SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

BERNARD BRU
HENRI HEINICH
JEAN-CLAUDE LOOTGIETER

Autour de la dualité (H^1, BMO)

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 15 (1981), p. 259-277
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1981__15__259_0>

AUTOUR DE LA DUALITE (H^1, BMO)

par

B. BRU, H. HEINICH et J.C. LOOTGIETER (*)

INTRODUCTION :

Nous nous proposons de poursuivre ici l'étude de l'expression de la dualité (H^1, BMO) commencée par Jeulin et Yor dans le Séminaire n° 13, ([4]).

Il s'agit de répondre à deux types de questions :

- Ponctuellement, "pour quels couples de martingales (X,Y) de $H^1 \times BMO$, a-t-on $X_\infty Y_\infty \in L^1$ et $(X|Y)_{H^1 \times BMO} = E(X_\infty Y_\infty)$?"
- Globalement, "quelles sont les martingales X de H^1 (resp. de BMO) telles que $(X|Y) = E(X_\infty Y_\infty)$ pour toutes les martingales Y de BMO (resp. de H^1) ?"

Il est possible de répondre de façon assez satisfaisante à la question ponctuelle (paragraphe 1) mais la question globale, qui revient à caractériser les espaces de Banach réticulés les plus proches de H^1 et BMO, soulève de nombreuses difficultés (voir, par exemple, [4] page 370). En effet la géométrie des espaces de martingales proches de H^1 et BMO semble dépendre de propriétés particulières des filtrations. On observe, notamment, que toute martingale équi-intégrable construite sur le jeu de pile ou face est égale, au signe près, à une martingale de H^1, mais qu'il n'en est plus de même dans le cas de la filtration naturelle des entiers munis d'une probabilité géométrique.

Nous étudions ce genre de problèmes dans les paragraphes 2 et 3. Nous concluons en examinant l'exemple des filtrations régulières (paragraphe 4).

Nous remercions chaleureusement nos amis T. Jeulin et M. Yor qui nous ont encouragé à écrire ce petit article.

(*) Laboratoire de Probabilités associé au CNRS LA 224 "Processus Stochastiques et Applications", Université P. et M. Curie - Paris VI - Tour 56 - 3ème Etage 4 place Jussieu - 75230 PARIS CEDEX 05.

I) Expression de la dualité (H^1, BMO).

Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on se donne une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ vérifiant $\bigvee_n \mathcal{F}_n = \mathcal{F}$. On supposera toujours que $\mathcal{F}$ est séparable.

Si $X \in L^1$, on notera toujours $E^n(X) = E(X|\mathcal{F}_n)$ et on identifiera la martingale $(E^n(X))$ à sa variable terminale X.

On pose $X^* = \sup_n |E^n(X)|$ et on munit l'espace $H^1 = \{X \in L^1 | X^* \in L^1\}$ de la norme $||X||_{H^1} = E(X^*)$. Le dual de H^1 s'identifie à l'espace $BMO = \{Y \in L^1 | \sup_n E^n(Y - E^{n-1}(Y))^2 \in L^\infty\}$. On munit BMO de la norme duale et on note $(\cdot|\cdot)$ la dualité (H^1, BMO). On sait que

$$(X|Y) = \lim_n E(E^n(X) \cdot E^n(Y)). \qquad \text{(cf. [3] et [7]).}$$

Contrairement à H^1, l'espace BMO est un espace de Riesz (mais ce n'est pas un espace de Banach réticulé solide ; i.e : BMO ne vérifie pas : $|x| \leq |y| \Longrightarrow ||x|| \leq ||y||$) on a :

$$||\mathrm{Inf}(Y_1, Y_2)||_{BMO} \leq k(||Y_1||_{BMO} + ||Y_2||_{BMO})$$

pour une constante k ([4] page 361).

Remarque : Le temps n est entier, mais tous les résultats obtenus ici sont transposables au temps continu, et les exemples que nous traitons sont indifféremment à temps discret et à temps continu.

- On dispose des deux résultats suivants :

Proposition 1 :

Si $X \in H^1$ et $Y \in BMO$ vérifie $XY \in L^1$, alors $(X|Y) = E(XY)$.

Démonstration :

- Si $Y \in L^\infty$, le théorème de Lebesgue montre que $E(XY) = \lim_n E(E^n(X)\,Y) = (X|Y)$.

- Si $Y \in BMO_+$, $E^n(Y) \in L^\infty_+(\mathcal{F}_n)$ et $Y \wedge E^n(Y) \in L^\infty_+$. On a :

$$(X|\mathrm{Inf}(Y, E^n(Y))) = E(X \cdot \mathrm{Inf}(Y, E^n(Y))) \xrightarrow[n \uparrow \infty]{} E(XY) \text{ puisque}$$

$$|X \cdot \mathrm{Inf}(Y, E^n(Y))| \leq |XY| \in L^1 .$$

D'autre part $||\mathrm{Inf}(Y, E^n(Y))||_{BMO} \leq 2k\, ||Y||_{BMO}$, ce qui montre que la suite $(\mathrm{Inf}(Y, E^n(Y)))$ est faiblement compacte, d'où il résulte que

$$(X|\mathrm{Inf}(Y, E^n(Y)) \xrightarrow[n \uparrow \infty]{} (X|Y)$$

et donc que $(X|Y) = E(XY)$.

Le lemme de Fatou permet de préciser davantage le résultat précédent :

Proposition 2 :

- Soit $X \in H^1$ et $Y \in BMO$ telles que $XY \geq Z \in L^1$, alors $XY \in L^1$ (et la dualité s'écrit $E(XY)$).

- Symétriquement, soit $X \in H^1$ et $Y \in BMO$ telles que $XY \leq Z \in L^1$, alors $XY \in L^1$.

Démonstration :

Soit $X \in H^1$ et $Y \in BMO$ vérifiant $XY \geq Z \in L^1$; on a : $XY \geq Z \geq -Z^-$ et donc $X \cdot Y^+ \geq -Z^- \cdot 1_{\{Y \geq 0\}} \geq -Z^-$, ce qui permet de supposer $Y \geq 0$, on a alors, pour tout n :

$$\mathrm{Inf}(Y, E^n(Y)) \cdot X \geq -Y \cdot X^- \geq -Z^- \in L^1.$$

Comme dans la démonstration précédente, $E(X \cdot \mathrm{Inf}(Y, E^n(Y))) = (X | \mathrm{Inf}(Y, E^n(Y))) \underset{n}{\to} (X|Y)$; le lemme de Fatou montre alors que $XY \in L^1$.

Le cas $XY \leq Z \in L^1$ se traite de la même façon.

II) Espaces proches de H^1 et BMO.

① D'après la proposition 1 l'ensemble des $X \in H^1$ tels que pour tout $Y \in BMO$ $(X|Y) = E(XY)$ est exactement $\{X | XY \in L^1, \forall Y \in BMO\}$; cet ensemble a été étudié par Jeulin et Yor qui ont montré le résultat suivant :

Proposition 3 : ([4], proposition 3)

$\{X | XY \in L^1, \forall Y \in BMO\} = \{X \in H^1 \,|\, |X| \in H^1\}$

Démonstration :

Si $X \in H^1_+$ et Y BMO_+ $E(XY) \leq \underline{\lim}\, E(E^n(X)E^n(Y)) = (X|Y)$ donc $XY \in L^1$.

Inversement, si X vérifie $XY \in L^1$, $\forall Y \in BMO$, en tronquant X et en utilisant le théorème de Banach Steinhaus on montre que l'application $X \to E(XY)$ est une forme linéaire continue sur BMO et le corollaire de [2] page 111 montre que $X \in H^1$.

- Jeulin et Yor notent K^1 l'ensemble des $X \in H^1$ tels que $|X| \in H^1$; pour la norme $||X||_{K^1} = |||X|||_{H^1}$, K^1 est un espace de Banach réticulé solide (Banach lattice), très régulier, comme le montre la remarque suivante :

Lemme 4 : K^1 est convexe pour l'ordre, c'est à dire ([1]) :

si $0 \leq X \leq Y$ et $||X||_{K^1} = ||Y||_{K^1}$ alors $X = Y$

Démonstration :

Si $0 \leq X \leq Y$ et $||X||_{K^1} = ||Y||_{K^1}$ on a $X^* = Y^*$, en particulier $X^* \geq E^o(Y)$ et donc $(X-E^o(Y))^* \geq 0$; l'inégalité maximale montre alors :

$$E(X-E^o(Y)) = \int_{\{(X-E^o(Y))^* \geq 0\}} (X-E^o(Y))\cdot dP \geq 0, \text{ d'où } E(X) = E(Y) \text{ et } X = Y.$$

- K^1 est donc faiblement séquentiellement complet ([1]) ; en particulier comme l'ont remarqué Jeulin et Yor, $(K^1)' = \{Y | XY \in L^1$ pour tout $X \in K^1\}$ et $K^1 = \{X | XY \in L^1$ pour tout $Y \in (K^1)'\}$ (cf. [5] pages 29 et 30).

- Rappelons qu'un idéal (pour l'ordre) de L^1 est un sous-espace de Riesz I de L^1 vérifiant : $\forall X \in L^1$, $|X| \leq |Y|$ et $Y \in I \Longrightarrow X \in I$. On observe que K^1 est le plus gros idéal de L^1 contenu dans H^1. On peut également caractériser K^1 d'une autre façon :

Lemme 5 :

$K^1 = \{X \,|\, \operatorname{Sup}\{||\phi X||_{H^1} \,|\, \phi$ mesurable par rapport à $\mathcal{F}_n$, $n \in \mathbb{N}$, et $|\phi| \leq 1\} < \infty\}$.

Démonstration :

Soit $\phi \in L^\infty(\mathcal{F})$ vérifiant $|\phi| \leq 1$; on peut approcher ϕ p.s. par une suite ϕ_q de v.a. $\mathcal{F}_q$ mesurables et vérifiant $|\phi_q| \leq 1$.

Soit X vérifiant la propriété du second membre de l'égalité à démontrer on a $E(\sup_n |E^n(\phi_q X)|) \leq M$, pour une constante M convenable, le lemme de Fatou montre alors :

$$E(\varliminf_q \sup_n |E^n(\phi_q X)|) \leq M \quad \text{d'où } E(\sup_n |E^n(\phi X)|) \leq M \text{ et le lemme en résulte.}$$

- Le dual $(K^1)'$ de K^1 est un espace de Banach réticulé contenant BMO, c'est un idéal de L^1 il contient donc l'idéal engendré par BMO dans L^1, cet idéal est égal à $\{\phi\cdot Y | \phi \in L^\infty,\ Y \in \mathrm{BMO}\}$ qui est le complété de Dedekind de l'espace de Riesz BMO ([6], corollaire 32.8), nous notons $\widetilde{\mathrm{BMO}}$ cet espace.

Jeulin et Yor ont posé la question de savoir si $\widetilde{\mathrm{BMO}} = (K^1)'$ en général. Nous répondons ci-dessous à cette question :

Proposition 6 :

$\widetilde{\mathrm{BMO}} = (K^1)'$

Démonstration :

Posons $A = \{Z \in (K^1)' \mid \text{il existe } Y \in \mathrm{BMO}_+ \text{ tel que } |Z| \leq Y \text{ et } ||Y||_{\mathrm{BMO}} \leq 1\}$

On vérifie que A est un ensemble convexe, équilibré, borné de $(K^1{}')$. On note $\mathbb{E}_A$ l'espace vectoriel engendré par A, on munit $\mathbb{E}_A$ de la norme $||Z||_A = \inf_{X \in \lambda A} |\lambda|$.

- Montrons que A est fermé dans $(K^1)'$, soit Z_n une suite de A convergeant vers Z dans $(K^1)'$, on a $|Z_n| \leq Y_n$ et $||Y_n||_{\mathrm{BMO}} \leq 1$; la suite (Y_n) est faiblement compacte dans BMO, quitte à en extraire une sous-suite elle converge vers une v.a. $Y \in \mathrm{BMO}_+$ pour la topologie $\sigma(\mathrm{BMO}, H^1)$, en particulier, pour tout $B \in \mathcal{F}$, $E(Y_n 1_B) \to E(Y 1_B)$ d'où $|Z| \leq Y$ et comme $||Y||_{\mathrm{BMO}} \leq 1$, $Z \in A$.

On sait alors que $\mathbb{E}_A$ est un espace de Banach.

- On a clairement $||Z||_A = \inf_{\substack{Y \in \mathrm{BMO} \\ |Z| \leq Y}} ||Y||_{\mathrm{BMO}}$ et par conséquent pour tout $Z \in \mathbb{E}_A$ il existe une suite Y_n de v.a. de BMO_+ vérifiant $||Y_n||_{\mathrm{BMO}} \searrow ||Z||_A$; de la suite Y_n on peut extraire une sous-suite convergeant vers une v.a. $Y \in \mathrm{BMO}_+$ pour la topologie $\sigma(\mathrm{BMO}, H^1)$ qui vérifie nécessairement $||Y||_{\mathrm{BMO}} = ||Z||_A$.

Il est d'autre part évident que $\mathbb{E}_A$ est un espace de Banach réticulé solide.

- Montrons que $\mathbb{E}_A$ possède la propriété de Fatou, c'est à dire que si (Z_n) est une suite croissante d'éléments positifs de $\mathbb{E}_A$ vérifiant pour tout n $||Z_n||_A \leq k$, la limite p.s. Z de (Z_n) appartient à $\mathbb{E}_A$ et $||Z_n||_A \to ||Z||_A$:

En effet, il existe une suite (Y_n) de BMO_+ telle que, pour tout n, $Z_n \leq Y_n$ et $||Y_n||_{BMO} = ||Z_n||_A$; pour une sous-suite convenable, (Y_n) converge vers une v.a. $Y \in BMO_+$ pour $\sigma(BMO,H^1)$; on vérifie aisément que $Z \leq Y$, $||Y||_{BMO} = ||Z_n||_A$ et $||Z_n||_A \to ||Z||_A$.

- On observe enfin que $\mathbb{E}_A = \widetilde{BMO}$ et que $\{X | XY \in L^1 \ \forall Y \in \widetilde{BMO}\} = K^1$.

Rappelons le résultat suivant ([5] page 30) : soit $\mathbb{E}$ un espace de Banach de v.a. intégrables, réticulé solide possédant la propriété de Fatou, alors, si on note

$$\mathbb{E}_o^* = \{Y | XY \in L^1 \quad \forall X \in \mathbb{E}\}, \text{ on a } (\mathbb{E}_o^*)_o^* = \mathbb{E}.$$

Comme $(K^1)_o^* = (K^1)'$, la proposition s'en déduit.

Remarque :

Il résulte de la proposition précédente que la norme de $(K^1)'$ est équivalente à la norme $||\cdot||_A$.

② De façon duale, on introduit l'espace

$$BO = \{Y | XY \in L^1, \ \forall X \in H^1\} \quad \text{et l'on pose}$$

$$||Y||_{BO} = \sup_{||X||_{H^1} \leq 1} E|XY|$$

Lemme 7 :

$||\cdot||_{BO}$ est une norme qui fait de BO un espace de Banach réticulé vérifiant $L^\infty \subset BO \subset BMO$, $(X|Y) = E(XY)$ pour tout $X \in H^1$ et $Y \in BO$; de plus

$$||Y||_1 \leq ||Y||_{BMO} \leq ||Y||_{BO} \leq ||Y||_\infty$$

Démonstration :

Soit $Y \in BO$, en tronquant Y et en appliquant le théorème de Banach-Steinhaus on vérifie que l'application $X \to XY$ est une application linéaire continue de H^1 dans L^1; on en déduit que $||Y||_{BO} < \infty$.

On remarque ensuite que :

$$||Y||_{BMO} = \sup_{||X||_{H^1} \leq 1} |E(XY)| \leq \sup_{||X||_{H^1} \leq 1} E(|XY|) = ||Y||_{BO}$$

Enfin, si (Y_n) est une suite de Cauchy de BO, elle est de Cauchy dans BMO, elle converge donc vers une v.a. Y dans BMO et, quitte à en extraire une sous-suite, p.s., on a :

$$\text{si } X \in H^1 \quad E(|XY|) \leq \underline{\lim}\, E(|XY_n|) \leq \underline{\lim}\, ||X||_{H^1} \cdot ||Y_n||_{BO} < \infty \text{ d'où } Y \in BO.$$

D'autre part BO se plonge dans l'espace de Banach des applications linéaires continues de H^1 dans L^1 ; (Y_n) converge dans cet espace et sa limite est nécessairement l'application $X \to XY$. Ce qui montre que $||Y_n - Y||_{BO} \to 0$.

- Le plus gros idéal de L^1 contenu dans BMO s'écrit visiblement $\{Y|\phi Y\in BMO$, pour tout $\phi\in L^\infty\}$, cet ensemble est compris entre BO et BMO ; en fait on a :

Proposition 8 :

$BO = \{Y|\phi Y\in BMO,\ \forall\phi\in L^\infty\} = \{Y|\phi Y\in BMO,\ \forall\phi\in L^\infty$ telle que $|\phi| = 1\}$.

Démonstration :

Soit $Y\in L^1$ telle que $\phi Y\in BMO$ pour toute v.a. ϕ vérifiant $|\phi| = 1$ et soit $X\in H^1$, posons $\phi = \text{signe}(XY)$. On a :

$\phi Y\in BMO$, $X\in H^1$ et $\phi YX \geq 0$, la proposition 2 permet d'en déduire $\phi YX\in L^1$ et par conséquent $Y\in BO$.

On dispose également du résultat symétrique du lemme 5 :

Lemme 9 :

$BO = \{Y\in BMO \mid \text{Sup}\{||\phi Y||_{BMO} \mid \phi$ mesurable par rapport à $\mathcal{F}_n$, $n\in\mathbb{N}$, et $|\phi|\leq 1\} < \infty\}$

Démonstration :

Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des v.a. $\phi\in L^\infty(\mathcal{F}_n)$, $n\in\mathbb{N}$, nous munissons $\mathcal{E}$ de la norme $||\cdot||_\infty$.

Si Y appartient à l'ensemble figurant au second membre de l'égalité du lemme 9, l'application $u : \phi \to \phi Y$ de $\mathcal{E}$ dans BMO est continue, elle se prolonge à l'adhérence $\bar{\mathcal{E}}$ de $\mathcal{E}$ dans L^∞, sa transposée ${}^t u$ est alors fortement continue de $(BMO)'$ dans $(\bar{\mathcal{E}})'$. On observe que H^1 se plonge dans $(BMO)'$ et que L^1 est un sous-espace fermé de $(\bar{\mathcal{E}})'$ puisque si $X\in L^1$ $||X||_1 = \text{Sup}\,\{|E(|X)| \mid \phi\in\mathcal{E}$ telle que $|\phi|\leq 1\}$. Soit $X\in L^\infty$ et $\phi\in\bar{\mathcal{E}}$, on a :

$$({}^t u(X)|\phi)_{(\bar{\mathcal{E}}',\bar{\mathcal{E}})} = (X|u(\phi))_{(BMO,BMO')} = (X|\phi Y) = E(X\phi Y)$$

donc ${}^t u(X) = XY\in L^1$, c'est à dire que ${}^t u(L^\infty)\subset L^1$ et comme L^∞ est dense dans H^1, il en résulte que

$${}^t u(H^1)\subset L^1 \quad \text{et} \quad Y\in BO.$$

Remarques :

1) BO, comme L^∞, n'est pas fermé dans BMO en général ; en effet si BO est fermé dans BMO, les normes BO et BMO sont alors équivalentes et l'application $Y \to E(|X|Y)$ de BO dans $\mathbb{R}$ est prolongeable à BMO pour tout $X\in H^1$, ce qui implique $|X|\in H^1$ puis $BO = BMO$ et L^∞, qui est dense dans BO, devient dense dans BMO ce qui se produit seulement si $H^1 = L^1$ ([2] page 112).

2) BO ressemble donc beaucoup à L^∞ et, dans tous les exemples que nous considérerons plus loin, nous vérifierons que $BO = L^\infty$. Nous ne savons pas montrer une telle égalité en toute généralité. Mokobodzki a montré que si $\mathcal{F}$ est atomique, $BO = L^\infty$ et $\|Y\|_{BO} \geq \frac{1}{2} \|Y\|_\infty$.

③ On introduit maintenant (au moins provisoirement) l'espace

$$J^1 = \{X \mid XY \in L^1,\ \forall X \in BO\}$$

on le munit de la norme d'opérateur $\|X\|_{J^1} = \sup_{\|Y\|_{BO} \leq 1} E(|XY|)$; on a :

Lemme 10 :

- J^1 est un espace de Banach réticulé, $H^1 \subset J^1 \subset L^1$, $\|X\|_1 \leq \|X\|_{J^1} \leq \alpha \|X\|_{K^1}$, pour une constante α ne dépendant que de la filtration
- $BO = \{Y \mid XY \in L^1,\ \forall X \in J^1\}$

Démonstration :

Que J^1 soit un espace de Banach réticulé résulte de [5] page 29 par exemple, $\|X\|_1 = \sup_{\|Y\|_\infty \leq 1} |E(XY)| \leq \sup_{\|X\|_{BO} \leq 1} E(|XY|) = \|X\|_{J^1} \leq \sup_{\|X\|_{BMO} \leq 1} E(|XY|)$ qui est une norme équivalente à $\|X\|_{K^1}$.

Pour montrer que $BO = \{Y \mid XY \in L^1,\ \forall X \in J^1\}$ il suffit, d'après [5] page 30, de vérifier que BO possède la propriété de Fatou c'est à dire que, si (Y_n) est une suite croissante d'éléments pôsitifs de BO bornée en norme BO elle converge vers une v.a. $Y \in BO$ et $\|Y_n\|_{BO} \to \|Y\|_{BO}$.

Or si $X \in J^1_+$ $E(XY) \leq \underline{\lim}\, E(XY_n) \leq \underline{\lim}\, \|X\|_{J^1} \cdot \|Y_n\|_{BO} < \infty$, donc $Y \in BO$.

De plus $\|Y\|_{BO} = \sup_{\|X\|_{H^1} \leq 1} E(|XY|) = \sup_{\|X\|_{H^1} \leq 1} \sup_n E(|XY_n|) = \sup_n \sup_{\|X\|_{H^1} \leq 1} E(|XY_n|)$

$= \lim_n \|Y_n\|_{BO}$.

Remarques :

- Il résulte du lemme précédent que $BO = L^\infty \iff J^1 = L^1$.

- Comme H^1 n'est pas un espace de Riesz, il existe entre H^1 et J^1 de nombreux espaces intéressants, nous n'en considérons ici que deux :

$$|H^1| = \{X \in L^1 \mid |X| = |Z| \text{ pour une v.a. } Z \in H^1\}$$

et
$$\tilde{H}^1 = \{X \in L^1 \mid |X| \leq \sum_{i=1}^{k} |Z_i|,\ k \in \mathbb{N},\ Z_i \in H^1\}.$$

On vérifie que $\tilde{H}^1$ est l'idéal engendré par H^1 et que

$$H^1 \subset |H^1| \subset \tilde{H}^1 \subset J^1 \subset L^1 .$$

Nous ignorons si l'égalité $\tilde{H}^1 = L^1$ est valable en toute généralité bien que nous n'ayons pas réussi à la mettre en défaut, par contre nous savons qu'en général

$$H^1 \neq |H^1| \neq \tilde{H}^1 .$$

Nous examinerons ce point au paragraphe suivant, au préalable nous traitons, comme Jeulin et Yor ([4] page 370), l'exemple pédagogique de [2] pages 112-113.

Exemple :

$(\Omega,\mathcal{F},P)$ est l'espace de Lebesgue, $\mathcal{F}_t = \sigma(]0,1-t[, \mathcal{F} \cap]1-t,1[)$, $t \in]0,1[$

$$H^1 = \{f \in L^1(0,1) \mid t \to \frac{1}{t}\int_0^t f(u)\,du \in L^1\}$$

$$BMO = \{f \in L^1 \mid t \to f(t) - \frac{1}{t}\int_0^t f(u)\,du \in L^\infty\}, \qquad [2]$$

$$K^1 = \{f \in L^1 \mid t \to f(t)\cdot \mathrm{Log}(e/t) \in L^1\}$$

$$(K^1)' = \widetilde{BMO} = \{f \in L^1 \mid t \to \frac{f(t)}{\mathrm{Log}(e/t)} \in L^\infty\}, \qquad [4]$$

On a

Lemme 11 :

Dans cet exemple, $|H^1| = \tilde{H}^1 = J^1 = L^1$ et $BO = L^\infty$

Démonstration :

Soit $f \in L^1_+$, choisissons une suite de réels (x_n) décroissant vers 0, découpons ensuite chacun des intervalles $[x_{n+1},x_n]$ en intervalles $I_{n,i}$ suffisamment petits pour que $\int_{I_{n,i}} f(u)\,du \leq x_{n+1}$; à n fixé, ces intervalles $I_{n,i}$ sont en nombre fini K_n. Construisons maintenant des fonctions $\phi_{n,i}$ valant + 1 ou − 1 et telles que $\int_{I_{n,i}} \phi_{n,i}(u)\, f(u)\,du = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $i \in K_n$.

Il suffit alors de poser $\phi(x) = \sum_{n,i} 1_{I_{n,i}}(x)\, \phi_{n,i}(x)$; on a, si $t \in I_{n,i}$,

$$\left|\frac{1}{t}\int_0^t \phi(u)\, f(u)\,du\right| \leq \frac{1}{x_{n+1}} \int_{I_{n,i}} f(u)\,du \leq 1, \text{ d'où } \phi f \in H^1.$$

Cet exemple possède également la curieuse propriété suivante :

Lemme 12 :

$\forall X \in H^1$, il existe une suite $t_n \nearrow 1$, telle que

i) $X\, 1_{[1-t_n,1[} \to X$ dans H^1

ii) $\forall\, Y \in BMO$ $\quad (X|Y) = \lim\limits_n E[XY\, 1_{[0,t_n[}]$

Démonstration :

Posons $f(t) = \left|\int_0^t X(u)du\right|$, de deux choses l'une

- ou bien il existe $t_n \nearrow 1$ telle que $f(1-t_n) \equiv 0$, auquel cas :

$$E^{t_n}(X) = X\, 1_{[1-t_n,1[} \to X \text{ dans } H^1$$

- ou bien $f(1-t) > 0$ pour tout $t > T$, quitte à changer X en $X\, 1_{]0,1-T]}$ on peut supposer $T = 0$.

Il existe alors une suite $t_n \nearrow 1$ telle que

$$f(1-t_n) \leq f(1-t) \qquad \forall t \leq t_n, \quad \text{on a alors}$$

si $t \geq t_n$: $\quad |E^t(X\, 1_{[1-t_n,1[})| = |X\, 1_{[1-t_n,1[}| \leq |X|$

si $t \leq t_n$: $\quad |E^t(X\, 1_{[1-t_n,1[})| \leq |X|1_{[1-t,1[} + \frac{1}{1-t}[f(1-t) + f(1-t_n)]\, 1_{]0,1-t[}$

$$\leq 2\, X^*$$

d'où $(X\, 1_{[1-t_n,1[})^* \leq 2\, X^*$ pour tout n et comme $X\, 1_{[1-t_n,1[}$ converge vers X dans L^1, le théorème 1 de [2] permet d'en déduire que $X\, 1_{[1-t_n,1[} \to X$ fortement dans H^1.

La propriété ii) en résulte trivialement.

III) Filtrations diffusantes.

Définitions 13 :

a) Une filtration $(\mathcal{F}_n)$ est dite diffusante si $\forall X \in L^\infty$ et $\forall \varepsilon > 0$, il existe deux v.a. ϕ et Z vérifiant $|\phi| = 1$, $Z \geq 0$, $E(Z) \leq \varepsilon$ et telles que

$$(\phi X)^* \leq |X| + Z$$

b) Une filtration $(\mathcal{F}_n)$ est dite faiblement diffusante si $\forall X \in L^\infty$ et $\forall \varepsilon > 0$ il existe une v.a. ϕ vérifiant $|\phi| = 1$ et telle que

$$||\phi X||_{H^1} \leq ||X||_1 + \varepsilon$$

c) Une filtration $(\mathcal{F}_n)$ est dite fortement diffusante si $\forall n$, $\forall X \in L^\infty(\mathcal{F}_n)$, il existe une v.a. ϕ vérifiant $|\phi| = 1$ et telle que

$$(\phi X)^* = |X|$$

Propriétés des filtrations diffusantes.

1) (Communication personnelle de T. Jeulin) ; dans les définitions 13a et 13b, on peut remplacer " $\forall X \in L^\infty$" par "$\forall X = 1_A$ avec $A \in \bigcup_n \mathcal{F}_n$".

Démonstration :

On ne traite que le cas diffusant (13.a), le cas (13.b) étant analogue. Soit $X \in L^\infty$ et $\varepsilon > 0$, choisissons une v.a. X' étagée mesurable par rapport à l'algèbre et telle que $||X'-X||_2 \leq \frac{\varepsilon}{6}$.
Soit ϕ et Z' les v.a., vérifiant $(\phi X')^* \leq |X'| + Z'$ et $E(Z') \leq \frac{\varepsilon}{2}$, dont l'existence est assurée par hypothèse. On a alors :

$$(\phi X)^* \leq (\phi X')^* + |X'-X|^* \leq |X| + |X'-X| + |X'-X|^* + Z'$$

et $\qquad Z = |X'-X| + |X'-X|^* + Z'$ vérifie $E(Z) \leq \varepsilon$ (inégalité de Doob)

2) Dans les 3 définitions précédentes, on peut remplacer "$\forall X \in L^\infty$" par "$\forall X \in L^1$"

Démonstration :

On ne traite que le cas faiblement diffusant, les autres cas étant analogues. Soit $X \in L^1_+$ et $\varepsilon > 0$, posons $X_n = X\, 1_{\{n \leq X < n+1\}}$, choisissons (ε_n) de sorte que $\sum_n \varepsilon_n = \varepsilon$, appelons ϕ_n la v.a. associée à X_n, ε_n vérifiant :

$$||\phi_n X_n||_{H^1} \leq ||X_n||_1 + \varepsilon_n$$

posons $\phi = \sum_n \phi_n 1_{\{n \leq X < n+1\}}$, on a :

$$||\phi X||_{H^1} \leq \sum_n ||\phi_n X_n||_{H^1} \leq \sum_n ||X_n||_1 + \varepsilon = ||X||_1 + \varepsilon.$$

3) Dans les définitions 13, c) $\Longrightarrow$ a) $\Longrightarrow$ b) (cf. propriété 1)

4) Si $(\mathcal{F}_n)$ est faiblement diffusante :

$$|H^1| = \tilde{H}^1 = J^1 = L^1 \quad \text{et} \quad BO = L^\infty \qquad \text{(cf. propriété 2)}$$

Remarque :

- L'expression "la filtration $(\mathcal{F}_n)$ est diffusante" est impropre (mais commode) en effet les définitions 13 font intervenir la propabilité P de façon cruciale ; nous avons d'ailleurs choisi l'adjectif diffusant précisément parce qu'il évoquait à la fois une propriété de mesure et de "filtre".

Exemples de filtrations diffusantes.

1) La filtration de l'exemple de [2] considérée à la fin du paragraphe II est fortement diffusante, on a même :

$\forall f \in L^1$ et $\forall \varepsilon > 0$, il existe une v.a. ϕ à valeurs $\{-1,+1\}$ vérifiant:

$$(\phi f)^* \leq |f| + \varepsilon$$

Démonstration :

Le même argument que celui donné dans la démonstration du lemme 11 montre que si $f \in L^1$ et $\varepsilon > 0$, on peut trouver une v.a. ϕ à valeurs $\{-1,+1\}$ vérifiant :

$$\left|\frac{1}{t}\int_0^t \phi(u)\ f(u)du\right| \leq \varepsilon \quad \text{pour tout} \quad t \in]0,1], \text{ il en résulte :}$$

$$|E^t(\phi f)| = \left|\frac{1}{1-t}\int_0^{1-t} \phi(u)\ f(u)du\right| 1_{]0,1-t[} + |f|\ 1_{]1-t,1[}$$

$$\leq |f| + \varepsilon$$

2) Les filtrations naturelles des p.a.i. sont fortement diffusantes.

Démonstration :

Soit $X \in L^1_+(\mathcal{F}_t)$ et soit ϕ une variable à valeurs $\{-1,+1\}$, mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}_{(t,\infty)}$ des accroissements après t et d'espérance nulle,

on a : $E[\phi X|\mathcal{F}_u] = X\ E[\phi|\mathcal{F}_u]$ si $u > t$

$$= E(\phi)\ E[X|\mathcal{F}_u] = 0 \quad \text{si} \quad u \leq t$$

d'où $(\phi X)^* \leq X$ et par conséquent $(\phi X)^* = X$; on conclut en utilisant la propriété 1).

3) Si $\mathcal{F}$ est une tribu non-atomique et si, pour tout n, $\mathcal{F}_n$ est engendrée par un nombre fini d'atomes, la filtration $(\mathcal{F}_n)$ est fortement diffusante.

Démonstration :

Soit $X \in L^\infty(\mathcal{F}_N)$, on a : $|E^n(\phi X)| = |X| \cdot |E^n(\phi)| \leq |X|$ pour tout $n \geq N$ et toute v.a. ϕ à valeurs $\{-1,+1\}$.

Choisissons maintenant ϕ de sorte que $E^N(\phi X) = 0$, ce qui est possible sous les hypothèses considérées, on a donc :

$E^n(\phi X) = 0$ pour tout $n \leq N$, ce qui achève la démonstration.

- A l'opposé des filtrations diffusantes, il existe des filtrations qui maintiennent autour de H^1 des espaces résiduels de martingales ; c'est en particulier le cas lorsque la tribu finale $\mathcal{F}$ est atomique, nous détaillons ce point sur un exemple.

Nous supposons jusqu'à la fin de ce paragraphe que $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, P est une probabilité chargeant tous les entiers et $\mathcal{F}_n = \sigma(\{0\}, \{1\}, \ldots, \{n-1\})$.

Il est clair que ce type de filtrations n'est pas diffusant, il est, cependant, suffisamment régulier pour que l'idéal engendré par H^1 soit L^1 tout entier :

Proposition 14 :

$$\tilde{H}_1 = L^1$$

Démonstration :

Soit $X \in L^1_+(\mathbb{N},P)$, nous allons montrer que $X \leq |Z_1| + |Z_2|$ avec Z_1 et $Z_2 \in H^1$

Posons pour $n \geq 0$, $\begin{cases} Z_1(2n) = X(2n) \\ Z_1(2n+1) = -\dfrac{X(2n)}{P(2n+1)}\, P(2n) \end{cases}$ et $\begin{cases} Z_2(2n) = -\dfrac{X(2n+1)}{P(2n)}\, P(2n+1) \\ Z_2(2n+1) = X(2n+1) \end{cases}$

Il est clair que Z_1 et $Z_2 \in L^1$ et que $X \leq |Z_1| + |Z_2|$.

On vérifie aisément que $Z_i^* \leq |Z_i| + \sup\limits_n \dfrac{X(n)\,P(n)}{P([n,\infty))}\, 1_{[n,\infty)}$, i = 1 et 2.

Posons $\alpha_n = \dfrac{X(n)\,P(n)}{P([n,\infty))}$ et considérons la suite (éventuellement finie) (α_{n_i}) des records successifs de la suite (α_n) : $\alpha_{n_i} \geq \alpha_k$ pour $n_i \leq k < n_{i+1}$.

On a $E(\sup\limits_n \alpha_n 1_{[n,\infty)}) \leq \sum\limits_i \alpha_{n_i} P([n_i,n_{i+1}[) \leq \sum\limits_{n_i} X(n_i) \leq E(X)$ et par conséquent Z_1 et Z_2 appartiennent à H^1.

- Cependant, en général, l'espace $|H^1|$ est plus petit que L^1 :

Proposition 15 :

Il existe des probabilités P telles que $|H^1| \neq L^1$

Démonstration :

Choisissons $P(n) = \frac{1}{2^{n+1}}$ et considérons la v.a. $X \in L^1_+$ définie par

$$X(n) = \begin{cases} \frac{1}{q!\,2^{q!}} & \text{si } n \text{ est de la forme } q! \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit ϕ une fonction quelconque de $\mathbb{N}$ dans $\{-1,+1\}$, on vérifie que si $(q-1)! < n \leq q!$, on a :

$$(\phi X)^*(n) \geq |E^n \phi X|(n) \geq \left|\frac{1}{q!} + o\left(\frac{1}{q!}\right)\right| 2^{n+1} - X(n).$$

D'où visiblement $E(\phi X)^* = \infty$.

IV) Filtrations régulières.

Une filtration $(\mathcal{F}_n)$ est dite régulière, si pour tout n, $\mathcal{F}_n$ est engendrée par un nombre fini d'atomes et s'il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout $X \in L^1_+$ et tout n

$$E^n(X) \leq c\, E^{n-1}(X) \qquad [7], [3].$$

Dans ce paragraphe, nous considérons une filtration régulière $(\mathcal{F}_n)$ et nous supposons, en outre, que $\mathcal{F}_o$ est triviale.

Soit $X \in L^1_+$ on a :

outre l'inégalité maximale (qui est toujours vraie) :

$$(1) \quad t\, P\{X^* > t\} \leq \int_{\{X^*>t\}} X\, dP$$

l'inégalité maximale inverse, [3] p. 86-88

$$(2) \quad \int_{\{X^*>t\}} X\, dP \leq t\, P[X^* > t] + E(X)\, 1_{\{t < E(X)\}}.$$

Soit U, une fonction de Young, c'est à dire une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, croissante, convexe, nulle en 0, et de densité u infinie à l'infini, nous convenons de choisir toujours la version continue à gauche de u. Nous notons v l'inverse continue à gauche de u, la conjuguée V de U est la primitive nulle en 0 de v, c'est une fonction de Young vérifiant $V\mathrm{o}u(x) = xu(x) - U(x)$.

En intégrant les deux inégalités précédentes par rapport à la mesure $du(t)$ il vient :

$$(1') \quad E[V\mathrm{o}u(X^*)] \leq E[u(X^*)\cdot X]$$

$$(2') \quad E[Xu(X)] \leq E[V\mathrm{o}u(X^*)] + E(X)\, u[E(X)]$$

qui impliquent à leur tour :

$$(1'') \quad E[V\mathrm{o}u\, (\tfrac{X^*}{2})] \leq E[U(X)], \qquad \text{voir } [3], [7]$$

$$(2'') \quad E[U(X)] \leq E[V\mathrm{o}u(X^*)] + E(X)\, u[E(X)]$$

On note $L^U = \{X \in L^1 \mid \exists\, \rho \text{ tel que } E[U(\frac{|X|}{\rho})] < \infty\}$ l'espace d'Orlicz associé à U, on le munit de la norme de Luxemburg

$$||X||_{(U)} = \inf\{\rho > 0 \mid E[U(\frac{|X|}{\rho})] < \infty\}$$

On introduit en outre les espaces

$$\mathbf{H}^U = \{X \in L^1 \mid X^* \in L^U\} \text{ que l'on munit de la norme } ||X||_{\mathbf{H}^U} = ||X^*||_{(U)}$$

et $$K^U = \{X \in L^1 \mid |X| \in \mathbf{H}^U\} \text{ muni de la norme } ||X||_{K^U} = |||X|||_{\mathbf{H}^U}.$$

On vérifie que $\mathbb{H}^U$ et K^U sont des espaces de Banach et que K^U est un espace de Banach réticulé, convexe pour l'ordre dès que L^U l'est aussi (c'est-à-dire ([1]) lorsque U est modérée).

Rappelons, [1] lemme 15, que si U est une fonction de Young, il existe une fonction de Young U_1, "dominant" U et vérifiant

$U = V_1 o u_1$, dans lequel V_1 et u_1 désignant la conjuguée et la densité de U_1.

Les inégalités (1") et (2") montrent alors :

Lemme 16 :

$$K^U = L^{U_1}$$

Exemples :

- Si $U(x) = x$, on a $U_1(x) = x \operatorname{Log}^+ x$ et par conséquent

$$\mathbb{H}^U = H^1, \qquad K^U = K^1 = L \operatorname{Log} L \quad \text{et} \quad \widetilde{\text{BMO}} = (K^1)' = e^L.$$

- Si $U(x) = x \operatorname{Log}^+ x$, on a $U_1(x) = x(\operatorname{Log}^+ x)^2$ et par conséquent
$\mathbb{H}^U$ = "HLogH" et $K^U = L(\operatorname{Log} L)^2$ cf. [1].

etc.....

Le théorème 18 de [1] montrent maintenant :

Proposition 17 :

Les énoncés suivants sont équivalents :

(i) U est comodérée

(ii) $L^U = \mathbb{H}^U = K^U$

Enfin, en remarquant que toute filtration régulière est diffusante (exemple 3), on obtient avec des notations évidentes et en supposant U modérée, de sorte que $(L^U)' = L^V$ (seul cas intéressant) :

Proposition 18 :

- Soit $\varepsilon > 0$ et $X \in L^U_+$, il existe deux v.a. ϕ et Z, vérifiant $|\phi| = 1$ et $||Z||_{(U)} \leq \varepsilon$, telles que

$$(\phi X)^* \leq X + Z$$

$$BO(U) = L^V \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbb{H}}^U = J^U = L^U = |\mathbb{H}^U|.$$

BIBLIOGRAPHIE :

[1] B.BRU et H. HEINICH : Isométries positives et propriétés ergodiques de quelques espaces de Banach, à paraître aux Annales de l'I.H.P. (1980).

[2] C. DELLACHERIE, P.A. MEYER et M. YOR : Sur certaines propriétés des espaces de Banach H^1 et BMO, Séminaire de Probabilités XII, Lecture Notes in Math. 649, Springer Verlag, 1978.

[3] A. GARSIA : Martingale Inequalities, Benjamin, Reading Mass. 1973.

[4] T. JEULIN et M. YOR : Sur l'expression de la dualité entre H^1 et BMO, Séminaire de Probabilitiés XIII, Lecture Notes in Math 721, Springer Verlag, 1979.

[5] J. LINDENSTAUSS et L. TZAFRIRI : Classical Banach Spaces II, Springer Verlag, 1979.

[6] W.A.J. LUXEMBURG et A.C. ZAANEN : Riesz Spaces I, North-Holland, Amsterdam Londres, 1971.

[7] J. NEVEU : Discrete Parameter Martingales, North Holland, Amsterdam Londres, 1975.

COMPLEMENT A L'EXPOSE PRECEDENT.

SUR UN RESULTAT DE M.TALAGRAND.

par J.C.LOOTGIETER.

Sous l'hypothèse que les σ-algèbres $\mathcal{F}_n$ soient dénombrablement engendrées, M.Talagrand vient de démontrer le résultat suivant ([1]) :

Théorème : Pour toute fonction h réelle mesurable sur $(\Omega,\mathcal{F},P)$, l'on a :

(1) $\|h\|_\infty \leq 2 \sup\{E(|hf|):\|f\|_{H^1} \leq 1\}$.

Ce théorème assure en particulier que $BO=L^\infty$. La démonstration de (1) que nous proposons, différente de celle de M.Talagrand, est remarquablement simple et ne nécessite pas que les σ-algèbres $\mathcal{F}_n$ soient dénombrablement engendrées.

Démonstration : Comme le souligne M.Talagrand dans [1], il suffit de se limiter au cas où $h=1_A$ avec $P(A)>o$; ~~nous~~ convenons que "$B\in\mathcal{F}_n$" signifie que $B\in\mathcal{F}_n$ à un ensemble $(\mathcal{F},P)$ négligeable près. Le cas où $A\in\mathcal{F}_o$ est trivial (prendre $f=1_A/P(A)$). Supposons dorénavant que $A\notin\mathcal{F}_o$. Fixons $\varepsilon, o<\varepsilon<1$, et introduisons, pour tout $n\geq 0$, l'ensemble

$$C_n=\{E^n(1_A)\geq 1-\varepsilon\}.$$

Considérons, pour tout $n\geq 0$, l'entier $m(n)$ défini par

$$m(n)= \inf\{m:C_n\in\mathcal{F}_m\}.$$

Il est clair que $o\leq m(n)\leq n$; comme, suivant un argument de martingale, $C_n\to A$ presque-sûrement et que, par hypothèse, $A\notin\mathcal{F}_o$, on voit qu'il existe un n_o tel que $m(n_o)>0$. La définition de $m(n_o)$ assure que $E(|1_{C_{n_o}} - E^{m(n_o)-1}(1_{C_{n_o}})|> 0$;

posons alors

$g=1_{C_{n_o}} -E^{m(n_o)-1}(1_{C_{n_o}})$, puis $f = g/E(|g|)$.

Il est clair que $E(f)=0$ et $E(|f|)=1$, d'où $E(f^+)=1/2$; il va de soi que f^+ coïncide avec f sur C_{n_o} et est égale à 0 sur $\Omega\setminus C_{n_o}$. D'autre part, comme

$C_{n_o}\in\mathcal{F}_{m(n_o)}$, on voit que

$$E^n(f)=\begin{cases} 0 & \text{si } n<m(n_o), \\ f & \text{si } n\geq m(n_o). \end{cases}$$

Par suite $\|f\|_{H^1}=1$. Enfin, on a successivement :

$E(1_A|f|)= E(E^{n_o}(1_A)|f|)$ (puisque f est $\mathcal{F}_{n_o}$-mesurable),

$\geq(1-\varepsilon)E(1_{C_{n_o}}|f|)$ (suite à la définition des C_n),

$\geq \frac{1-\varepsilon}{2}$ (suite aux considérations sur f^+)

N.B. L'extension de l'inégalité (1) au cas d'une filtration $\{\mathcal{F}_t, t\in T\}$ (T désignant un intervalle de $\underline{R}$) croissante et continue à droite est, à nôtre connaissance, ouverte.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] M.TALAGRAND : Sur l'espace H^1 (manuscrit).

Note de la rédaction : Nous regrettons vivement de n'avoir pu inclure ici, pour des raisons d'ordre pratique, ce travail de Talagrand, qui paraîtra sans doute au Séminaire de Théorie du Potentiel.