DOMINIQUE LÉPINGLE

Sur la représentation des sauts des martingales

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 11 (1977), p. 418-434

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1977__11__418_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1976/77

SUR LA REPRESENTATION DES SAUTS DES MARTINGALES

par D. LEPINGLE

Récemment, divers auteurs ([3], [4]) ont cherché à représenter les martingales discontinues comme intégrales stochastiques par rapport à une mesure aléatoire à valeurs entières. Il faut alors intégrer non plus des fonctions sur $\Omega \times \mathbb{R}_+$, mais des fonctions sur $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^*$, "prévisibles" au sens où elles sont mesurables par rapport à $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^*)$, où $\mathcal{P}$ est la tribu prévisible. En fait, ainsi qu'il a été remarqué dans [5], il s'agit plus ou moins d'intégrales stochastiques optionnelles au sens de [6].

En utilisant en partie l'intégration optionnelle, nous allons reprendre un problème abordé dans [4] à l'aide des mesures aléatoires : si l'on se donne une martingale locale M et un ensemble D de $\Omega \times \mathbb{R}_+$ optionnel à coupes dénombrables, comment peut-on décomposer M en une martingale locale purement discontinue dont les instants de saut sont contenus dans D et une martingale locale continue sur D ? En général, le problème n'admet pas de solution, mais nous allons décrire ce qui se passe et obtenir ainsi plusieurs décompositions intéressantes de M.

1. NOTATIONS ET RAPPELS

Les notations, définitions et propriétés utilisées dans les paragraphes suivants sont tirées de[2] et [6]. Nous rappelons ici quelques points particuliers.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé complet muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq o}$ satisfaisant aux hypothèses habituelles de continuité à droite et de complétude. Nous ne distinguerons pas les ensembles évanescents de la partie vide de $\Omega \times \mathbb{R}_+$. Les martingales locales que nous rencontrerons seront toutes supposées pour simplifier <u>nulles en t = o</u>, à trajectoires réelles continues à droite et pourvues de limites à gauche. Nous poserons

$$\Delta M_t = 0 \qquad \text{si } t = 0 \text{ ou } t = \infty$$

$$\Delta M_t = M_t - M_{t-} \qquad \text{si } 0 < t < \infty.$$

Nous utiliserons les trois espaces de Banach de martingales définis par les conditions

$$M \in \underline{\underline{M}} \quad \text{si } (E\,[(M_\infty)^2]\,)^{1/2} < \infty$$

$$M \in \underline{\underline{W}} \quad \text{si } E\,[\int_o^\infty |dM_s|\,] < \infty$$

$$M \in \underline{\underline{H}}^1 \quad \text{si } E\,[[M,M]_\infty^{1/2}] < \infty$$

avec les normes indiquées. Rappelons que $\underline{\underline{M}} \subsetneq \underline{\underline{H}}^1$, $\underline{\underline{W}} \subsetneq \underline{\underline{H}}^1$, et que toute martingale locale est localement dans $\underline{\underline{M}} + \underline{\underline{W}}$, donc dans $\underline{\underline{H}}^1$.

De la théorie de l'intégrale stochastique optionnelle nous retiendrons notamment que $\| H . M \|_{\underline{\underline{H}}^1} \leq c\, E\,[(\int_o^\infty H_s^2\, d[M, M]_s)^{1/2}\,]$

$$(H . M)^c = H . M^c$$

$$\Delta(H . M)_T = H_T\, \Delta M_T - E\,[H_T\, \Delta M_T | \mathcal{F}_{T-}] \quad \text{si T est un temps prévisible}$$

$$\Delta(H . M)_T = H_T\, \Delta M_T \quad \text{si T est un temps totalement inaccessible.}$$

Nous dirons que deux martingales locales M et N sont orthogonales si leur produit MN est une martingale locale. Nous dirons que M et N sont fortement orthogonales si pour tous processus bornés optionnels H et K, nous avons $[H.M, K.N] = 0$ (voir [7]).

Si X est un processus mesurable positif, il existe un processus prévisible positif unique, appelé projection prévisible de X et noté $\dot{X}$, tel que pour tout temps d'arrêt prévisible T,

$$E[\dot{X}_T \; 1_{\{T<\infty\}}] = E[X_T \; 1_{\{T<\infty\}}],$$

et alors

$$\dot{X}_T \; 1_{\{T<\infty\}} = E[X_T \; 1_{\{T<\infty\}} | \mathcal{F}_{T-}].$$

Cette définition s'étend naturellement aux processus mesurables tels que $\dot{\widehat{|X|}}$ soit fini. On vérifie que pour tout processus Y prévisible, si $\dot{X}$ existe,

$$\dot{\widehat{XY}} = \dot{X}Y ;$$

par conséquent, pour tout temps d'arrêt S,

$$\dot{\widehat{X^S}} = \dot{X} \text{ sur } [\![0, S]\!] .$$

Enfin, nous dirons qu'une partie D de $\Omega \times \mathbb{R}_+$ est mince si pour tout $\omega \in \Omega$, l'ensemble $\{t : (\omega,t) \in D\}$ est dénombrable. Si D est une partie mince optionnelle, il existe une partition unique de D en D_1 et D_2 telle que

- D_1 est réunion dénombrable de graphes disjoints de temps d'arrêt totalement inaccessibles;
- D_2 est accessible et contenu dans un ensemble mince prévisible, ce dernier étant réunion dénombrable de graphes disjoints de temps d'arrêt prévisibles ; D_2 est appelé la partie accessible de D.

Voici un exemple de partie mince optionnelle : l'ensemble $\{X \neq \dot{X}\}$, où X est un processus optionnel de projection prévisible $\dot{X}$.

2. LE PROCESSUS DES SAUTS D'UNE MARTINGALE LOCALE

Nous allons pour commencer caractériser les processus qui représentent les sauts des martingales locales en établissant une proposition démontrée indépendamment par C.-S. Chou [1]. Comme notre formulation est un peu différente, nous en donnons la démonstration.

PROPOSITION 1. *Soit* X *un processus mesurable. Pour qu'on puisse lui associer une martingale locale* M *vérifiant* $\Delta M = X$, *il faut et il suffit que*

a/ X *soit optionnel*

b/ $\dot{X} = 0$

c/ $(\sum_{s\leq t} X_s^2)^{1/2}$ *soit localement intégrable.*

PREUVE.

i/ Montrons la nécessité. C'est clair pour a/, car M et M_- sont optionnels.

Si M est uniformément intégrable et si T est prévisible,

$$E\left[\Delta M_T \; 1_{\{T<\infty\}} | \mathcal{F}_{T-}\right] = E\left[\Delta M_T | \mathcal{F}_{T-}\right] = 0,$$

d'où $\dot{\widehat{\Delta M}} = 0$, ce qui est encore vrai par arrêt pour toute martingale locale. Enfin, $(\sum_{s\leq t} \Delta M_s^2)^{1/2}$ est majoré par $[M, M]_t^{1/2}$, processus localement intégrable.

ii/ Supposons X optionnel et $\dot{X} = 0$. En considérant pour tout $A \in \mathcal{F}_0$ le temps d'arrêt prévisible T_A nul sur A, infini sur A^c, il vient

$$E\left[X_0 \; 1_A\right] = E\left[\dot{X}_0 \; 1_A\right] = 0,$$

d'où $X_0 = 0$. L'ensemble $\{X \neq \dot{X}\} = \{X \neq 0\}$ est mince optionnel ; il existe donc une suite (S_q) de temps d'arrêt totalement inaccessibles de graphes disjoints et une suite (R_p) de temps d'arrêt prévisibles de graphes disjoints telles que

$$\{X \neq 0\} \subset (\bigcup_q [\![S_q]\!]) \cup (\bigcup_p [\![R_p]\!]).$$

Supposons que

$$E\left[\left(\sum_t X_t^2\right)^{1/2}\right] < \infty \qquad ;$$

pour tout $q \geqslant 1$, notons $M^{1,q}$ la martingale compensée du processus $X_{S_q} 1_{\{S_q \leqslant t\}}$ et pour tout $p \geqslant 1$, notons $M^{2,p}$ la martingale $X_{R_p} 1_{\{R_p \leqslant t\}}$. Alors, pour tout $n \geqslant 1$, la somme

$$\sum_{q=1}^{n} M^{1,q} + \sum_{p=1}^{n} M^{2,p}$$

est une martingale à variation intégrable, et quand n tend vers l'infini ces martingales convergent dans $\underline{H}^1$ vers une martingale M purement discontinue M, somme compensée de ses sauts $\Delta M = X$. Dans le cas général où $\left(\sum_{s\leqslant t} X_s^2\right)^{1/2}$ est localement intégrable, nous obtenons par arrêt et recollement une martingale locale purement discontinue unique telle que $\Delta M = X$.

3. LES SAUTS D'UNE MARTINGALE SUR UN ENSEMBLE

Donnons-nous maintenant une martingale locale M et un ensemble mince optionnel D quelconques. Pouvons-nous trouver une décomposition $M = N + N'$ qui sépare les sauts de M sur D et les sauts de M en dehors de D ?

a/ <u>Une condition nécessaire et suffisante</u>

PROPOSITION 2. *Soient* M *une martingale locale et* D *un ensemble mince optionnel de partie accessible* D_2. *Pour qu'il existe deux martingales locales* N *et* N' *de somme* M, *où* N *a ses instants de saut contenus dans* D *et où* N' *est continue sur* D, *il faut et il suffit que*

$$\overset{\bullet}{\widehat{1_D\ \Delta M}} = \overset{\bullet}{\widehat{1_{D_2}\ \Delta M}} = 0,$$

et alors la décomposition est unique si l'on impose à N *d'être purement discontinue.*

PREUVE. Nous devons avoir

$$1_D\ \Delta M = 1_D\ \Delta N = \Delta N,$$

d'où d'après la proposition 1 la condition nécessaire et suffisante

$$\overset{\bullet}{\widehat{1_D\ \Delta M}} = 0.$$

Si $D = D_1 \cup D_2$ et si T est prévisible, $1_{D_1}(T) = 0$, par conséquent

$\overset{\bullet}{\widehat{1_{D_1}\ \Delta M}} = 0$; la condition se ramène ainsi à $\overset{\bullet}{\widehat{1_{D_2}\ \Delta M}} = 0$.

Voici deux cas où la condition est réalisée :

- D_2 est prévisible ;
- ΔM est nul sur D_2.

Nous allons maintenant nous placer dans le cas général où $\widehat{\dot{1}_D \Delta M} = \widehat{\dot{1}_{D_2} \Delta M}$ n'est pas nécessairement nul. Nous obtiendrons alors plusieurs décompositions différentes $M = N + N'$ ayant chacune leur intérêt.

b/ Première décomposition

DEFINITION. On appelle somme compensée des sauts de la martingale locale M sur l'ensemble mince optionnel D l'intégrale stochastique optionnelle $N = 1_D \cdot M$.

Des propriétés de l'intégration optionnelle il résulte que N est une martingale locale purement discontinue et que

$$\Delta N = 1_D \, \Delta M - \widehat{\dot{1}_D \, \Delta M}.$$

Cette martingale locale est obtenue de façon très simple, mais en général les sauts de M ne sont pas contenus dans D, et de même $N' = M - N$ n'est pas continue sur D. Essayons cependant de circonscrire l'ensemble $\{\Delta N \neq 0\}$.

PROPOSITION 3. *Si* D *est un ensemble mince accessible, l'ensemble* $\hat{D} = \{\hat{\dot{1}}_D > 0\}$ *est un ensemble mince, et c'est le plus petit ensemble prévisible contenant* D.

PREUVE. Il existe une suite (T_n) de temps d'arrêt prévisibles à graphes disjoints tels que $D \subset \bigcup_n [\![T_n]\!]$. Si, pour tout n, S_n est le temps d'arrêt prévisible défini par $[\![S_n]\!] = [\![T_n]\!] \cap \hat{D}^c$, alors

$$D \cap \hat{D}^c \subset \bigcup_n [\![S_n]\!].$$

De l'égalité

$$E\left[1_D(S_n)\right] = E\left[\dot{1}_D(S_n)\; 1_{\{S_n < \infty\}}\right] = 0$$

nous tirons $[\![S_n]\!] \cap D = \emptyset$, donc $D \subset \hat{D}$. Si F est un ensemble prévisible contenant D et T un temps d'arrêt prévisible tel que $[\![T]\!] \subset F^c \cap \hat{D}$, alors

$$E\left[\dot{1}_D(T)\; 1_{\{T < \infty\}}\right] = E\left[1_D(T)\right] = 0,$$

d'où $P(T < \infty) = 0$, ce qui entraîne d'après le théorème de section des ensembles prévisibles que $\hat{D}$ est contenu dans F. Enfin, il suffit de choisir $F = \bigcup_n [\![T_n]\!]$ pour voir que D est mince.

Revenant au cas où D est mince optionnel et $D = D_1 \cup D_2$, posons $\hat{D} = D_1 \cup \hat{D}_2$.

PROPOSITION 4. *Si* N *est la somme compensée des sauts de* M *sur* D, *alors* $\{\Delta N \neq 0\} \subset \hat{D}$.

PREUVE. Le complémentaire $\hat{D}_2^{\,c}$ de $\hat{D}_2$ étant prévisible, il en résulte que

$$1_{\hat{D}_2^{\,c}} \; \widehat{\dot{1}_{D_2} \Delta M} = \widehat{\dot{1_{\hat{D}_2^{\,c}} \; 1_{D_2} \Delta M}} = 0,$$

donc $\widehat{\dot{1}_D \Delta M}$ et ΔN sont nuls sur $\hat{D}^c \subset \hat{D}_2^{\,c}$.

c/ Deuxième décomposition

Nous avons remarqué que la compensation des sauts de M sur D est simple si D_2 est prévisible. Il est alors tentant de remplacer D_2 par $\hat{D}_2$, d'où une deuxième décomposition.

PROPOSITION 5. *Soient* M *une martingale locale et* D *un ensemble mince optionnel. L'intégrale stochastique optionnelle* $N = 1_{\hat{D}}.M$ *a ses instants de saut contenus dans* $\hat{D}$ *, elle est purement discontinue et fortement orthogonale à toutes les martingales locales continues sur* $\hat{D}$*, ce qui est en particulier le cas de* $N' = M - N$.

PREUVE. Comme $\hat{D}_2$ est prévisible,

$$\Delta N = 1_{\hat{D}} \Delta M$$

$$\Delta N' = 1_{\hat{D}^c} \Delta M.$$

Si H et K sont deux processus optionnels bornés, H.N est purement discontinue et

$$\begin{aligned}\Delta (H.N) &= H \ \Delta N - \widehat{\dot{H\Delta N}} \\ &= 1_{\hat{D}} H \Delta M - 1_{\hat{D}_2} \widehat{\dot{H \ \Delta M}}\end{aligned}$$

et par conséquent H.N a ses instants de saut contenus dans $\hat{D}$; de même, les instants de saut totalement inaccessibles de K.N' sont contenus dans les instants de saut totalement inaccessibles de N', donc dans $\hat{D}^c$, tandis que les instants de saut prévisibles de K.N' sont contenus dans l'ensemble prévisible $\hat{D}_2{}^c$, donc dans $\hat{D}^c = \hat{D}_2^c \setminus D_1$. Cela entraîne l'orthogonalité forte (voir la remarque 3 de [7]).

d/ Troisième décomposition

Nous allons maintenant voir une troisième décomposition $M = N + N'$; c'est celle à laquelle parvient Jacod dans [4]. Elle est plus complexe que les précédentes, mais dotée d'une belle propriété d'orthogonalité.

PROPOSITION 6. *Soient* M *une martingale locale et* D *un ensemble mince optionnel. La martingale locale purement discontinue* N *déterminée par le processus de ses sauts*

$$\Delta N = 1_D\,\Delta M + 1_{D^c}\,\frac{\overset{\bullet}{\widehat{1_{D^c}\,\Delta M}}}{\dot{1}_{D^c}}$$

est orthogonale à toutes les martingales locales localement bornées continues sur D , *et* $N' = M - N$ *est continue sur* D. *Si* M *est de carré intégrable,* N' *est la projection de* M *sur le sous-espace stable des martingales de carré intégrable continues sur* D.

PREUVE. i/ Donnons tout d'abord un sens à l'expression ΔN ci-dessus en montrant que $\overset{\bullet}{\widehat{1_{D^c}\,\Delta M}} = 0$ sur $\{\dot{1}_{D^c} = 0\}$.

Soit T un temps d'arrêt prévisible tel que

$$[\![T]\!] \subset \{\dot{1}_{D_2{}^c} = 0\}.$$

Nous avons

$$E\left[1_{D_2{}^c}(T)\right] = 0,$$

donc $[\![T]\!] \subset D_2$ et $\overset{\bullet}{\widehat{1_{D_2{}^c}\,\Delta M}}(T) = 0$. L'ensemble

$$\{\overset{\bullet}{\widehat{1_{D_2{}^c}\,\Delta M}} \neq 0\} \cap \{\dot{1}_{D_2{}^c} = 0\}$$

ne contient aucun graphe non vide de temps d'arrêt prévisible, et le théorème de section nous permet de conclure qu'il est vide. On en déduit le résultat cherché si l'on remarque en outre que

$$\overset{\bullet}{\widehat{1_{D_1}\,\Delta M}} = \dot{1}_{D_1} = 0.$$

ii/ Calculons la projection prévisible de l'expression donnée ΔN

$$\widehat{\dot{\Delta N}} = \widehat{1_D \dot{\Delta M}} + \dot{1}_{D^c} \frac{\widehat{1_{D^c}\dot{\Delta M}}}{\dot{1}_{D^c}}$$

$$= \widehat{\dot{\Delta M}} = 0.$$

iii/ Remarquons que

$$\widehat{1_{D^c}\dot{\Delta M}} = \widehat{1_{D_2^c}\dot{\Delta M}} = 1_{\widehat{D}_2}\,\widehat{1_{D_2^c}\dot{\Delta M}} + \widehat{1_{\widehat{D}_2^c}\dot{\Delta M}} = 1_{\widehat{D}_2}\,\widehat{1_{D^c}\dot{\Delta M}}$$

Nous en déduisons que $\{\Delta N \neq 0\} \subset \widehat{D}$.

iv/ Vérifions que $(\sum_{s \leq t} \Delta N_s^2)^{1/2}$ est localement intégrable. Il n'y a pas de problème pour

$$(\sum_{s\leq t} 1_{D_1}(s)\ \Delta N_s^2)^{1/2} = (\sum_{s\leq t} 1_{D_1}(s)\ \Delta M_s^2)^{1/2}.$$

Pour $(\sum_{s\leq t} 1_{D_2}(s)\ \Delta N_s^2)^{1/2}$, nous savons que M est localement dans $\underline{\underline{M}} + \underline{\underline{W}}$.

Si $M \in \underline{\underline{M}}$ et si T est prévisible,

$$\Delta N_T^2 = 1_D(T)\ \Delta M_T^2 + 1_{D^c}(T) \left(\frac{E\,[1_{D^c}(T)\ \Delta M_T \mid \mathcal{F}_{T-}]}{E\,[1_{D^c}(T) \mid \mathcal{F}_{T-}]} \right)^2$$

$$\leq 1_D(T)\ \Delta M_T^2 + 1_{D^c}(T) \frac{E\,[1_{D^c}(T)\ \Delta M_T^2 \mid \mathcal{F}_{T-}]}{E\,[1_{D^c}(T) \mid \mathcal{F}_{T-}]}$$

d'où

$$E\,[\Delta N_T^2 \mid \mathcal{F}_{T-}] \leq E\,[\Delta M_T^2 \mid \mathcal{F}_{T-}]$$

et si $\widehat{D}_2$ est la réunion disjointe des $[\![R_p]\!]$,

$$E\,[\sum_t 1_{\widehat{D}_2}(t)\ \Delta N_t^2] = E\,[\sum_p \Delta N_{R_p}^2] \leq E\,[M_\infty^2] < \infty.$$

Si $M \in \underline{W}$ et si T est prévisible,

$$E\ [|\Delta N_T|\ |\mathcal{F}_{T-}] \leq E\ [|\Delta M_T|\ |\mathcal{F}_{T-}]$$

$$E\ [\sum_t 1_{\hat{D}_2}(t)\ |\Delta N_t|\ ] = E\ [\sum_p |\Delta N_{R_p}|] \leq E\ [\sum_t |\Delta M_t|] < \infty\ .$$

Si M est dans $\underline{M} + \underline{W}$, nous obtenons ainsi que

$$(\sum_t 1_{\hat{D}_2}(t)\ \Delta N_t^2)^{1/2}$$

est intégrable. Nous avons donc prouvé qu'il existe une martingale locale N purement discontinue dont les sauts sont ceux de la formule donnant ΔN, et elle est unique.

v/ Si $N' = M - N$, l'égalité

$$\Delta N' = \Delta M - 1_D\ \Delta M - 1_{D^c} \frac{\widehat{1_{D^c}\ \Delta M}}{\dot{1}_{D^c}}$$

nous permet de vérifier que N' est continue sur D.

vi/ Soit N" une martingale bornée continue sur D. Vérifions que $[N, N'']_t = \sum_{s \leq t} \Delta N_s\ \Delta N''_s$ est une martingale locale, ce qui entraînera l'orthogonalité de N et N". Comme $[N, N'']$ est purement discontinu et a ses instants de saut prévisibles, il suffit de vérifier que $\Delta N\ \Delta N''$ représente les sauts d'une martingale locale. Or

$$\widehat{\Delta N\ \Delta N''} = \frac{\widehat{1_{D^c}\ \Delta M}}{\dot{1}_{D^c}}\ \widehat{1_{D^c}\ \Delta N''} = 0,$$

et si N" est bornée par K,

$$(\sum_{s \leq t} \Delta N_s^2\ (\Delta N''_s)^2)^{1/2} \leq 2\ K\ (\sum_{s \leq t} \Delta N_s^2)^{1/2},$$

ce dernier membre étant localement intégrable d'après iv/.

vii/ Si M est dans $\underline{\underline{M}}$, la démonstration du iv/ montre que N est aussi dans $\underline{\underline{M}}$, ainsi que $\dot{M} - N = N'$. Si N" est dans $\underline{\underline{M}}$ et continue sur D, alors comme en vi/ $\widehat{\Delta N \;\; \Delta N''} = 0$, et l'inégalité

$$E \;[\sum_t |\Delta N_t \;\; \Delta N''_t|] \leq (E\;[\sum_t \Delta N_t^2])^{1/2} \;\; (E\;[\sum_t (\Delta N''_t)^2]\;)^{1/2} < \infty$$

montre que $[N, N'']$ est une martingale à variation intégrable ; cela prouve que N est orthogonale à toutes les martingales de $\underline{\underline{M}}$ continues sur D, et en particulier à N'.

e/ Deux autres décompositions

Nous avons obtenu les deux dernières décompositions en élargissant l'ensemble D à $\hat{D}$. Nous arrivons à des résultats tout à fait analogues en restreignant l'ensemble D, et les démonstrations sont laissées au lecteur.

PROPOSITION 7. *Si* D *est un ensemble mince accessible, l'ensemble* $\check{D} = \{\dot{1}_{D^c} = 0\}$ *est le plus grand ensemble prévisible contenu dans* D, *et il est mince.*

Lorsque D est un ensemble mince optionnel, nous posons $\check{D} = D_1 \cup \check{D}_2$.

PROPOSITION 8. *Soient* M *une martingale locale et* D *un ensemble mince optionnel. Si* N *est la somme compensée des sauts de* M *sur* D *et si* $N' = M - N$, *alors* $\{\Delta N' \neq 0\} \cap \check{D} = \emptyset$.

PROPOSITION 9. *Sous les mêmes hypothèses, l'intégrale stochastique optionnelle* $N = 1_{\check{D}} \cdot M$ *a ses instants de saut contenus dans* $\check{D}$, *elle est purement discontinue et fortement orthogonale à toutes les martingales locales continues sur* $\check{D}$, *ce qui est en particulier le cas de* $N' = M - N$.

PROPOSITION 10. *Sous les mêmes hypothèses, la martingale locale purement discontinue* N *déterminée par le processus de ses sauts*

$$\Delta N = 1_D \, \Delta M - 1_D \, \frac{\widehat{\dot{1}_D \Delta M}}{\dot{1}_D}$$

est continue en dehors de D, *et* $N' = M - N$ *est orthogonale à toutes les martingales locales purement discontinues localement bornées continues en dehors de* D. *Si* M *est de carré intégrable,* N *est la projection de* M *sur le sous-espace stable des martingales de carré intégrable purement discontinues en dehors de* D.

f/ <u>Un cas particulier</u>

Il est naturel de regarder ce qu'il advient lorsque $D = \{\Delta M \neq 0\}$.

PROPOSITION 11. *Si* $D = \{\Delta M \neq 0\}$, *toutes les décompositions précédentes, à l'exception de celle où* $N = 1_{\check{D}} \cdot M$, *coïncident avec la décomposition suivante :*

$$N = M^d \quad \textit{partie purement discontinue de } M$$

$$N' = M^c \quad \textit{partie continue de } M \ .$$

PREUVE. En effet,

$$\overset{\bullet}{\widehat{1_D \Delta M}} = - \overset{\bullet}{\widehat{1_{D^c} \Delta M}} = 0,$$

d'où pour les quatre décompositions

$$\Delta N = 1_D \ \Delta M = 1_{\hat{D}} \Delta M = \Delta M.$$

g/ Un exemple

Regardons sur un exemple élémentaire en quoi les trois premières décompositions peuvent différer. Soient

$$\Omega = \{\omega_1, \ \omega_2, \ \omega_3\}$$

$$\mathcal{F}_t = (\emptyset, \Omega) \qquad \text{pour } 0 \leqslant t < 1$$

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{P}(\Omega) \qquad \text{pour } t \geqslant 1$$

$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = P(\{\omega_3\}) = \frac{1}{3}.$$

$$M_t = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t < 1$$

$$= a \ 1_{\{\omega_1\}} + b \ 1_{\{\omega_2\}} + c \ 1_{\{\omega_3\}} \quad \text{pour } t \geqslant 1,$$

avec $a\, b\, c \neq 0$, $a + b + c = 0$. Prenons $D = \{\omega_1\} \times \{1\}$. Alors D est accessible et $\hat{D} = \Omega \times \{1\}$. Nous obtenons pour $t \geq 1$:

- première décomposition $N_t = \frac{2\,a}{3}\, 1_{\{\omega_1\}} - \frac{a}{3}\, 1_{\{\omega_2,\omega_3\}}$

- deuxième décomposition $N_t = 0$

- troisième décomposition $N_t = a\; 1_{\{\omega_1\}} + \frac{b + c}{2}\; 1_{\{\omega_2,\omega_3\}}$

B I B L I O G R A P H I E

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

[1] C.-S. CHOU. Notes sur les intégrales stochastiques. VII. Le processus des sauts d'une martingale locale. Séminaire de Probabilités XI.

[2] C. DELLACHERIE. Capacités et processus stochastiques. Springer 1972

[3] N. EL KAROUI et J.P. LEPELTIER. Représentation des processus ponctuels multivariés à l'aide d'un processus de Poisson. A paraître.

[4] J. JACOD. Un théorème de représentation pour les martingales discontinues Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 34, 225-244 (1976)

[5] J. JACOD et M. YOR. Etude des solutions extrémales et représentation intégrale des solutions pour certains problèmes de martingales. A paraître.

[6] P.-A. MEYER. Un cours sur les intégrales stochastiques. Séminaire de Probabilités X. Lecture Notes n° 511. Springer 1976.

[7] M. PRATELLI. Espaces fortement stables de martingales de carré intégrable. Séminaire de Probabilités X. Lecture Notes n° 511. Springer 1976.