SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JACQUES FARAUT

Fonction brownienne sur une variété riemannienne

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 7 (1973), p. 61-76
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1973__7__61_0>

FONCTION BROWNIENNE SUR UNE VARIETE RIEMANNIENNE

Jacques Faraut

I Introduction

Il est possible de définir le mouvement brownien de la façon suivante : à chaque instant t la position de la particule est une variable aléatoire $\xi(t)$, la famille des variables aléatoires $\{\xi(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ vérifiant

(a) $\forall\, t$, $E(\xi(t)) = 0$

(b) Pour $t \neq s$ la variable $\xi(t) - \xi(s)$ est une variable gaussienne de variance $|t - s|$

(c) Si $t_0 < t_1 < \dots < t_N$, les variables

$$\xi(t_i) - \xi(t_{i-1}) \qquad (1 \leq i \leq N)$$

sont indépendantes.

Remarquons que l'application $t \longmapsto \xi(t)$ est une application ξ de $\mathbb{R}$ dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega, \mathcal{E}, P)$, espace des variables aléatoires de carré intégrable, vérifiant

$$\|\xi(t) - \xi(s)\|^2 = |t - s|$$

Si l'on suppose que $\xi(0) = 0$ la covariance de $\xi(t)$ et de $\xi(s)$ est

$$C(t,s) = (\xi(t), \xi(s)) = \frac{1}{2}(|t|+|s|-|t-s|)$$

Une application ξ vérifiant (a), (b) et (c) est appelée fonction brownienne sur $\mathbb{R}$.

Dans [6] Lévy définit les fonctions browniennes dépendant de plusieurs paramètres. La définition peut être formulée comme suit : Soit X une variété riemannienne, nous noterons $r(x,y)$ la distance géodésique de deux points x et y de X.

Définition I.1 Une fonction brownienne sur X est une fonction aléatoire ξ définie sur X à valeurs réelles telle que

(a) $\forall x \in X, \ E(\xi(x)) = 0$

(b) $\forall x,y \in X, \quad \xi(x) - \xi(y)$ est une variable gaussienne de variance $r(x,y)$

(c) $\forall x_1, x_2, \dots, x_N \in X \ , \ \forall c_1, c_2, \dots, c_N \in \mathbb{R}$

la variable

$$\sum_{i=1}^{N} c_i \, \xi(x_i)$$

est gaussienne.

Remarquons qu'une fonction brownienne ξ est une application de la variété X dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega, \mathcal{E}, P)$ vérifiant

$$\| \xi(x) - \xi(y) \|^2 = r(x,y)$$

Si $X = \mathbb{R}$ il existe une fonction brownienne : la fonction aléatoire du mouvement brownien. L'objet de cet exposé est d'étudier l'existence d'une fonction brownienne pour des variétés riemanniennes particulières. Le problème est purement géométrique car pour montrer l'existence d'une fonction brownienne sur la variété riemannienne X il suffit de montrer qu'il existe une application ξ dans un espace de Hilbert telle que

$$\|\xi(x) - \xi(y)\|^2 = r(x,y)$$

(voir Cartier [1] , théorème 1, d) p.63).

Soit ξ une fonction brownienne sur X, et supposons qu'en un point 0 de X nous ayons $\xi(0) = 0$. La covariance de $\xi(x)$ et de $\xi(y)$ est alors

$$C(x,y) = \frac{1}{2}\left[r(x,0) + r(y,0) - r(x,y)\right]$$

c'est ce que Gangolli dans [2] appelle noyau de Lévy-Schoenberg. Pour qu'il existe sur X une fonction brownienne il faut et suffit que le noyau de Lévy-Schoenberg C(x,y) soit de type positif.

Lévy a démontré dans [6] l'existence de fonctions browniennes dans le cas des espaces euclidiens et des sphères; dans [2] Gangolli a étudié des fonctions aléatoires plus générales dans le cadre des espaces riemanniens symétriques.

Dans cet exposé nous donnerons une nouvelle démonstration du résultat de Lévy dans le cas des sphères. Nous montrerons qu'une fonction brownienne existe dans le cas des espaces hyperboliques réels, mais qu'elle n'existe pas dans le cas des espaces hyperboliques des quaternions. Ces résultats sont dus à K. Harzallah (Université de Tunis) et à J. Faraut (Université de Strasbourg).

II Noyaux de type positif et noyaux de type négatif

Calcul symbolique

Dans ce paragraphe X désigne un ensemble,nous considérerons uniquement des noyaux réels sur X, c'est à dire des fonctions définies sur X x X à valeurs réelles.

1) Noyaux de type positif

Définition II.1 Un noyau φ sur X est dit de type positif si φ est symétrique et si

$$\forall x_1,x_2,\ldots,x_N \in X, \quad \forall c_1,c_2,\ldots,c_N \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{i,j=1}^{N} \varphi(x_i,x_j)\, c_i c_j \geqslant 0$$

Par exemple, si f est une fonction réelle définie sur X le noyau φ défini par

$$\varphi(x,y) = f(x)\, f(y)$$

est de type positif.

Proposition II.1 Le produit de deux noyaux de type positif est un noyau de type positif.

Il suffit de considérer le cas où X est un ensemble fini, c'est à dire

Lemme Soient (a_{ij}) et (b_{ij}) deux matrices réelles symétriques positives (i.e. les formes quadratiques associées sont positives). Alors la matrice $(a_{ij}b_{ij})$ est symétrique positive.

Puisque toute forme quadratique positive est une somme de carrés de formes linéaires, nous pouvons supposer que la forme quadratique associée à la matrice (b_{ij}) est le carré d'une forme linéaire :

$$b_{ij} = \beta_i \beta_j$$

et nous avons alors

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}b_{ij}c_i c_j = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(\beta_i c_i)(\beta_j c_j) \geqslant 0$$

De cette proposition nous déduisons une propriété de calcul symbolique

<u>Corollaire</u> II.2 <u>Soit</u> f <u>une fonction définie par</u>

$$f(u) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k u^k , \quad a_k \geqslant 0$$

<u>et soit</u> φ <u>un noyau de type positif tel que la série</u>

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k [\varphi(x,y)]^k$$

<u>converge pour tout couple</u> (x,y), <u>alors le noyau</u> $f(\varphi)$ <u>est de type positif</u>.

Dans la suite nous considérerons les exemples suivants :

$$f(u) = e^{au} , \quad a > 0$$

$$f(u) = (1-u)^{-s} , \quad s > 0$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s(s+1)\ldots(s+k-1)}{k!} u^k$$

$$f(u) = \operatorname{Arcsin} u$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1.3.\ldots.(2k-1)}{2.4.\ldots..2k} \frac{u^{2k+1}}{2k+1}$$

2) <u>Noyaux de type négatif</u>

<u>Définition</u> II.1 <u>Un noyau</u> ψ <u>sur</u> X <u>est dit de type négatif si</u>

(a) ψ <u>est symétrique</u>

(b) $\forall x \in X, \psi(x,x) = 0$

(c) $\forall\, x_1, x_2, \ldots, x_N \in X,\ \forall\, c_1, c_2, \ldots, c_N \in \mathbb{R}$

<u>tels que</u> $\sum_{i=1}^{N} c_i = 0$

$$\sum_{i,j=1}^{N} \psi(x_i, x_j)\, c_i c_j \leq 0$$

Si φ est un noyau de type positif le noyau ψ défini par

$$\psi(x,y) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x,x) + \varphi(y,y) - 2\varphi(x,y)\right]$$

est un noyau de type négatif. En effet si

$$\sum_{i=1}^{N} c_i = 0$$

nous avons

$$\sum_{i,j=1}^{N} \psi(x_i,x_j)\, c_i c_j = -\sum_{i,j=1}^{N} \varphi(x_i,x_j)\, c_i c_j \leq 0$$

<u>Proposition</u> II.3 <u>Pour qu'un noyau</u> ψ <u>soit de type négatif il faut et suffit qu'il existe une application</u> ξ <u>de</u> X <u>dans un espace de Hilbert</u> $\mathcal{H}$ <u>telle que</u>

$$\| \xi(x) - \xi(y) \|^2 = \psi(x,y)$$

a) Soit ξ une application de X dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Posons

$$\psi(x,y) = \| \xi(x) - \xi(y) \|^2$$

si $\sum_{i=1}^{N} c_i = 0$ nous avons

$$\sum_{i,j=1}^{N} \| \xi(x_i) - \xi(x_j) \|^2 c_i c_j$$

$$= -2 \sum_{i,j=1}^{N} (\xi(x_i), \xi(x_j))\, c_i c_j$$

$$= -2 \left\| \sum_{i=1}^{N} c_i\, \xi(x_i) \right\|^2 \leq 0$$

b) Réciproquement soit Ψ un noyau de type négatif et considérons l'espace

$$\mathcal{F} = \left\{ \mu = \sum_{i=1}^{N} c_i \varepsilon_{x_i} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{N} c_i = 0 \right\}$$

c'est à dire l'espace vectoriel des mesures discrètes de masse totale nulle. Considérons sur $\mathcal{F}$ la forme hermitienne positive

$$\|\mu\|^2 = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \Psi(x_i,x_j)\, c_i c_j$$

$$= -\frac{1}{2} \int \Psi(x,y)\, d\mu(x)\, d\mu(y)$$

et soit $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert séparé complété de $\mathcal{F}$. Pour x_o fixé dans X soit ξ l'application de X dans $\mathcal{H}$ définie par

$$\xi(x) = \varepsilon_x - \varepsilon_{x_o}$$

nous avons

$$\|\xi(x) - \xi(y)\|^2 = \Psi(x,y)$$

<u>Proposition</u> II.4 (<u>Théorème de Schoenberg</u> [7]) <u>Pour qu'un noyau</u> Ψ <u>soit de type négatif il faut et suffit que pour tout</u> $t \geq 0$ <u>le noyau</u> $e^{-t\Psi}$ <u>soit de type positif</u>.

a) Supposons que pour tout $t \geq 0$ le noyau $\varphi_t = e^{-t\Psi}$ soit de type positif, alors le noyau Ψ_t défini par

$$\Psi_t(x,y) = \frac{1}{2}\left[\varphi_t(x,x) + \varphi_t(y,y) - 2\varphi_t(x,y)\right]$$

$$= 1 - e^{-t\Psi(x,y)}$$

est de type négatif, et puisque

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left[1 - e^{-t\Psi(x,y)}\right] = \Psi(x,y)$$

le noyau Ψ est de type négatif.

b) Pour démontrer la réciproque montrons d'abord le lemme suivant

<u>Lemme</u> <u>Soit</u> $X = \mathcal{H}$ <u>un espace de Hilbert réel , pour tout</u> $t \geq 0$ <u>le noyau</u> φ_t <u>défini par</u>

$$\varphi_t(x,y) = e^{-t\|x-y\|^2}$$

<u>est de type positif</u>.

Le noyau u défini par

$$u(x,y) = (x,y)$$

est de type positif, et par suite pour tout $a \geq 0$ le noyau e^{au} est aussi de type positif (corollaire II.2). Nous avons donc

$$\sum_{i,j=1}^{N} e^{-t\|x_i-x_j\|^2} c_i c_j$$
$$= \sum_{i,j=1}^{N} e^{2t(x_i,x_j)} \left[e^{-t\|x_i\|^2} c_i\right]\left[e^{-t\|x_j\|^2} c_j\right]$$
$$\geq 0$$

Terminons maintenant la démonstration du théorème de Schoenberg. Soit ψ un noyau de type négatif, d'après la proposition II.3 il existe une application ξ de X dans un espace de Hilbert réel $\mathcal{H}$ tel que

$$\|\xi(x) - \xi(y)\|^2 = \psi(x,y)$$

et par suite

$$\sum_{i,j=1}^{N} e^{-t\psi(x_i,x_j)} c_i c_j =$$
$$\sum_{i,j=1}^{N} e^{-t\|\xi(x_i)-\xi(x_j)\|^2} c_i c_j \geq 0$$

c'est à dire que pour tout $t \geq 0$ le noyau $e^{-t\psi}$ est de type positif.

Nous en déduisons une propriété de calcul symbolique :

<u>Corollaire</u> II.5 <u>Soit</u> f <u>une fonction définie sur</u> $[0,\infty[$ <u>par</u>

$$f(u) = \int_0^{\infty} \frac{1}{t}(1-e^{-tu})\, d\mu(t)$$

<u>où</u> μ <u>est une mesure</u> ≥ 0 <u>sur</u> $[0,\infty[$ <u>telle que</u>

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+t}\, d\mu(t) < \infty$$

<u>alors si</u> ψ <u>est un noyau de type négatif il en est de même de</u> $f(\psi)$.

Dans la suite nous considérerons les exemples suivants :

$$f(u) = \mathrm{Log}(1+u) = \int_0^\infty \frac{1}{t}\,(1-e^{-tu})\, e^{-t} dt$$

$$f(u) = u^\alpha \quad , \; 0<\alpha<1$$

$$= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{1}{t}\,(1-e^{-tu})\, \frac{dt}{t^\alpha}$$

III <u>Application du calcul symbolique à l'existence de fonctions browniennes</u>

Nous avons vu au paragraphe I que, pour montrer qu'il existe une fonction brownienne sur une variété riemannienne X, il suffit de montrer qu'il existe une application ξ dans un espace de Hilbert telle que

$$\| \xi(x) - \xi(y) \|^2 = r(x,y)$$

D'après la proposition II.3 cela revient à montrer que la distance géodésique r, considérée comme noyau sur X, est de type négatif.

1) <u>Espaces euclidiens</u>

Soit $X = E_n$ l'espace euclidien de dimension n.

Le noyau ψ sur X défini par

$$\psi(x,y) = \| x-y \|^2$$

est de type négatif (proposition II.3). D'après le corollaire II.5 il en est de même du noyau $r = \sqrt{\psi}$.

2) Sphères

Soit $X = S_n$ la sphère unité de dimension n, c'est à dire l'ensemble des points x de $\mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$x_o^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1$$

La distance géodésique sur X est définie par

$$\mathrm{Cos}\ r(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$$

$$(\ 0 \leqslant r(x,y) \leqslant \pi)$$

Le noyau Cos r est donc de type positif. D'après le corollaire II.2 le noyau φ défini par

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - r = \mathrm{Arc\ sin}(\mathrm{Cos} r)$$

est aussi de type positif, et par suite le noyau

$$r(x,y) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x,x) + \varphi(y,y) - 2\varphi(x,y)\right]$$

est de type négatif.

3) Espaces hyperboliques réels

Soit $X = L_n$ l'espace hyperbolique réel de dimension n, c'est à dire l'ensemble des points $x = (x_o, x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ vérifiant

$$x_o^2 - x_1^2 - \ldots - x_n^2 = 1,\ x_o > 0$$

C'est la nappe supérieure d'un hyperboloide à deux nappes, de révolution autour de Ox_o.

Pour deux points x et y de X posons

$$[x,y] = x_o y_o - x_1 y_1 - \ldots - x_n y_n$$

d'après l'inégalité de Schwarz nous avons

$$[x,y] \geqslant 1$$

La distance géodésique r est définie par

$$\mathrm{Ch}\ r(x,y) = [x,y]$$

Pour tout réel t le noyau φ_0 défini par

$$\varphi_0(x,y) = (x_0 y_0)^{-t}$$

est de type positif sur X, de même le noyau φ_1 défini par

$$\varphi_1(x,y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

et par suite (proposition II.1) le noyau φ défini par

$$\varphi(x,y) = (x_0 y_0)^{-1}(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n)$$

est aussi de type positif. D'après l'inégalité de Schwarz nous avons

$$|\varphi(x,y)|^2 \leqslant (x_0 y_0)^{-2}(x_0^{\,2}-1)(y_0^{\,2}-1) < 1$$

D'après le corollaire II.2, pour tout $t \geqslant 0$ le noyau

$$[x,y]^{-t} = (x_0 y_0)^{-t}[1-\varphi(x,y)]^{-t}$$

est de type positif, et d'après le théorème de Schoenberg (proposition II.4) le noyau u défini par

$$u(x,y) = \mathrm{Log}\,[x,y]$$

est de type négatif. Or nous avons

$$e^u = \mathrm{Ch}\, r$$

d'où

$$r = u + \mathrm{Log}(1+\sqrt{1-e^{-2u}})$$

Or d'après la proposition II.4 le noyau $1-e^{-2u}$ est de type négatif, donc d'après le corollaire II.5 le noyau $v = \sqrt{1-e^{-2u}}$ aussi, et d'après ce même corollaire $\mathrm{Log}(1+v)$ est un noyau de type négatif. Il en résulte que r est un noyau de type négatif.

IV Application de l'analyse harmonique à la non-existence de fonctions browniennes

Dans ce paragraphe nous allons montrer qu'il existe des variétés riemanniennes pour lesquelles il n'existe pas de fonction brownienne. La démonstration repose sur le résultat suivant du à Kostant [5] : Dans le cas des espaces hyperboliques sur les quaternions le noyau constant $\varphi = 1$ est isolé dans l'ensemble des noyaux sphériques de type positif.

Soit X un espace localement compact, G un groupe transitif sur X et dx une mesure de Radon invariante par G sur X. Un noyau f sur X est dit invariant si

$$\forall\, g \in G,\ \forall\, x,y \in X,\ f(gx,gy) = f(x,y)$$

Un noyau complexe invariant f sur X est dit intégrable si pour tout x l'application

$$y \longmapsto f(x,y)$$

est intégrable, et l'on pose

$$\| f \| = \int_X |f(x,y)|\, dy$$

(ce nombre ne dépend pas de x). Le produit de convolution de deux noyaux intégrables sur G est défini par

$$f_1 * f_2(x,y) = \int_X f_1(x,z)\, f_2(z,y)\, dz$$

Ce produit est associatif et

$$\| f_1 * f_2 \| \leq \|f_1\|\ \|f_2\|$$

Nous obtenons ainsi une algèbre de Banach que nous notons $L^{\natural}(X)$. Nous supposerons dans la suite que l'algèbre $L^{\natural}(X)$ est commutative (c'est le cas si X est un espace riemannien symétrique et si G est la composante connexe de l'identité du groupe des isométries de X, voir Helgason [4] p.408)

Considérons la transformation de Gelfand de l'algègre de Banach commutative $L^{\natural}(X)$: le spectre Σ de $L^{\natural}(X)$ est un espace localement compact. Pour tout σ de Σ il existe un noyau invariant φ_σ, continu et borné, vérifiant

$$\forall\, x \in X,\quad \varphi_\sigma(x,x) = 1$$

et tel que pour tout noyau invariant intégrable f

$$f * \varphi_\sigma = \hat{f}(\sigma)\, \varphi_\sigma$$

où $\hat{f}$ désigne la transformée de Gelfand de f (φ_σ est un noyau sphérique borné, voir Helgason [4] p.410). Posons

$$\Omega = \{\sigma \in \Sigma \mid \varphi_\sigma \text{ est un noyau complexe de type positif}\}$$

L'ensemble Ω est un fermé de Σ. Le noyau constant égal à 1 est un élément de Ω :

$$\hat{f}(1) = \int_X f(x,y)\,dy$$

En général nous avons

$$\hat{f}(\sigma) = \int_X f(x,y)\, \varphi_\sigma(y,x)\, dy$$

<u>Théorème de Bochner-Godement</u> [3] <u>Soit φ un noyau invariant continu de type positif, il existe une mesure positive bornée unique μ sur Ω telle que</u>

$$\varphi(x,y) = \int_\Omega \varphi_\omega(x,y)\, d\mu(\omega)$$

Nous allons en déduire

<u>Théorème</u> IV.1 <u>Supposons que</u> 1 <u>soit isolé dans Ω</u>. <u>Soit ψ un noyau invariant continu sur</u> X. <u>Si ψ est de type négatif alors ψ est borné</u>.

D'après le théorème de Schoenberg (proposition II.4) pour tout $t \geq 0$ le noyau $e^{-t\psi}$ est de type positif, donc d'après le théorème de Bochner-Godement il existe une mesure positive μ_t sur Ω de masse totale égale à 1 telle que

$$e^{-t\psi(x,y)} = \int_\Omega \varphi_\omega(x,y)\, d\mu_t(\omega)$$

Posons

$$A(\Omega) = \{ \hat{f} \mid f \in L^{\natural}(X) \}$$

L'espace $A(\Omega)$ est une sous-algèbre dense de l'algèbre $C_o(\Omega)$ des fonctions continues sur Ω qui tendent vers 0 à l'infini.

Il existe donc un noyau invariant intégrable f tel que

$$\hat{f}(1) = 1, \quad |\hat{f}(\omega)| \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{si} \quad \omega \in \Omega'$$

où $\Omega' = \Omega \setminus \{1\}$. On peut même supposer que f est à "support compact", c'est à dire que pourtout x l'application

$$y \longmapsto f(x,y)$$

est à support compact. Posons

$$g = f * \tilde{f} \qquad (\tilde{f}(x,y) = \overline{f(y,x)})$$

Nous avons pour ω dans Ω

$$\hat{g}(\omega) = |\hat{f}(\omega)|^2$$

(les points de Ω correspondent à des caractères hermitiens), donc

$$\hat{g}(1) = 1, \quad 0 \leqslant \hat{g}(\omega) \leqslant \frac{1}{4} \quad \text{si} \quad \omega \in \Omega'$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \int_X e^{-t\Psi(x,y)} g(y,x)\, dx & \\ &= \int_X \int_\Omega \varphi_\omega(x,y)\, d\mu_t(\omega)\, g(y,x)\, dy \\ &= \int_\Omega \hat{g}(\omega)\, d\mu_t(\omega) \end{aligned}$$

La masse totale de la mesure μ_t est égale à 1 donc

$$\begin{aligned} \int_X [1 - e^{-t\Psi(x,y)}]\, g(y,x)\, dy & \\ &= \int_{\Omega'} [1 - \hat{g}(\omega)]\, d\mu_t(\omega) \\ &\geqslant \frac{3}{4} \mu_t(\Omega') \end{aligned}$$

et puisque

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_X [1 - e^{-t\Psi(x,y)}]\, g(y,x)\, dy & \\ &= \int_X \Psi(x,y)\, g(y,x)\, dy \end{aligned}$$

nous en déduisons qu'il existe une constante positive C telle que

$$\mu_t(\Omega') \leq C\, t$$

et par suite

$$\frac{1}{t}\,(1-e^{-t\,\Psi(x,y)}) = \frac{1}{t}\int_{\Omega'}[1-\varphi_\omega(x,y)]\, d\mu_t(\omega)$$
$$\leq 2\,C$$

Il en résulte que le noyau Ψ est borné.

<u>Corollaire</u> IV.2 <u>Dans le cas des espaces hyperboliques sur les quaternions il n'existe pas de fonction brownienne</u>.

Les espaces hyperboliques sur les quaternions sont les espaces homogènes

$$Sp(1,n) \,/\, Sp(1) \times Sp(n)$$

Ce sont des espaces riemanniens symétriques de rang 1. L'algèbre $L^{\natural}(X)$ est commutative et le point 1 est isolé dans Ω ([5] p.642). D'après le théorème IV.1 les noyaux continus invariants de type négatif sont bornés. La distance géodésique r n'est pas bornée, donc le noyau r ne peut pas être de type négatif, et par suite (proposition II.3) il ne peut exister une fonction brownienne.

J.Faraut
Institut de Recherche
Mathématique Avancée
Laboratoire associé au CNRS
7 rue René Descartes
67-Strasbourg

1. Cartier, P. Introduction à l'étude des mouvements browniens à plusieurs paramètres
Sém. de Proba., Stasbourg, 1969/70
Springer, Lectures notes 191 (1971)

2. Gangolli, R. Positive definite kernels on homogeneous spaces and certain stochastic processes related to Lévy's Brownian motion of several parameters
Ann. Inst. Henri Poincaré, section B
Vol III, n$^{\underline{o}}$ 2, (1967), p.121-225

3. Godement, R. Introductions aux travaux de Selberg
Sém. Bourbaki, exposé 144, Paris 1957

4. Helgason, S. Differential geometry and symmetric spaces
Academic Press (1962)

5. Kostant, B. On the existence and irreducibility of certain series of representations
Bull. Amer. Math. Soc.
75 (1969) p. 627-642

6. Lévy, P. Processus stochastiques et mouvement brownien
Gauthier-Villars (1965)

7. Schoenberg, I.J. Metric spaces and positive definite functions
Trans. Amer. Math. Soc.
44 (1938) p.522-536