Xavier Fernique

Une démonstration simple du théorème de R.M. Dudley et M. Kanter sur les lois 0-1 pour les mesures stables

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 8 (1974), p. 78-79
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1974__8__78_0>

UNIVERSITE de STRASBOURG

Séminaire de Probabilités 1972/73

UNE DÉMONSTRATION SIMPLE DU THÉORÈME DE R.M. DUDLEY ET MAREK KANTER SUR LES LOIS ZÉRO-UN POUR LES MESURES STABLES

par X. Fernique

0. Rappels et notations :

Soit E un espace vectoriel mesurable c'est-à-dire ([2]) muni d'une tribu $\mathcal{B}$ compatible avec sa structure vectorielle ; soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans $(E,\mathcal{B})$. On sait que si sa loi est stable, alors pour tout entier positif n et tout couple (Y, Z) de réalisations indépendantes de X, il existe un nombre réel c_n et un élément x_n de E tels que $c_n(X-x_n)$ ait même loi que $Y+nZ$.

Théorème ([1]) : Soit F un sous espace vectoriel de E appartenant à $\mathcal{B}$, alors $P\{X\in F\}$ vaut zéro ou un.

1. Démonstration :

Nous supposons que $P\{X\in F\}$ est strictement positive, nous devons donc prouver qu'elle vaut alors 1.

a) Supposons d'abord que x_n est nul pour tout n (loi strictement stable). Pour tout entier n, posons :

$$A_n = \{Y+nZ\in F\},$$

$$B_n = \{Z\notin F\}\cap A_n .$$

Puisque la loi de X est strictement stable, A_n a même probabilité que $\{X\in F\}$. On en déduit :

$$P\{B_n\} = P\{X\in F\} - P[\{Y+nZ\in F\}\cap\{Z\in F\}],$$

$$P\{B_n\} = P\{X\in F\} - P\{X\in F\}^2 .$$

Par ailleurs si n et m sont différents, et si $Y+nZ$ et $Y+mZ$ appartiennent à F, Z appartient aussi à F, si bien que les B_n sont à la fois disjoints et équiprobables ; comme leur cardinal n'est pas fini, leur probabilité est nulle, c'est-à-dire :

$$P\{X\in F\}>0 \quad , \quad P\{X\in F\}-P\{X\in F\}^2 = 0 ,$$

on en déduit donc le résultat dans ce premier cas.

b) Le résultat général s'en déduit par symétrisation comme dans la preuve de Dudley et Kanter ; je la rappelle : $U = Y - Z$ a une loi strictement stable et $P\{U \in F\}$ est supérieure à $P\{X \in F\}^2$ donc strictement positive ; elle vaut 1 . Ceci s'écrit :

$$P\{Z \mid P\{Y - Z \in F\} = 1\} = 1 \ .$$

Comme $P\{Z \in F\}$ est positive, on en déduit qu'il existe $z \in F$ tel que $P\{Y - z \in F\} = 1$ et donc le résultat général.

[1] R. M. DUDLEY et Marek KANTER ,

Zero-one laws for stable measures, preprint.

[2] X. FERNIQUE,

Certaines propriétés des éléments aléatoires gaussiens.
Istituto Nazionale di Alta Matematica, Symposia Matematica, IX, 1972.