d.s. (on n'a besoin pour cela que de l'équation du premier ordre), on a $\nabla_Q HR = 0$. En termes plus imagés, les sous-espaces $\bar{H}_z(T_x(V))$ sont considérés par Γ comme parallèles quand z décrit une fibre W_x ; ou encore, le relèvement $\bar{H}_z$ restreint aux v.t.1 donne le même résultat que le transport parallèle le long de n'importe quelle courbe qui mène de $(x,0)$ à z en restant dans la fibre W_x . La condition $(31)_e$ du théorème 5, enfin, donnée par Meyer sous la forme

$$U \in \tau_x(V) \ , \ \Gamma U = 0 \ \Rightarrow \ \bar{H}_z \Gamma U = 0 \ ,$$

entraîne plus généralement la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} \tau(W) \arrow[r, "\Gamma"] & T(W) \\ \tau(V) \arrow[r, "\Gamma"] \arrow[u, "\bar{H}_z"] & T(V) \arrow[u, "\bar{H}_z"] \end{tikzcd} .$$

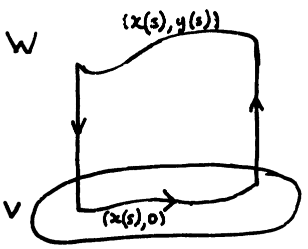
Comme il commute séparément avec π_* et $\bar{H}_z$, l'opérateur Γ sur $\tau(W)$ commute aussi avec les opérateurs de projection horizontale $Hor = \bar{H}_z \circ \pi_*$ et verticale $Ver = Id - Hor$. Ceci permet d'expliquer un aspect a priori surprenant des théorèmes 7 et 9, plus loin, qui disent, Z étant une semimartingale dans W , comment calculer

$\mathrm{Ver}\,\Gamma\,(d^2 Z_t)$ à partir de Z et de l'e.d.s. $\overline{H}$, mais sans utiliser la donnée de Γ sur V (encore un $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ qui disparaît miraculeusement en cours de calcul !). Cela ne doit pas étonner si l'on note que ce vecteur n'est autre que $\Gamma\,\mathrm{Ver}\,(d^2 Z_t)$, et que l'action de Γ sur les éléments verticaux de $\tau(W)$, donnée par $(31)_{abd}$, ne fait pas intervenir la connexion $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ sur la base.

J'espère que Meyer me pardonnera d'opposer à sa plaidoirie en faveur de Γ^{g} deux pièces à verser au dossier de Γ^{p} . On se place toujours dans le cadre du paragraphe deux : on dispose d'une connexion sur V et, sur le fibré W , d'une e.d.s. qu'on peut toujours mettre sous la forme de Stratonovitch

$$(29)_s \qquad dY^i_t = a^i_{j\lambda}(X_t)Y^j_t * dX^\lambda_t + \tfrac{1}{2}\, c^i_{j\lambda\mu} Y^j_t \, d\langle X^\lambda , X^\mu\rangle_t \quad .$$

Soit $(x(s),y(s))$ une courbe dans W . Il est possible de transporter un



vecteur $u \in \tau_{(x(0),y(0))}(W)$ vers le point $(x(t),y(t))$, en n'utilisant que l'équation au premier ordre et la connexion sur V , en trois étapes : on le descend d'abord de $(x(0),y(0))$ à $(x(0),0)$ le long d'une courbe restant dans la fibre (en utilisant $(31)_d$), puis on effectue le transport le long de la courbe $(x(s),0)$ (en postulant que $\Gamma^i_{\lambda\mu} = 0$ le long de cette courbe ; c'est toujours vrai si $\Gamma^i_{\lambda\mu}(x,y)$ est linéaire en y), enfin on remonte de $(x(t),0)$ vers $(x(t),y(t))$ comme à la première étape. Le calcul, facile, montre qu'il existe une connexion sur W et une seule telle que cette opération donne le même résultat que le transport parallèle le long de la courbe $(x(s),y(s))$ pour ladite connexion ; cette connexion est tordue, mais si on la détord on obtient exactement la connexion associée par le théorème 5 à l'équation de Stratonovitch sans terme correctif $dY^i_t = a^i_{j\lambda}(X_t)\,Y^j_t * dX^\lambda_t$.

La deuxième pièce est la remarque qui suit le théorème 5. Pour obtenir l'équation des géodésiques de la connexion Γ sur W (où Γ est construite à partir de l'e.d.s. $(29)_s$), il suffit d'écrire l'équivalent dans ce contexte de la formule (36). Si $z(t) = (x(t),y(t))$ est une courbe dans W , on désignera par Dz la nouvelle courbe $(x(t),u(t))$ où $u = \mathrm{Ver}\,\dot{z}$ (pour être tout-à-fait précis,

$u(t)$ est l'image de $\mathrm{Ver}\,\dot z(t)$ par l'isomorphisme naturel de $T_z(W_x)$ sur W_x ; en termes de coordonnées, ceci signifie simplement que $u^i = \dot y^i - a^i_{j\lambda} y^j \dot x^\lambda$). Un calcul tout aussi brutal que celui de Meyer donne l'équation

$$(DDz)^i = (\mathrm{Ver}\,\Gamma\,\ddot z)^i + c^i_{j\lambda\mu} y^j \dot x^\lambda \dot x^\mu \qquad (36)_b$$

qui généralise manifestement (36).

Cette relation montre que la courbe z dans W est une géodésique pour Γ si et seulement si

$$\begin{cases} x = \pi_* z \text{ est une géodésique dans } V \text{ (c'est évidemment nécessaire)} & (g)_1 \\ (DDz)^i = c^i_{j\lambda\mu} y^j \dot x^\lambda \dot x^\mu \;. & (g)_2 \end{cases}$$

Maintenant, si l'on part d'une géodésique $x(t)$ sur V , à quelle condition ses relèvements z par l'équation du premier ordre $dy^i = a^i_{j\lambda}\, y^j dx^\lambda$ sont-ils des géodésiques de W ? Ceci a lieu lorsque $(g)_2$ est vérifiée par tous les relèvements z tels que $Dz = 0$, ce qui exige $c^i_{j\lambda\mu} = 0$; dans le cas où $W = T(V)$, ceci correspond à la connexion Γ^p . En toute généralité, c'est lorsque $c^i_{j\lambda\mu} = 0$ que les équations (g) et $(36)_b$ (donc aussi (36)!) prennent leur forme la plus simple. En revanche, (35) (qui, remarquons-le en passant, n'est pas vraiment une égalité : les deux membres se correspondent par l'isomorphisme canonique de $T(T(V))$ sur lui-même) ne possède aucun analogue simple pour Γ^p .

Peut-être est-il intéressant de remarquer qu'en toute généralité la résolution des équations différentielles déterministes du 2è ordre (g) permet d'obtenir une solution approchée de l'e.d.s. $(29)_s$. Il suffit pour cela d'interpoler d'abord (grâce à $(g)_1$) X par des arcs géodésiques $(x(t), t_\rho \leq t \leq t_{\rho+1})$ et de construire successivement sur chacun de ces arcs la solution approchée $(z(t), t_\rho \leq t \leq t_{\rho+1})$ comme la solution de l'équation déterministe $(g)_2$ avec, pour conditions initiales, $Dz(t_\rho) = 0$ et $z(t_\rho) =$ valeur calculée à l'étape précédente $[t_{\rho-1}, t_\rho]$. Ainsi la boucle est bouclée, et, généralisant à la fois la construction de Dohrn-Guerra et l'approximation du transport parallèle le long d'une semimartingale, on peut toujours baser sur les équations (g) la résolution approchée de l'e.d.s. (au cours de laquelle, bien entendu, on doit introduire des coefficients $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ qui s'évanouiront mystérieusement ! Nos plus fins limiers y perdent la tête).

Pour terminer, je voudrais extraire du chapitre consacré à la mécanique de Nelson un joli résultat, de nature purement probabiliste, dissimulé au milieu de considérations de "mécanique".

Si un processus (X_t) est à la fois une diffusion et une co-diffusion sur une variété V (le préfixe co exprimant le retournement du temps), alors, à chaque instant t, le générateur infinitésimal L_t (supposé non dégénéré mais pouvant dépendre du temps), le co-générateur $\hat{L}_t$ et la loi de la variable X_t sont liés par la formule

$$L_t + \hat{L}_t = \Delta_t + \operatorname{grad}_t \operatorname{Log} \rho_t$$

qui permet, connaissant deux d'entre eux, de calculer le troisième. Ici, Δ_t et grad_t sont le laplacien et le gradient pour la structure riemannienne sur V induite par L_t (c'est-à-dire que $L_t - \frac{1}{2}\Delta_t$ est du premier ordre, ou encore que $<\operatorname{grad}_t f \mid \operatorname{grad}_t g>_t = L_t(fg) - fL_t g - gL_t f$; en coordonnées locales, $g_t^{\lambda\mu} = a_t^{\lambda\mu}$ si $L_t = \frac{1}{2} a_t^{\lambda\mu} D_{\lambda\mu} + b_t^{\lambda} D_{\lambda}$; l'invariance des crochets par retournement du temps montre que $\hat{L}_t$ induit la même structure riemannienne) ; quant à ρ_t, c'est simplement la densité de la loi de X_t par rapport à la mesure riemannienne r_t. Notez que l'on obtient une relation nécessaire entre L_t et $\hat{L}_t$ seulement, ne faisant plus intervenir ρ_t, en écrivant que le champ de vecteurs $L_t + \hat{L}_t - \Delta_t$ est un champ de gradients (c'est la condition $\operatorname{rot} u = 0$ de Meyer, qui écrit la formule ci-dessus $u = \operatorname{grad} R$).

Cette formule est démontrée (parmi d'autres) dans le paragraphe "Girsanov" à l'aide d'un changement de probabilité, en supposant que la structure riemannienne ne dépend pas de t. Voici comment on peut faire dans le cas général.

Soient f et g deux fonctions C^∞ à supports compacts. Pour $u \leq v$, posons $F(u,v) = E[f(X_v)g(X_u)]$. Comme $f(X_v) - \int^v L_t f(X_t)dt$ est une martingale, on a

$$E[(f(X_v)-f(X_u))g(X_u)] = E[g(X_u)\int_u^v L_t f(X_t)dt] \quad ,$$

d'où, en dérivant par rapport à v,

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u,v) = E[L_v f(X_v)g(X_u)] \quad .$$

De même, en écrivant que $g(X_u) + \int^u \hat{L}_t g(X_t)dt$ est une co-martingale (le $+$ vient de ce que dt a changé de signe), on trouve

$$E[f(X_v)(g(X_u)-g(X_v))] = -E[f(X_v)\int_v^u \hat{L}_t g(X_t)dt]$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = -E[\hat{L}_u g(X_u)f(X_v)] \quad .$$

Calculons maintenant de deux manières $\frac{d}{dt}F(t,t)$. Ceci vaut d'une part

$$\frac{\partial F}{\partial u}(t,t) + \frac{\partial F}{\partial v}(t,t) = E[(gL_t f - f\hat{L}_t g)\circ X_t]$$

et d'autre part

$$\frac{d}{dt}E[fg\circ X_t] = E[L_t(fg)\circ X_t] \quad ,$$

d'où, en égalant,

$$E[(L_t(fg) - gL_t f + f\hat{L}_t g)\circ X_t] = 0 \ ,$$

$$\int (L_t(fg) - gL_t f + f\hat{L}_t g)\,\rho_t\, dr_t = 0 \quad .$$

J'omets dorénavant l'indice t , fixé jusqu'à la fin du calcul. En remplaçant $L(fg) - gLf$ par $fLg + \operatorname{grad} f.\operatorname{grad} g$, il vient

$$\int (f(L+\hat{L})g + \operatorname{grad} f.\operatorname{grad} g)\,\rho\, dr = 0$$

$$\int \rho f(L+\hat{L})g\, dr = \int f \operatorname{div}(\rho \operatorname{grad} g)\, dr = \int f(\rho\Delta g + \operatorname{grad}\rho.\operatorname{grad} g)\, dr \quad .$$

Comme f est arbitraire, ceci entraîne $(L+\hat{L})g = \Delta g + \frac{1}{\rho}\operatorname{grad}\rho.\operatorname{grad} g$, c'est-à-dire en définitive $L + \hat{L} = \Delta + \operatorname{grad}\operatorname{Log}\rho$.