SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

C. DOLÉANS-DADE
PAUL-ANDRÉ MEYER

Une caractérisation de *BMO*

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 11 (1977), p. 383-389
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1977__11__383_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1975/76

UNE CARACTERISATION DE $\underline{\underline{\mathrm{BMO}}}$

par C. Doléans-Dade et P.A. Meyer

Ce travail est étroitement lié à un autre article fait en commun, où nous étudions les "inégalités de normes avec poids" pour les martingales continues à droite, et qui paraîtra ultérieurement. Nous étendons ici aux martingales continues à droite un critère d'appartenance à $\underline{\underline{\mathrm{BMO}}}$ établi par KAZAMAKI [2] pour les martingales continues. Au lieu de le présenter sous la forme d'une "condition de MUCKENHOUPT", nous l'énonçons ainsi : pour qu'une martingale locale M appartienne à $\underline{\underline{\mathrm{BMO}}}$, il faut et il suffit que l'exponentielle stochastique $\mathcal{E}(\lambda M)$ soit, pour λ assez petit en valeur absolue, un processus strictement positif et multiplicativement borné.

NOTATIONS ET RAPPELS

Soit $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ un espace probabilisé complet, muni d'une famille croissante $(\underline{\underline{F}}_t)_{t\geq 0}$ de sous-tribus de $\underline{\underline{F}}$, satisfaisant aux conditions habituelles (la famille est continue à droite, et $\underline{\underline{F}}_0$ contient tous les ensembles P-négligeables).

Soit M une martingale locale nulle en 0 . L'équation intégrale stochastique $Z_t = 1 + \lambda\int_0^t Z_{s-}dM_s$ admet, pour tout λ réel, une solution unique $Z=\mathcal{E}(\lambda M)$ dont l'expression explicite est bien connue

$$(1) \qquad Z_t = \exp(\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2}\langle M^c,M^c\rangle_t) \prod_{s\leq t} (1+\lambda\Delta M_s)e^{-\lambda\Delta M_s}$$

Si nécessaire, nous écrirons Z_t^λ pour mettre en évidence le rôle de λ.

Désignons par m la norme $\|M\|_{\underline{\underline{\mathrm{BMO}}}}$, de sorte que l'on a

$$(2) \qquad E[[M,M]_{T-}^{\infty}|\underline{\underline{F}}_T] \leq m^2 \text{ pour tout temps d'arrêt } T$$

(noter l'abréviation pour $[M,M]_\infty-[M,M]_{T-}$, qui sera utilisée plus loin). Le processus $|\Delta M_s|=|M_s-M_{s-}|$ est borné par m. Rappelons aussi l'inégalité de JOHN-NIRENBERG ([1], p.79 ; voir aussi [3], p.348, mais la constante n'y est pas donnée explicitement[1])

1. La constante 8 de [1] est relative à la norme $\underline{\underline{\mathrm{BMO}}}_1$, plus petite que la norme usuelle. Elle vaut à plus forte raison pour celle-ci.

(3) Si $m=\|M\|_{\underline{\underline{BMO}}} < 1/8$, on a $E[e^{M^*}] \leqq \frac{1}{1-8m}$

Comme d'habitude, M^* désigne $\sup_t |M_t|$.

Nous utiliserons aussi les inégalités suivantes relatives à la fonction exponentielle

(4) $$\frac{1}{e}x^2 \leqq e^x-1-x \leqq (e-2)x^2 \quad \text{si } |x|\leqq 1$$

Voir [4], p.67 . En fait, l'inégalité de gauche vaut pour $x\geqq -1$, celle de droite pour $x\leqq 1$.

Enfin, rappelons la définition des processus multiplicativement bornés, extraite de l'article sur les inégalités de normes avec poids .

DEFINITION. <u>Soit</u> (X_t) <u>un processus adapté strictement positif, à trajectoires càdlàg. Nous disons que</u> (X_t) <u>est multiplicativement borné s'il existe une constante</u> K <u>telle que</u>

(5a) $\frac{1}{K} \leqq \frac{X_{s-}}{X_s} \leqq K$ <u>hors d'une partie évanescente de</u> $]0,\infty[\times\Omega$

(5b) $\frac{1}{K}X_s \leqq E[X_t|\underline{\underline{F}}_s] \leqq KX_s$ <u>p.s.</u> $(s\leqq t)$

(5c) $\frac{1}{KX_s} \leqq E[\frac{1}{X_t}|\underline{\underline{F}}_s] \leqq K\frac{1}{X_s}$ <u>p.s.</u> $(s\leqq t)$

Nous introduisons aussi dans la note VI la condition suivante, où θ est un nombre réel $\neq 0$

(6) b_θ : $\frac{1}{K}X_s \leqq E[X_t^\theta|\underline{\underline{F}}_s]^{1/\theta} \leqq KX_s$ <u>p.s.</u>

de sorte que (5b) est la condition b_1 , et (5c) la condition b_{-1} . Et nous montrons divers petits résultats, par exemple que si pour t fixé b_θ est satisfaite p.s. pour chaque $s\leqq t$, alors on a pour tout couple (S,T) de temps d'arrêt, tel que $S\leqq T\leqq t$

(7) $$\frac{1}{K^2}X_S \leqq E[X_T^\theta|\underline{\underline{F}}_S]^{1/\theta} \leqq K^2X_S \text{ p.s.}$$

Les processus que nous considérerons plus loin auront une limite à l'infini, et nous nous bornerons alors à vérifier (5b), (5c) ou (6) pour les couples de la forme (s,∞), et à appliquer (7).

Nous montrons dans l'autre article (n°5) que si un processus $(X_t)_{0\leqq t\leqq\infty}$ est multiplicativement borné, alors la martingale $(E[X_\infty|\underline{\underline{F}}_t])$ l'est également.

EXEMPLES DE PROCESSUS MULTIPLICATIVEMENT BORNES

Avant de nous occuper de l'exponentielle stochastique, donnons des exemples plus classiques.

1. Soit M une martingale locale nulle en 0, telle que $m=\|M\|_{\underline{\underline{BMO}}} < \infty$. et soit $X_t=e^{\lambda M_t}$. Montrons que X est multiplicativement borné si $|\lambda|$ est assez petit (inversement, si cette propriété est satisfaite pour une valeur de λ, on peut montrer que M appartient à $\underline{\underline{BMO}}$: voir la note VI, n°8). Il en résultera aussi que la martingale $E[X_\infty|\underline{\underline{F}}_t]$ est un processus multiplicativement borné pour $|\lambda|$ assez petit.

i) Nous savons que $|M_s-M_{s-}|\leqq m = \|M\|_{\underline{\underline{BMO}}}$. Donc X_s/X_{s-} est compris entre e^{-m} et e^m, et la condition (5a) est satisfaite.

ii) Les fonctions $e^{\lambda x}$, $e^{-\lambda x}$ sont convexes. Par conséquent si $s\leqq t\leqq+\infty$

$$e^{\pm\lambda M_s} \leqq E[e^{\pm\lambda M_t}|\underline{\underline{F}}_s] \text{ p.s.}$$

Nous avons donc les deux moitiés gauches de (5b), (5c).

iii) L'inégalité (3) de John-Nirenberg nous dit que pour $|\lambda|<1/8m$

$$E[\exp(|\lambda|\sup_{r\geqq s}|M_r-M_s|)|\underline{\underline{F}}_s] \leqq C = \frac{1}{1-8m|\lambda|}$$

Nous avons donc aussi

$$E[\,e^{\pm\lambda(M_t-M_s)}|\underline{\underline{F}}_s] \leqq C$$

ce qui nous donne les deux moitiés droites de (5b), (5c).

2. De même, nous allons montrer que le processus $e^{\lambda[M,M]_t}$ est multiplicativement borné si $|\lambda|$ est assez petit. Les sauts de $[M,M]$ étant bornés par m^2, la condition (5a) est satisfaite comme ci-dessus. Les conditions (5b) et (5c) seront établies si nous prouvons pour $\lambda>0$ assez petit

$$\exp(\lambda[M,M]_s) \leqq E[\exp(\lambda[M,M]_t)|\underline{\underline{F}}_s] \leqq K\exp(\lambda[M,M]_s)$$
$$K\exp(-\lambda[M,M]_s) \leqq E[\exp(-\lambda[M,M]_t)|\underline{\underline{F}}_s] \leqq \exp(-\lambda[M,M]_s)$$

L'inégalité de gauche de la première ligne et celle de droite sur la seconde ligne résultent de la croissance de [M,M]. Il est facile de déduire le côté gauche de la seconde ligne du côté droit de la première, grâce à la convexité de la fonction 1/x. Ainsi, tout découle du lemme suivant, un peu plus fort que la moitié droite de la première ligne :

LEMME 1. <u>Si</u> $0<\lambda<1/m^2$ <u>on a pour tout temps d'arrêt</u> T

(8) $$E[\exp(\lambda[M,M]^\infty_{T-})|\underline{\underline{F}}_T] \leqq 1/(1-\lambda m^2) \text{ \underline{p.s.}}\,.$$

DEMONSTRATION. Quitte à remplacer M par $\lambda^{1/2}M$, on se ramène au cas où $\lambda=1$, $m<1$. Nous ne supposons pas ici que $M_0=0$. Considérons le processus croissant $A_t=[M,M]_t$ ($A_{0-}=0$, $A_0=M_0^2$). L'appartenance de M à $\underline{\underline{BMO}}$ s'écrit

$$E[A_\infty - A_{T-}|\underline{\underline{F}}_T] \leqq m^2 \text{ pour tout temps d'arrêt } T$$

et il est alors bien connu que l'on a ([3], n° 23-24 p. 346)

$$E[A_\infty^p|\underline{\underline{F}}_0] \leqq m^{2p}\, p! \quad \text{donc } E[\exp(A_\infty)|\underline{\underline{F}}_0] \leqq 1/1-m^2$$

C'est à dire (8) lorsque $T=0$. Pour passer de là au cas général, on applique ce qui précède à la martingale $M'_t=M_{T+t}-M_{T-}$, par rapport à la famille de tribus $\underline{\underline{F}}'_t=\underline{\underline{F}}_{T+t}$ et à la loi P' obtenue par restriction de P à $\{T<\infty\}$.

REMARQUE. Inversement, si pour un $\mu>0$ on a

$$E[\exp(\mu([M,M]_\infty-[M,M]_{T-}))|\underline{\underline{F}}_T] \leqq c \quad \text{pour tout } T$$

alors M appartient à $\underline{\underline{BMO}}$. En effet, d'après l'inégalité de Jensen

$$E[[M,M]_\infty-[M,M]_{T-}|\underline{\underline{F}}_T] \leqq \frac{1}{\mu}\log E[\exp(\mu([M,M]_\infty-[M,M]_{T-}))|\underline{\underline{F}}_T]$$
$$\leqq (\log c)/\mu \ .$$

PARTIE DIRECTE

THEOREME 1. Soit M une martingale nulle en 0, telle que $m=\|M\|_{\underline{\underline{BMO}}} < 1/8$. Alors $Z=\mathcal{E}(\lambda M)$ est un processus strictement positif et multiplicativement borné si $|\lambda|<1/2$.

Tout d'abord, nous avons $|\Delta M| \leqq m$, donc Z est strictement positive pour $|\lambda|<8$, et le rapport $Z_s/Z_{s-} = (1+\lambda\Delta M_s)e^{-\lambda\Delta M_s}$ est borné supérieurement et inférieurement pour $|\lambda|<8$.

Nous vérifions ensuite (5b). Z est une martingale locale positive, et l'inégalité $e^x\geqq 1+x$ pour tout x entraîne que tous les facteurs du produit infini dans (1) sont compris entre 0 et 1. Nous avons donc

$$0 \leqq Z_t \leqq \exp(|\lambda M_t|) \leqq \exp(|\lambda|M^*)$$

D'après l'inégalité de JOHN-NIRENBERG (3), si $|\lambda|\leqq 1$ la v.a. $e^{|\lambda|M^*}$ est intégrable, la martingale locale (Z_t) est donc dominée dans L^1, c'est donc une vraie martingale, et (5b) est vraie avec $K=1$.

On en déduit aussitôt la moitié gauche de (5c), toujours pour $|\lambda|\leqq 1$. La fonction $1/x$ étant convexe sur $]0,\infty[$, (5b) nous donne

$$E[\frac{1}{Z_t}|\underline{\underline{F}}_s] \geqq \frac{1}{E[Z_t|\underline{\underline{F}}_s]} = \frac{1}{Z_s} \ .$$

Reste la moitié droite de (5c). Nous avons pour $|\lambda|< 1/2$

$$0 \leqq \frac{1}{Z_\infty} \leqq \exp(|\lambda|M^*)\exp(\frac{\lambda^2}{2}\langle M^c,M^c\rangle_\infty)\prod_s \frac{e^{\lambda\Delta M_s}}{1+\lambda\Delta M_s}$$

Posons $x=\lambda\Delta M_s$, de sorte que $|x|<1/16$. Alors d'après (4) nous avons

$$\frac{e^x}{1+x} \leqq 1+ \frac{x^2(e-2)}{1+x} \leqq 1+x^2 \leqq e^{x^2}$$

Donc $$0 \leqq \frac{1}{Z_\infty} \leqq \exp(|\lambda|M^*)\exp(\frac{\lambda^2}{2}\langle M^c,M^c\rangle_\infty)\exp(\lambda^2\sum_s \Delta M_s^2)$$

$$\leqq \exp(|\lambda|M^*)\exp(\lambda^2[M,M]_\infty)$$

Comme $\lambda<1/2$, la formule (3) appliquée à la martingale $(2\lambda M_t)$ montre que $\exp(|\lambda|M^*)$ appartient à L^2 , avec une norme au plus égale à $(1-16|\lambda|m)^{-\frac{1}{2}}$ De même, on a $2\lambda m^2<1$, donc (lemme 1) $\exp(\lambda^2[M,M]_\infty)$ appartient à L^2, avec une norme au plus égale à $(1-2\lambda^2m^2)^{-1/2}$. Donc $1/Z_\infty$ appartient à L^1, avec une majoration explicite de la norme qu'il est inutile d'écrire.

Ce même raisonnement permet en fait de majorer, non pas $E[1/Z_\infty]$ seulement, mais $E[1/Z_\infty|\underline{\underline{F}}_0]$. Appliquant alors ce résultat à la martingale $M'_t=M_{t+s}-M_s$ par rapport à la famille $\underline{\underline{F}}'_t=\underline{\underline{F}}_{s+t}$, on établit la moitié droite de (5c) pour s quelconque, $t=+\infty$. Nous avons fait remarquer au début que cela entraîne le cas général.

VARIANTE. L'article [2] de KAZAMAKI ne parle pas de processus multiplicativement bornés, mais de la condition A_p de MUCKENHOUPT. Il n'est pas nécessaire ici de savoir en quoi cela consiste, car nous montrons dans la note VI qu'elle équivaut à la condition b_θ que nous avons écrite plus haut (6) avec $\theta = -1/p-1$. Nous allons donc montrer que

<u>Quel que soit</u> $\theta < 0$, $Z=\mathcal{E}(\lambda M)$ <u>satisfait à</u> (b_θ) <u>dès que</u> $|\lambda|$ <u>est petit</u>

Nous continuons à supposer que $m<1/8$, $\lambda<1/2$, de sorte que tout le calcul précédent reste valable, et nous avons en posant $\theta=-c$, $c>0$

$$0\leqq Z_\infty^\theta = (1/Z_\infty)^c \leqq \exp(c|\lambda|M^*)\exp(c\lambda^2[M,M]_\infty)$$

et il reste donc à écrire que $2c|\lambda|m<1/8$, $2c\lambda^2m^2<1$ pour pouvoir appliquer (3) et (8) comme on l'a fait plus haut, et obtenir une majoration de la forme $E[Z_\infty^\theta]\leqq f(\lambda,m,c)$. Par restriction à un élément de $\underline{\underline{F}}_0$, cela devient $E[Z_\infty^\theta|\underline{\underline{F}}_0]\leqq f(\lambda,m,c)$, puis par translation comme plus haut, à $E[Z_\infty^\theta/Z_s^\theta|\underline{\underline{F}}_s] \leqq f(\lambda,m,c)$, et on en déduit finalement la moitié droite de (6). La moitié gauche est une simple inégalité de convexité, puisque Z est une vraie martingale.

Nous ne nous occuperons pas du résultat analogue pour les valeurs positives de θ, bien qu'il soit vrai (utiliser l'inégalité $(1+x)e^{-x} \leqq e^{x^2}$ pour $|x|<1/2$). En effet, le principal intérêt du résultat précédent lui vient de son rapport avec la condition de MUCKENHOUPT lorsque θ est négatif.

Il faut noter d'ailleurs que les résultats analogues sont vrais (et plus faciles) pour l'exponentielle ordinaire. Ce sont alors des conséquences immédiates de l'inégalité de JOHN-NIRENBERG.

PARTIE RECIPROQUE

THEOREME 2. Supposons que pour une valeur non nulle de λ, $Z=\mathcal{E}(\lambda M)$ soit un processus strictement positif et multiplicativement borné. Alors M appartient à $\underline{\underline{BMO}}$.

DEMONSTRATION. Nous pouvons nous ramener au cas où $\lambda=1$. Le fait que $Z=\mathcal{E}(M)$ soit strictement positive entraîne que $\Delta M_s > -1$ pour tout s. La condition (5a) pour Z entraîne que les sauts de M sont bornés supérieurement par une constante H (dépendant seulement de la constante K de (5a)) que l'on peut supposer $\geqq 1$. Ecrivons la partie droite de (5c) : si $s \leqq t$

$$K \geqq E[\, \frac{Z_s}{Z_t} \mid \underline{\underline{F}}_s \,] = E[\exp(M_s - M_t + \tfrac{1}{2}\langle M^c, M^c\rangle_s^t) \prod_{s<u\leqq t} \frac{e^{\Delta M_u}}{1+\Delta M_u} \mid \underline{\underline{F}}_s \,]$$

L'inégalité $e^x - 1 - x \geqq x^2/e$ vaut pour tout $x \geqq -1$; on a donc pour $x=\Delta M_s$ appartenant à l'intervalle $]-1,H]$

$$\frac{e^x}{1+x} \geqq 1+ \frac{x^2}{e(1+x)} \geqq 1+x^2/c \geqq e^{ax^2} \qquad (c=e(1+H),\ a>0)$$

car si $y=x^2/c$, $b=H^2/c$, on a $0 \leqq y \leqq b$ donc (concavité du log) $\log(1+y) \geqq \frac{y}{b}\log(1+b)$, et finalement $a=\log(1+b)/bc$. Quitte à diminuer a, on peut supposer $a \leqq 1/2$. Alors

$$K \geqq E[Z_s/Z_t \,|\, \underline{\underline{F}}_s] \geqq E[\exp(M_s - M_t + a\langle M^c, M^c\rangle_s^t + a\Sigma_{s<u\leqq t}\ \Delta M_u^2) \,|\, \underline{\underline{F}}_s]$$

$$= E[\exp(M_s - M_t + a[M,M]_s^t) \,|\, \underline{\underline{F}}_s]$$

Supposons pour un instant que M soit une vraie martingale. Appliquons l'inégalité de Jensen :

$$K \geqq \exp(E[M_s - M_t + a[M,M]_s^t \,|\, \underline{\underline{F}}_s]) = \exp(E[a[M,M]_s^t \,|\, \underline{\underline{F}}_s])$$

et donc $E[[M,M]_s^t \,|\, \underline{\underline{F}}_s]$ est borné ; M ayant des sauts bornés, cela entraîne que M appartient à $\underline{\underline{BMO}}$. Maintenant, si M n'est pas une vraie martingale, nous appliquons ce résultat à la martingale arrêtée M^T, où T =

$\inf\{ t : |M_t| \geqq n \}$; comme M a des sauts bornés, M^T est une vraie martingale bornée. D'autre part nous avons signalé (cf. (7)) que la propriété (5c) passe aux processus arrêtés , au prix du remplacement de K par K^2. Ainsi les martingales M^T appartiennent à la même boule de $\underline{\underline{BMO}}$, et il ne reste plus qu'à faire tendre vers l'infini n et T.

VARIANTE. Soit M une martingale locale nulle en 0, et soit $Z=\mathcal{E}(M)$. Supposons que Z soit strictement positive et satisfasse à (5a) (de sorte que les sauts de M appartiennent à un intervalle $]-1,H]$ comme ci-dessus) et supposons que Z satisfasse à une condition b_θ , avec $\theta<0$. Alors M appartient à $\underline{\underline{BMO}}$. C'est la forme que prend la partie réciproque du théorème de KAZAMAKI, pour des martingales locales continues à droite.

Reprenons la démonstration précédente, en posant $\theta = -c$. Nous avons

$$K^c \geqq E[\frac{Z_s^c}{Z_t^c}|\underline{\underline{F}}_s] = E[\exp(c(M_s-M_t+\frac{1}{2}\langle M^c,M^c\rangle_s^t))\prod_{s<u\leqq t}(\frac{e^{\Delta M_u}}{1+\Delta M_u})^c\ |\underline{\underline{F}}_s\ ]$$

$$\geqq E[\exp(c(M_s-M_t)+\frac{1}{2}\langle M^c,M^c\rangle_s^t))\exp(\Sigma_{s<u\leqq t}\ ac\Delta M_u^2\ )|\underline{\underline{F}}_s\ ]$$

$$\geqq E[\exp(c(M_s-M_t+a[M,M]_s^t))|\underline{\underline{F}}_s]$$

et on conclut comme plus haut.

REFERENCES

[1] A. GARSIA. Martingale inequalities. Seminar notes on recent progress. Benjamin, Reading 1973.

[2] N. KAZAMAKI. A characterization of BMO martingales. Séminaire de probabilités X, université de Strasbourg. Lecture Notes in M. 511, Springer-Verlag 1976.

[3] P.A.MEYER . Un cours sur les intégrales stochastiques. Séminaire de probabilités X, université de Strasbourg. Lecture Notes in M. 511, Springer-Verlag 1976.

[4] P.A. MEYER. Martingales and stochastic integrals I. Lecture Notes in M. 284, Springer-Verlag 1972 .