SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

C. MÉTRAUX

Quelques inégalités pour martingales à paramètre bidimensionnel

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 12 (1978), p. 170-179
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__170_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités

QUELQUES INEGALITES POUR MARTINGALES A PARAMETRE BIDIMENSIONNEL

par C. Métraux

Soient (Ω,F,P) un espace de probabilité et $\{F_{m,n}, m,n\geq o\}$ une famille croissante de sous-tribus de F telle que $F_{m,n}=\{\phi,\Omega\}$ si $m = o$ ou $n = o$. Nous désignerons, pour tout $m,n \geq o$, par $F_{m,\infty}$, respectivement $F_{\infty,n}$, les tribus $\bigvee_{n=o}^{\infty} F_{m,n}$ et $\bigvee_{m=o} F_{m,n}$.

Nous dirons qu'un processus $f = \{f_{m,n}, m,n\geq 1\}$ est une martingale si, pour tout $m,n \geq 1$, la variable aléatoire $f_{m,n}$ est $F_{m,n}$-mesurable et intégrable et si, pour tout $n \geq 1$ fixé, $\{f_{m,n}, m\geq 1\}$ est une martingale relative à la famille $\{F_{m,\infty}, m\geq 1\}$ et, pour tout $m \geq 1$ fixé, $\{f_{m,n}, n\geq 1\}$ est une martingale relative à la famille $\{F_{\infty,n}, n\geq 1\}$.

Dans le cas où la famille $\{F_{m,n}, m,n\geq o\}$ satisfait l'hypothèse d'indépendance conditionnelle (F4) de [4], notre notion de martingale coïncide avec la notion usuelle de martingale relative à la relation d'ordre: $(m,n) \leq (p,q)$ si $m \leq p$ et $n \leq q$.

Dans cet article, nous étendrons au cas des martingales ainsi définies quelques inégalités dues à D.L. Burkholder (cf. [1]).

Si f est une martingale, nous poserons, pour tout $m,n \geq 1$,

$$d_{m,n} = f_{m,n} - f_{m-1,n} - f_{m,n-1} + f_{m-1,n-1} ,$$

avec la convention que $f_{m,n} = o$ si $m = o$ ou $n = o$.

Nous poserons également, pour tout $m,n \geqslant 1$,

$$S_{m,n}(f) = (\sum_{k=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{n} d_{k,\ell}^2)^{\frac{1}{2}} .$$

<u>Théorème 1</u>. Soit f une martingale. Si $p > 1$, il existe deux constantes positives C_p et D_p ne dépendant pas de f telles que, pour tout $m,n \geqslant 1$,

$$(1) \qquad C_p\, E[S_{m,n}(f)^p] \leqslant E[|f_{m,n}|^p] \leqslant D_p\, E[S_{m,n}(f)^p]$$

<u>Démonstration</u>. Montrons d'abord que, pour tout $m,n \geqslant 1$,

$$(2) \qquad E[|g_{m,n}|^p] \leqslant C_p\, E[|f_{m,n}|^p] ,$$

où $g_{m,n} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{n} u_k v_\ell\, d_{k,\ell}$, $u = \{u_k, k \geqslant 1\}$ et $v = \{v_\ell, \ell \geqslant 1\}$ étant deux suites bornées de nombres réels, et où C_p désigne une constante positive non nécessairement la même que celle de l'énoncé.

Nous commençons par remarquer que $\{g_{m,n}, m \geqslant 1\}$ est la transformée de Burkholder de la martingale ordinaire $\{h_{m,n} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{n} v_\ell d_{k,\ell} , m \geqslant 1\}$ par la suite u est que $\{h_{m,n}, n \geqslant 1\}$ est la transformée de Burkholder de $\{f_{m,n}, n \geqslant 1\}$ par la suite v. D'où, en appliquant l'inégalité de D.L. Burkholder (cf. démonstration du théorème 9 de [1]) deux fois successivement, nous obtenons, pour tout $m,n \geq 1$,

$$E[|g_{m,n}|^p] \leq M_p \; E[|h_{m,n}|^p] \; ,$$

ainsi que

$$E[|h_{m,n}|^p] \leq M_p \; E[|f_{m,n}|^p] \; .$$

L'inégalité (2) s'ensuit.

A partir de cette inégalité, la suite de la démonstration est analogue à celle qu'a donnée D.L. Burkholder (cf. théorème 9 de [1]) et utilise les inégalités de Khintchine (cf.[6] p.257) suivantes: si $\{a_{k,\ell}\ , k,\ell \geq 1\}$ est une suite de nombres réels et si $r_k(s)$, $r_\ell(t)$, $k,\ell \geq 1$, sont les fonctions de Rademacher sur $[0,1]$, alors nous avons, pour tout $p \geq 0$,

$$(3) \quad A_p\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{k,\ell}^2\Big)^{p/2} \leq \int_0^1 \int_0^1 \Big|\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{k,\ell} r_k(s) r_\ell(t)\Big|^p \, ds dt$$

$$\leq B_p \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{k,\ell}^2\Big)^{p/2} ,$$

où A_p et B_p sont deux constantes positives.

Soit f une martingale et $v = \{v_{m,n}\ , m,n \geq 1\}$ un processus tel que $v_{m,n}$ est $\mathcal{F}_{m-1,n-1}$ -mesurable pour tout $m,n \geq 1$ et que $\sup_{m,n \geq 1} |v_{m,n}| \leq 1$. Nous appellerons transformée de Burkholder de f par v la martingale $g = \{g_{m,n}\ , m,n \geq 1\}$ définie, pour tout $m,n \geq 1$, par

$$g_{m,n} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{n} v_{k,\ell} d_{k,\ell} \; .$$

Théorème 2. Soit f une martingale et g la transformée de Burkholder de f par v. Si $p > 1$, il existe une constante positive C_p ne dépendant pas de f telle que, pour tout $m,n \geq 1$,

$$(4) \qquad E[\sup_{m,n\geq 1} |g_{m,n}|^p] \leq C_p \sup_{m,n\geq 1} E[|f_{m,n}|^p] .$$

Démonstration. En appliquant l'inégalité de Doob (cf.[3]) à la martingale g, nous obtenons

$$E[\sup_{m,n\geq 1} |g_{m,n}|^p] \leq A_p \sup_{m,n\geq 1} E[|g_{m,n}|^p] ,$$

où A_p est une constante positive ne dépendant pas de g.

En remarquant que, suite à l'hypothèse $\sup_{m,n\geq 1} |v_{m,n}| \leq 1$, $S_{m,n}(g) \leq S_{m,n}(f)$ pour tout $m,n \geq 1$, nous obtenons, à l'aide des inégalités (1), pour tout $m,n \geq 1$,

$$E[|g_{m,n}|^p] \leq D_p E[S_{m,n}(g)^p] \leq D_p E[S_{m,n}(f)^p],$$

ainsi que

$$E[S_{m,n}(f)^p] \leq \frac{1}{C_p} E[|f_{m,n}|^p] .$$

L'inégalité (4) du théorème s'ensuit.

Théorème 3. Soit f une martingale. Il existe deux constantes positives C et D ne dépendant pas de f telles que, pour tout $m,n \geq 1$,

$$(5) \qquad E[S_{m,n}(f)] \leq C\, E[|f_{m,n}| \log_+^2 |f_{m,n}|] + D$$

(6) $$E[|f_{m,n}|] \leq C\ E[S_{m,n}(f)\log_+^2 S_{m,n}(f)] + D$$

Demonstration. En utilisant les mêmes notations et la même technique que dans le début de la démonstration du théorème 1, nous obtenons, pout tout $m,n \geq 1$,

(7) $$E[|g_{m,n}|] \leq C\ E[|f_{m,n}|\log_+^2|f_{m,n}|] + D$$

où C et D désignent deux constantes non nécessairement les mêmes que celles de l'énoncé du théorème.

A partir de cette inégalité, la suite de la démonstration est analogue à celle qu'a donnée D.L. Burkholder (cf. théorème 10 de [1]). Elle utilise l'inégalité (3), avec $p = 1$, pour la démonstration de (5) et l'inégalité suivante pour la démonstration de (6): si $\{a_{k,\ell}\ , k,\ell \geq 1\}$ est une suite de nombres réels et si $r_k(s)$, $r_\ell(t)$, $k,\ell \geq 1$, sont les fonctions de Rademacher sur $[0,1]$, alors nous avons, pour tout $m,n \geq 1$,

(8) $$\int_0^1\int_0^1 [|\sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell} r_k(s) r_\ell(t)|\log_+^2|\sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell} r_k(s) r_\ell(t)|]\ dsdt$$
$$\leq A(\sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}^2)^{\frac{1}{2}} \log_+^2 (\sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell}^2)^{\frac{1}{2}} + A\ ,$$

où A est une constante positive.

Les inégalités (5) et (7) sont les meilleures possibles en ce sens que la puissance 2 du $\log_+$ ne peut être abaissée. Les contre-exemples suivants sont inspirés de l'article de D.L. Burkholder.

Sur l'ensemble des entiers positifs muni de la probabilité P définie par

$$P(k) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}, \quad k \geq 1,$$

nous considérons la martingale $\{f_n, n\geq 1\}$ définie par

$$f_n(k) = \begin{cases} -1 & \text{si } k \leq n, \\ n & \text{si } k > n, \end{cases} \qquad k,n \geq 1.$$

Cette martingale est bornée dans L^1, car

$$\sup_{n\geq 1} E[|f_n|] \leq \sup_{n\geq 1} \frac{2n}{n+1} = 2,$$

mais elle n'est pas bornée dans $L \log_+ L$, car

$$\sup_{n\geq 1} E[|f_n| \log_+ |f_n|] = \sup_{n\geq 1}\left(\frac{n}{n+1} \log n\right) = \infty .$$

Nous noterons $\{g_n, n\geq 1\}$ la transformée de Burkholder de $\{f_n, n\geq 1\}$ par la suite de constantes $\{v_n = (-1)^{n-1}, n \geq 1\}$.

Sur l'ensemble des couples d'entiers positifs muni de la probabilité P définie par

$$P(k,\ell) = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\left(\frac{1}{\ell} - \frac{1}{\ell+1}\right), \quad k,\ell \geq 1,$$

considérons maintenant la martingale $f = \{f_{m,n}, m,n \geq 1\}$ définie par

$$f_{m,n}(k,\ell) = f_m(k) f_n(\ell), \quad k,\ell,\ m,n \geq 1,$$

ainsi que la transformée $g = \{g_{m,n}, m,n \geq 1\}$ de f par $v = \{v_{m,n} = (-1)^{m-1}(-1)^{n-1}, m,n \geq 1\}$.

Nous avons, pour tout $k,\ell, m,n \geq 1$,

$$g_{m,n}(k,\ell) = g_m(k)g_n(\ell) .$$

Calculons successivement $E[|f_{m,n}|\log_+^p|f_{m,n}|]$ pour $p > 2$, $E[S_{m,n}(f)]$ et $E[|g_{m,n}|]$.

Nous avons tout d'abord

$$|f_m(k)f_n(\ell)|\log_+^p|f_m(k)f_n(\ell)| = \begin{cases} o & \text{si } k \leq m, \ell \leq n, \\ n\log_+^p n & \text{si } k \leq m, \ell > n, \\ m\log_+^p m & \text{si } k > m, \ell \leq n, \\ mn\log_+^p(mn) & \text{si } k > m, \ell > n, \end{cases}$$

et

$$E[|f_{m,n}|\log_+^p f_{m,n}|] = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{\infty}|f_m(k)f_n(\ell)|\log_+^p|f_m(k)f_n(\ell)|\ P(k,\ell) .$$

La somme sur $k \leq m$ et $\ell \leq n$ nous donne o, celle sur $k \leq m$ et $\ell > n$

$$n \log_+^p n \sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=n+1}^{\infty} P(k,\ell) = \frac{m}{m+1}\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)n \log_+^p n ,$$

celle sur $k > m$ et $\ell \leq n$

$$m \log_+^p m \sum_{k=m+1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{n} P(k,\ell) = \left(1 - \frac{m}{m+1}\right)\frac{n}{n+1}\ m \log_+^p m ,$$

et enfin celle sur $k > m$ et $\ell > n$

$$mn \log_+^p(mn) \sum_{k=m+1}^{\infty} \sum_{\ell=n+1}^{\infty} P(k,\ell) = (1-\frac{m}{m+1})(1-\frac{n}{n+1})\ mn \log_+^p(mn)\ .$$

Nous en déduisons que

$$E[|f_{m,n}| \log_+^p |f_{m,n}|] = \frac{mn}{(m+1)(n+1)} [\log_+^p n + \log_+^p m + \log_+^p mn]\ .$$

Si $m = n$, le 2ème membre est majoré par $(2+2^p)\log^p n$.

Nous avons ensuite

$$E[S_{m,n}(f)] = \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\sqrt{k^2+k-1}}{k^2+k} + \frac{\sqrt{m}}{m+1}\right)\left(\sum_{\ell=1}^{m} \frac{\sqrt{\ell^2+\ell-1}}{\ell^2+\ell} + \frac{\sqrt{n}}{n+1}\right)\ .$$

Le premier terme du produit est minoré par $\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k+1}$; quant au second, il est minoré par $\sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell+1}$.

Par conséquent, si $m = n$, $E[S_{m,n}(f)]$ est minoré par une quantité qui se comporte asymptotiquement comme $\log^2 n$.

Nous avons pour terminer

$$E[|g_{m,n}|] = E[|g_m|]\ E[|g_n|]\ ,$$

avec, lorsque n est pair, $n = 2q$,

$$E[|g_{2q}|] = \sum_{\ell=1}^{q} \frac{1}{2\ell(2\ell+1)} + \sum_{\ell=1}^{2q} \frac{1}{\ell+1}$$

et lorsque n est impair, $n = 2q + 1$,

$$E[|g_{2q+1}|] = \sum_{\ell=1}^{q} \frac{1}{2\ell(2\ell+1)} + \sum_{\ell=1}^{2q+1} \frac{1}{\ell+1} + \sum_{\ell=2q+2}^{\infty} \frac{1}{\ell(\ell+1)}\ .$$

Dans les deux cas nous remarquons que $E[|g_n|]$ est minoré par $\sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell+1}$. Par conséquent, si $m = n$, $E[|g_{m,n}|]$ est minoré par une quantité qui se comporte asymptotiquement comme $\log^2 n$. En conclusion, les inégalités (5) et (7) sont en défaut lorsque $p < 2$ et $m = n$ assez grand car les membres de gauche se comportent comme $\log^2 n$ alors que les membres de droite se comportent comme $\log^p n$.

Remarquons pour terminer que le procédé d'itération utilisé dans les démonstrations qui précèdent permet d'obtenir d'autres inégalités, par exemple la suivante, due à D.L. Burkholder, B.J. Davis et R.F. Gundy [2]. La formulation que nous en donnerons est celle qui figure dans le livre de A.M. Garsia [5]. L'hypothèse (F4) est supposée satisfaite.

<u>Théorème 4</u>. Soit $\{a_{m,n}, m,n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires positives et $\Phi(u)$ une fonction convexe sur $[o,\infty[$ telle que

$$p = \sup_{u>o} \frac{u\Phi'(u)}{\Phi(u)} < \infty .$$

Nous avons alors

$$(9)\quad E[\Phi(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} E[a_{k,\ell}|F_{k-1,\ell-1}])] \leq p^{2(p+1)} E[\Phi(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{k,\ell})].$$

Si f est une martingale en posant

$$S(f) = (\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} d_{k,\ell}^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \sigma(f) = (\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} E[d_{k,\ell}^2|F_{k-1,\ell-1}])^{\frac{1}{2}}$$

et en remplaçant, dans le théorème 4, $a_{k,\ell}$ par $d_{k,\ell}^2$, ainsi que p par p/2, il résulte que

$$(10) \qquad E[\Phi(\sigma(f))] \leq \left(\frac{p}{2}\right)^{p+2} E[\Phi(S(f))] .$$

Un cas particulier important est celui où $\Phi(u) = u^p$ pour $p \geq 2$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D.L. Burkholder: Martingale transforms, Ann. Math. Stat.37, 1966, p.1494 - 1504.

[2] D.L. Burkholder, B.J. Davis, R.F. Gundy: Integral inequalities for convex functions of operators on martingales, Proc. of 6th Berkeley Symposium.

[3] R. Cairoli: Une inégalité pour martingale à indices multiples et ses applications, Sém. de Prob. IV, Univ. de Strasbourg, Springer, Berlin 1970, p.1 - 27.

[4] R. Cairoli, J.B. Walsh: Stochastic integrals in the plane, Acta Mathematica 134, 1975, p.111 - 183.

[5] A.M. Garsia: Martingale inequalities, Seminar notes on recent progress, W.A. Benjamin, 1973.

[6] R. Paley: A remarquable serie of orthogonal functions I, Proc. London Math. Soc. 34, 1931, p.241 - 264.

Département de Mathématiques
Ecole Polytechnique Fédérale
Avenue de Cour 61
1007 Lausanne, Suisse

Adresse actuelle:

Ecole d'Ingénieurs
de l'Etat de Vaud
Route de Cheseaux 1
1401 Yverdon, Suisse