Paul-André Meyer

Ensembles régénératifs, d'après Hoffmann-Jørgensen

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 4 (1970), p. 133-150
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1970__4__133_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1968/69

ENSEMBLES RÉGÉNERATIFS, d'après HOFFMANN-JØRGENSEN

exposé de P.A.MEYER

La notion d'ensemble régénératif est l'extension naturelle, pour un ensemble de temps continu, de la notion de " recurrent event" introduite par FELLER dans le cas discret. Si l'on excepte le cas classique des renouvellements à temps continu, la première définition de ces ensembles a été donnée par KINGMAN, mais la définition de KINGMAN est appropriée aux chaînes de Markov à temps continu, et ne s'applique pas aux ensembles régénératifs trop " minces", comme l'ensemble des zéros du mouvement brownien. KRYLOV et YUSHKEVICH ont introduit les ensembles régénératifs (sous le nom d'ensembles aléatoires markoviens) dans un article extrêmement intéressant [1], mais en partant malheureusement d'une définition axiomatique inutilisable en pratique. Le principal résultat de HOFFMANN-JØRGENSEN consiste à montrer que la définition naturelle des ensembles régénératifs est en réalité équivalente à celle de KRYLOV et YUSHKEVICH.

L'article de HOFFMANN-JØRGENSEN doit paraître prochainement [2]. L'exposé qui suit n'en diffère que par des détails de rédaction.

§ 1. FERMÉS ALÉATOIRES ET ENSEMBLES RÉGÉNÉRATIFS

Nous appelons fermé droit dans la suite un sous-ensemble de $\mathbb{R}_+$, fermé pour la topologie droite . Par exemple, un intervalle I fermé à gauche et ouvert à droite est un fermé droit (si des $x_n \in I$ décroissent, on a $\lim_n x_n \in I$). En revanche, un intervalle fermé à droite n'est pas nécessairement un fermé droit ! Il faut donc faire attention.

Soit $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ un espace probabilisé, muni d'une famille croissante $(\underline{\underline{F}}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ de sous-tribus de $\underline{\underline{F}}$. On appelle ensemble aléatoire un processus $M=(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, à valeurs dans l'ensemble $\{0,1\}$, progressivement mesurable par rapport à la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$. Pour tout $\omega\in\Omega$, nous désignerons par $M(\omega)$ l'ensemble $\{ t : M_t(\omega)=1\}$; si $M(\omega)$ est un fermé (resp. un fermé droit) pour tout ω, nous dirons que M est un fermé aléatoire (resp. un fermé droit aléatoire). Par exemple, si (X_t) est un processus réel adapté à la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$, à trajectoires continues (resp. continues à droite) , l'ensemble des zéros de (X_t), c'est à dire

$$M_t(\omega) = 1 \text{ si } X_t(\omega)=0, \quad M_t(\omega)=0 \text{ si } X_t(\omega)\neq 0 ,$$

est un fermé (resp. un fermé droit) aléatoire.

Nous ne considérerons dans la suite que des fermés (ou fermés droits) aléatoires contenant le point 0 : $0 \in M(\omega)$ p.s. Nous appellerons intervalles contigus à un fermé droit $M \subset \mathbb{R}_+$ les composantes connexes du complémentaire M^c : ce sont des intervalles de la forme [ ] ou [[. Nous introduirons les notations fondamentales suivantes (bien entendu, si M dépend de ω, S_t, U_t, V_t en dépendent aussi)

$S_t = \inf \{ s : s \geq t , s \in M \}$ ($+\infty$ si cet ensemble est vide)
$U_t = \sup \{ s : s \leq t , s \in M \}$
$V_t = S_t - U_t$

Si M est un fermé aléatoire, et si la loi P est complète, la théorie de la mesurabilité des temps d'entrée entraîne aussitôt que S_t est un temps d'arrêt, et que U_t est $\underline{\underline{F}}_t$-mesurable.

Nous appellerons fonction en dents de scie , dans cet exposé, toute fonction positive f définie sur $\mathbb{R}_+$, continue à droite, et possédant la propriété suivante : soit F l'ensemble fermé $\overline{\{f=0\}}$; alors dans tout intervalle]a,b[contigu à F , f est affine de pente 1, nulle au point a. Si $0 \notin F$, il y a un intervalle [0,b[contigu à F ; dans ce cas, nous imposons à f d'être affine de pente 1 dans [0,b[, mais la valeur f(0) peut être positive quelconque.

Si M est un fermé droit contenant 0, nous associons à M la fonction en dents de scie $A_t = t - U_t$. L'ensemble $\{ t: A_t = 0 \}$ est l'adhérence de M. La connaissance de la fonction en dents de scie $A_.$ ne détermine donc pas uniquement M : les fermés droits contenant 0 admettant cette fonction sont compris entre $\overline{M}$, et l'ensemble $\underline{M}$ que l'on obtient en enlevant à $\overline{M}$ les extrémités gauches non isolées d'intervalles contigus à $\overline{M}$.

Dans toute la suite, nous travaillerons sur un espace canonique ainsi défini : Ω sera l'ensemble de toutes les fonctions en dents de scie. Si $\omega \in \Omega$, nous écrirons $A_t(\omega) = \omega(t)$. $\underline{\underline{F}}^o$ (resp. $\underline{\underline{F}}^o_t$) sera la tribu engendrée par toutes les fonctions A_s (resp. les fonctions A_s, $s \leq t$). L'ensemble $\{ t : A_t(\omega) = 0 \}$ sera noté $M(\omega)$*, et nous définirons $\underline{M}(\omega)$ comme ci-dessus. Nous appellerons fermé droit aléatoire canonique

* Cet ensemble est Fermé d'après la definition des fonctions en dents de scie

(contenant 0) la donnée d'une loi de probabilité P sur $(\Omega, \underline{\underline{F}}^o)$ telle que $A_0=0$ p.s. . Cette définition est assez artificielle, mais elle sera très commode pour la suite. L'ensemble aléatoire que nous aurons en vue sera $\underline{M}(\omega)$, plutôt que $\overline{M}(\omega)$.

Noter que Ω est muni d'un opérateur de translation naturel. Nous utiliserons comme d'habitude la notation θ_t pour la translation par t.

Soit M un fermé droit aléatoire contenant 0, défini sur un espace probabilisé quelconque $(W, \underline{\underline{G}}, Q)$. Pour tout $w \in W$, considérons la fonction en dents de scie $\phi(w)$ associée au fermé droit $M(w)$; on vérifie aussitôt que ϕ est une application mesurable de W dans Ω, et l'on peut donc considérer la loi image $\phi(Q)=P$. On dit que $(\Omega, \underline{\underline{F}}^o, P)$ est la forme canonique du fermé droit aléatoire M. La mise sous forme canonique fait perdre une certaine information sur M, car la connaissance de $\phi(w)$ ne permet pas de déterminer si les extrémités gauches d'intervalles contigus à $M(w)$ appartenaient à $M(w)$ ou non.

Nous pouvons maintenant définir les ensembles régénératifs. Noter que les tribus $\underline{\underline{F}}^o_t$ sont aussi engendrées par les variables aléatoires U_s, $s \leq t$.

DÉFINITION.- <u>Soit</u> P <u>une loi sur</u> $(\Omega, \underline{\underline{F}}^o)$, <u>telle que</u> $0 \in M(\omega)$ P-<u>p.s.</u>. <u>On dit que</u> $\underline{M}(\omega)$ <u>est régénératif</u> (<u>pour la loi</u> P) <u>si</u>

<u>pour tout temps d'arrêt</u> T <u>de la famille</u> $(\underline{\underline{F}}^o_{t+})$ <u>dont le graphe passe p.s. dans</u> $\underline{M}$ ($T(\omega) \in \underline{M}(\omega)$ <u>pour presque tout</u> ω <u>tel que</u> $T(\omega)<+\infty$) ; <u>pour tout</u> $A \in \underline{\underline{F}}^o_{T+}$ <u>contenu dans</u> $\{T<\infty\}$, <u>tout</u> $B \in \underline{\underline{F}}^o_T$, <u>on a</u>

$$P(A \cap \theta_T^{-1}(B)) = P(A)P(B)$$

<u>Un fermé droit aléatoire</u> M <u>défini sur un espace quelconque</u> $(W, \underline{\underline{G}}, Q)$ <u>est dit régénératif si sa forme canonique</u> $\phi(Q)$ <u>est régénérative</u>.

Voici deux exemples d'ensembles régénératifs. Nous en donnerons en appendice un troisième, plus délicat.

a) Soit (X_t) un processus fortement markovien continu à droite à valeurs dans un espace d'états E, admettant un semi-groupe de transition homogène dans le temps (P_t), et issu d'un point $x \in E$. Alors l'ensemble $M=\{t : X_t=x\}$ est régénératif (démonstration immédiate à partir de la propriété de Markov forte).

b) Soit (Z_t) un processus à accroissements indépendants et stationnaire à valeurs réelles, défini sur un espace W, tel que $Z_0=0$, et continu à droite. Soit M l'ensemble des " ladder points" pour le processus, c'est à dire $(t,w) \in M \iff Z_s(w) \leq Z_t(w)$ pour tout $s \leq t$. Alors M, qui est évidemment fermé à droite, est régénératif ; cela résulte de la propriété de Markov forte comme dans l'exemple précédent.

§ 2 . DESCRIPTION QUALITATIVE SOMMAIRE

Dans ce qui suit, nous munissons Ω d'une loi P pour laquelle M est régénératif. Nous nous proposons dans ce paragraphe de distinguer, parmi les divers types d'ensembles régénératifs, ceux dont la structure est intéressante.

Nous désignerons par $\underline{\underline{F}}$ la tribu obtenue en complétant $\underline{\underline{F}}^{o}$ par rapport à P, et par $\underline{\underline{F}}_t$ la tribu obtenue en adjoignant à $\underline{\underline{F}}_t^{o}$ tous les ensembles de mesure nulle. Tout temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}_{t+})$ est égal p.s. à un temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}_{t+}^{o})$; la propriété de régénération s'étend donc immédiatement à ces temps d'arrêt.

PROPOSITION 1.- *Soient* $s \geq 0$, $A \in \underline{\underline{F}}_{s+}$ *contenu dans la coupe de* $\underline{M}$ *par* s, *et* $B \in \underline{\underline{F}}$. *Alors* $P(A \cap \theta_s^{-1}(B)) = P(A)P(B)$.

DÉMONSTRATION.- On applique la propriété régénérative au temps d'arrêt T suivant, dont le graphe passe dans $\underline{M}$: T=s sur A, $+\infty$ sur A^c. En prenant s=0, on obtient le corollaire suivant :

COROLLAIRE.- *Si* $A \in \underline{\underline{F}}_{0+}$, *on a* $P(A)=0$ *ou* $P(A)=1$.*

PROPOSITION 2.- *Ou bien* 0 *est p.s. un point isolé de l'ensemble* $M(\omega)$, *et alors* $M(\omega)$ *est p.s. un ensemble discret, ou bien* 0 *est p.s. un point d'accumulation de* $M(\omega)$, *et* $M(\omega)$ *est alors p.s. un ensemble parfait.*

DÉMONSTRATION.- L'ensemble $\{ \omega : 0$ est point isolé de $M(\omega) \}$ est $\underline{\underline{F}}_{0+}$ -mesurable, en vertu de la théorie de la mesurabilité des temps d'entrée. Sa probabilité est donc 0 ou 1 d'après le corollaire précédent. Supposons que cette probabilité soit 1. Soit $S_1(\omega) = \inf \{ t : t>0, t \in M(\omega) \}$; S_1 est un temps d'arrêt p.s. > 0, son graphe passe dans M, et en fait dans $\underline{M}$ car $S_1(\omega)$ est un point isolé à gauche de $M(\omega)$. La propriété de régénération s'applique donc à S_1, et entraîne que S_1 est p.s. isolé. Posons ensuite $S_2(\omega) = \inf \{ t>S_1(\omega) : t \in M(\omega) \}$, de sorte que $S_2 = S_1 + S_1 \circ \theta_{S_1}$ p.s. . La propriété de régénération entraîne que S_2 est p.s. isolé, et que $S_2 = S_1 + V_2$, où V_2 est une variable aléatoire indépendante de $\underline{\underline{F}}_{S_1+}$, de même loi que S_1. En itérant, on construit une suite de temps d'arrêt S_n, qui constituent un processus de renouvellement. Il est alors classique que $S_n \to +\infty$; M coïncide

* Noter que $0 \in \underline{M}$.

donc p.s. avec la réunion des graphes des S_n, et M est bien p.s. discret.

Supposons ensuite que 0 soit p.s. un point d'accumulation de $M(\omega)$. L'ensemble des extrémités droites d'intervalles contigus à M (ensemble contenu dans $\underline{M}$) est réunion d'une suite de graphes de temps d'arrêt R_n (*). Soit H cet ensemble ; en appliquant aux R_n la propriété de régénération, on voit que les points de H (p.s.) sont tous des points d'accumulation à droite de M. D'autre part, les points de $M \setminus H$ par définition sont des points d'accumulation à gauche de M. Il en résulte que $M(\omega)$ est p.s. un ensemble parfait.

PROPOSITION 3.- <u>Soit</u> $Z(\omega)= \inf\{t>0,\ t\notin M(\omega)\}$. <u>Il existe une constante</u> $q\in[0,+\infty]$ <u>telle que</u> $P\{Z>t\} = e^{-qt}$ <u>pour tout</u> t. <u>Si</u> q=0, <u>on a p.s.</u> $M(\omega)=\mathbb{R}_+$. <u>Si</u> $0<q<\infty$, $M(\omega)$ <u>est p.s. la réunion d'une suite d'intervalles fermés disjoints. Si</u> $q=\infty$, $M(\omega)$ <u>a p.s. un intérieur vide</u>.

DÉMONSTRATION.- Z est évidemment un temps d'arrêt dont le graphe passe dans M, mais non dans $\underline{M}$, et on ne peut pas lui appliquer directement la propriété de régénération(**).

Tout d'abord, si $P\{Z=0\}>0$, on a Z=0 p.s. ; cela correspond au cas où $q=+\infty$. Supposons donc que $Z>0$ p.s. , et posons $\phi(s)=P\{Z>s\}$; c'est une fonction de s décroissante et continue à droite. Soit $A=\{Z>s\}$; A est $\underline{\underline{F}}_{s+}$-mesurable, et contenu dans la coupe de $\underline{M}$ par s . On peut donc lui appliquer la proposition 1 en prenant $B=\{Z>t\}$, et on en déduit que $\phi(s+t)=\phi(s)\phi(t)$, d'où $\phi(t)=e^{-qt}$.

Le cas où q=0 est trivial . Si $q=+\infty$, on montre que l'intérieur $\overset{o}{M}$ de M est p.s. vide, de la manière suivante. Tout d'abord, $\overset{o}{M}$ est un ensemble bien-mesurable par rapport à la famille $(\underline{\underline{F}}_{t+})$ (*). D'après le théorème de section des ensembles bien-mesurables, il est équivalent de montrer que $\overset{o}{M}$ est p.s. vide, ou que tout temps d'arrêt dont le graphe passe dans $\overset{o}{M}$ est p.s. égal à $+\infty$. Or soit T un tel temps d'arrêt ; comme $\overset{o}{M}\subset\underline{M}$, la propriété régénérative entraîne que $Z\circ\theta_T=0$ p.s. sur $\{T<\infty\}$, ce qui est absurde si $P\{T<\infty\}>0$.

Reste à traiter le cas où $0<q<\infty$. Posons $S_1=0$, $T_1=V_1=Z$. L'intervalle

(*) Pour les démonstrations (qui sont simples) voir <u>Invent.Math</u>.1, 1966, page 113.

(**) Lorsque $0<q<\infty$, la propriété de régénération est <u>fausse</u> pour Z.

$[S_1,T_1]$ est contenu dans M, et T_1 est le début d'un intervalle contigu à M. Posons alors $S_2=\inf\{t>T_1, t\in M\}$, $T_2=S_2+Z\circ\theta_{S_2}$, $V_2=Z\circ\theta_{S_2}$. La propriété de régénération s'applique à S_2 , et entraîne que l'intervalle $[S_2,T_2]$ n'est p.s. pas réduit à 0, qu'il est contenu dans M, que T_2 est le début d'un intervalle contigu à M, que V_2 est une v.a. exponentielle de paramètre q, indépendante de $\underline{\underline{F}}_{S_1+}$. En itérant ce procédé, on construit des variables aléatoires S_n, T_n, V_n telles que :

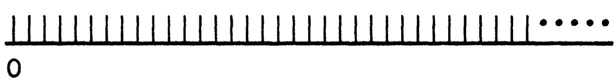
$[S_n,T_n]$ est un intervalle fermé contenu dans M, non réduit à 0. Les longueurs des intervalles S_n,T_n sont des variables aléatoires V_n positives, indépendantes et de même loi, exponentielle de paramètre q.

$]T_n,S_{n+1}[$ est un intervalle ouvert non vide ne rencontrant pas M. Les longueurs des intervalles $]T_n,S_{n+1}[$ sont des variables aléatoires positives, indépendantes et de même loi (non exponentielle en général !) , indépendantes des V_n.

Il est classique que dans ces conditions $S_n\to+\infty$ p.s.. Cette construction décrit donc entièrement M.

En résumé, nous obtenons la classification sommaire suivante des coupes de M :

1) q=0



toute la droite, cas trivial exclu par la suite.

2) q=+∞ , 0 isolé

c'est le cas des processus de renouvellement à temps continu. La structure de ce cas est bien connue. En particulier, il est classique que la fonction en dents de scie $A_{\bullet}(\omega)$ associée à M obéit à un processus de Markov homogène dans le temps (processus de l'âge).

3) q=+∞ , 0 non isolé

c'est de beaucoup le cas le plus intéressant, celui où M est un parfait d'intérieur vide. Il faut distinguer de plus entre les ensembles régénératifs dont les coupes sont p.s. des ensembles de mesure nulle au sens de Lebesgue (par ex. l'ensemble des zéros du mouvement brownien), et les ensembles régénératifs à coupes non négligeables (par ex. l'ensemble des visites d'une chaîne de Markov à un état instantané). Les ensembles étudiés par KINGMAN sont de ce dernier type.

4) $0<q<+\infty$

M est alors une réunion d'intervalles disjoints. La structure de ce cas est simple (voir la prop. 3), et nous ne nous y intéresserons pas beaucoup.

Nous pouvons maintenant énoncer, d'une manière un peu imprécise, le résultat fondamental d'HOFFMANN-JØRGENSEN : dans tous les cas, on peut construire un semi-groupe de Markov (P_t) sur $\mathbb{R}$, homogène dans le temps, tel que le processus en dents de scie (A_t) soit (pour la loi P sur Ω) un processus de Markov admettant (P_t) comme semi-groupe de transition . De plus, dans le cas intéressant où $q=+\infty$, ce semi-groupe est un " bon " semi-groupe de Markov sur $\mathbb{R}$.

§ 2 . CALCULS DE PROBABILITÉS

Nous allons maintenant décrire la structure probabiliste des ensembles régénératifs. Voici des notations fondamentales . Soit $a>0$, fini :

$S^a(\omega)$ est l'extrémité droite du premier intervalle contigu à $M(\omega)$ dont la longueur est $> a$ (éventuellement $+\infty$, si cet intervalle est non borné, ou s'il n'en existe pas).

$U^a(\omega)$ est l'extrémité gauche du même ($+\infty$ s'il n'en existe pas)

$V^a(\omega) = S^a(\omega)-U^a(\omega)$ est la longueur du même (0 s'il n'en existe pas)

$T^a(\omega) = U^a(\omega)+a$

Ces fonctions sont définies sur tout Ω (et non pas seulement sur l' ensemble des ω tels que $0\in M(\omega)$). Notons les propriétés immédiates suivantes :

LEMME 1.- T^a et S^a sont des temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}_{t+})$. Les fonctions $T^{\cdot}(\omega), S^{\cdot}(\omega)$, $V^{\cdot}(\omega)$ sont continues à droite sur $]0,\infty[$.

DEMONSTRATION.- Montrons par exemple la continuité à droite de $a\mapsto S^a(\omega)$. Il est clair que cette fonction est croissante. D'autre part,

$S^a(\omega)$ est par définition l'extrémité droite du premier intervalle contigu dont la longueur dépasse a strictement, donc $S^a(\omega)=S^{a+\varepsilon}(\omega)$ pour $\varepsilon>0$ assez petit.

La petite proposition auxiliaire que voici servira à simplifier la démonstration de la suivante :

PROPOSITION 4.- Ou bien $M(\omega)$ est p.s. borné, ou bien il est p.s. non borné.

DEMONSTRATION.- Supposons que la probabilité pour que $M(\omega)$ soit borné soit >0. Nous avons alors pour t assez grand

$$P\{S_t<\infty\} = h < 1$$

Construisons les temps d'arrêt $R_1=S_t$, $R_2=S_t+S_t\circ\theta_{S_t}$, etc. On a d'après la propriété régénérative $P\{R_n<\infty\} = h^n$, et il en résulte aussitôt que $M(\omega)$ est p.s. borné.

PROPOSITION 5.- Il existe un nombre $c\in]0,+\infty]$ tel que

$T^a(\omega) < \infty$ p.s. pour tout a fini $< c$,

$T^a(\omega) = +\infty$ p.s. pour tout $a\geqq c$.

DEMONSTRATION.- Il n'y a rien à démontrer si $M(\omega)$ est p.s. borné. Supposons donc (prop.4) que $M(\omega)$ soit p.s. non borné, fixons t. Nous avons

$$\{T^a=\infty\} = \{T^a>S_t\} \cap \{T^a\circ\theta_{S_t}=\infty\}$$

En effet, le premier membre est inclus dans le second. Inversement, si $T^a>S_t$ il n'y a aucun intervalle de longueur > a contenu dans M^c et situé à gauche de S_t ; si $T^a\circ\theta_{S_t}=\infty$ il n'y en a pas non plus à droite de S_t, et il ne peut pas y en avoir à cheval sur S_t ; donc $T^a=\infty$.

Appliquons maintenant la propriété de régénération. Le graphe de S_t passe dans $\underline{M}$, on a $\{T_a>S_t\}\in\underline{\underline{F}}_{S_t+}$, donc

$$P\{T^a=\infty\} = P\{T^a>S_t\}P\{T^a=\infty\}$$

En faisant tendre t vers $+\infty$ on voit que $P\{T^a=\infty\}=0$ ou 1, d'où l'existence de la coupure c. La continuité à droite au point c entraîne que $P\{T^c=\infty\}=1$. Bien entendu, comme le cas q=0 a été exclu, il y a effectivement des intervalles contigus à M, et on a $c>0$.

UN NOYAU FONDAMENTAL

Le noyau suivant détermine la structure probabiliste de l'ensemble régénératif M . Il donne la loi de la longueur du premier intervalle contigu de longueur > a .

DEFINITION.- $H(a,B) = P\{V^a \in B\}$ pour tout borélien B de $\bar{\mathbb{R}}_+$, si $a>0$. Si $a=0$, $H(a,B)=I_B(0)$.

On a pour toute fonction ϕ bornée sur $\bar{\mathbb{R}}_+$ $H(a,\phi)=E[\phi\circ V^a]$. Comme la fonction $a \mapsto V^a(\omega)$ est croissante et continue à droite, $H(.,\phi)$ est continue à droite sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ si ϕ est continue à droite. Si $q=\infty$ il y a des intervalles contigus arbitrairement voisins de 0, et donc de longueur arbitrairement petite, pour presque tout ω , donc $V^a(\omega)$ -> 0 p.s. lorsque a->0, et $H(.,\phi)$ est aussi continue à droite en 0.

PROPOSITION 6.- Posons $U^a_s = s+U^a\circ\theta_s$, $V^a_s = V^a\circ\theta_s$ (extrémité gauche et longueur du premier intervalle contigu de longueur > a placé à droite de s). Soient s,t deux nombres tels que s<t, K un élément de $\underline{\underline{F}}_{s+}$. Alors

(1) $$P\{ K, s<U^a_s \leqq t , V^a_s \in B\} = P\{K, s<U^a_s \leqq t\}.H(a,B) \quad .$$

(On peut évidemment remplacer " $\leqq t$ " par " $<t$ " dans les deux membres).

DEMONSTRATION.- Pour simplifier les notations, désignons par S (au lieu de S_s) le temps d'arrêt $\inf\{ u \geqq s : u \in M\}$. L'intervalle $]s,S[$ est contenu dans M^c ; si $U^a_s>s$, c'est que $S-s \leqq a$, et alors U^a_s est aussi l'extrémité gauche du premier intervalle contigu de longueur >a à droite de s. Ainsi, le premier membre s'écrit

$$P\{ K, S-s \leqq a , U^a\circ\theta_S \leqq t-S , V^a\circ\theta_S \in B \}$$

et le second membre

$$P\{ K, S-s \leqq a , U^a\circ\theta_S \leqq t-S \}. H(a,B)$$

L'ensemble $K\cap\{S-s \leqq a\}$ est $\underline{\underline{F}}_{S+}$-mesurable , et t-S est $\underline{\underline{F}}_{S+}$-mesurable. En approchant cette fonction par des fonctions étagées, on se ramène à vérifier que pour tout $c \in \mathbb{R}_+$ et tout $H \in \underline{\underline{F}}_{S+}$

$$P\{ H, U^a\circ\theta_S \leqq c , V^a\circ\theta_S \in B\} = P\{H,U^a\circ\theta_S \leqq c\}.H(a,B).$$

Tout d'abord, si $c=+\infty$, cette formule est vraie : elle se déduit de la propriété régénérative appliquée au temps d'arrêt S. Par différence, on est donc ramené à vérifier que

$$P\{H, U^a\circ\theta_S>c , V^a\circ\theta_S \in B\} = P\{H,U^a\circ\theta_S>c\}.H(a,B) \ .$$

Soit $R= \inf \{ t> S+c, t \in M \}$. Soit L l'événement { il n'y a aucun intervalle contigu de longueur >a entre S et S+c }. Soit T le dernier point de M sur $[0,R]$; l'événement $\{U^a \circ \theta_S > c\}$ s'écrit aussi $L \cap \{R-T \leqq a\}$, et si cet événement est réalisé on a $V^a \circ \theta_S = V^a \circ \theta_R$. Notre formule s'écrit donc

$$P([H \cap L \cap \{R-T \leqq a\}] \cap \{V^a \circ \theta_R \in B\}) = P(H \cap L \cap \{R-T \leqq a\}).H(a,B)$$

Or l'événement entre [ ] appartient à $\underline{\underline{F}}_{R+}$, et cette formule n'est rien d'autre que la propriété régénérative appliquée à R .

La proposition suivante est cruciale.

PROPOSITION 7.- <u>Pour tout</u> $t \geqq 0$, <u>toute fonction</u> ϕ <u>continue et bornée sur</u> $\overline{\mathbb{R}}_+$, <u>on a</u>

(1) $$E[\ \phi \circ V_t \mid \underline{\underline{F}}_t] = H(\ t-U_t\ ,\ \phi\ ) \ \underline{\text{p.s.}}$$

DEMONSTRATION.- Il suffit de démontrer (1) avec $\underline{\underline{F}}^o_t$ au lieu de $\underline{\underline{F}}_t$.

D'abord, il faut remarquer la signification intuitive de cette relation : l'intervalle $]U_t,V_t[$ est contigu à M , et c'est le premier intervalle contigu situé à droite de U_t, dont la longueur dépasse $t-U_t$. La proposition exprime que la loi de la longueur V_t de cet intervalle est donnée par le second membre, tout comme si l'on avait $U_t=0$, $t-U_t$ = constante.

La tribu $\underline{\underline{F}}^o_t$ est engendrée par les variables aléatoires U_s , $s \leqq t$. Choisissons des points $0=t_0 \leqq t_1 \ldots < t_{k-1} < t_k = t$; pour chaque $j=1 \ldots k$, choisissons un intervalle $]a_j,b_j]$, et désignons par K l'événement

$$\{\ U_{t_1} \in\ ]a_1,b_1],\ \ldots\ ,\ U_{t_k} \in]a_k,b_k]\ \}$$

Comme $U_s \leqq s$, on ne restreint pas la généralité en supposant que $b_j \leqq t_j$ pour tout j, ce que nous ferons par la suite.

La formule (1) équivaut à la relation

(2) $$\int_K \phi \circ V_t \, dP = \int_K H(t-U_t,\phi) dP$$

pour tout K du type précédent. Or on a trivialement

$$\int_{K \cap \{U_t=t\}} \phi \circ V_t \ dP = \int_{K \cap \{U_t=t\}} \phi(0) \ dP = \int_{K \cap \{U_t=t\}} H(0,\phi) \ dP$$

Il suffit donc de démontrer (2) en remplaçant K par $K \cap \{U_t<t\}$. Grâce à un passage à la limite immédiat, on se ramène à traiter (2) avec K remplacé par $K \cap \{U_t \leqq t'\}$, avec $t'<t$ - c'est à dire à un problème de même forme que le premier, mais avec $b_k<t$. <u>Nous supposons donc</u> $b_k<t$.

D'autre part, $]a_k,b_k]$ est la réunion des intervalles $]a_k,b_k] \cap]t_{j-1},t_j]$. <u>Nous pouvons donc aussi supposer que</u> $]a_k,b_k] \subset]t_{j-1},t_j]$ <u>pour un</u> $j \leq k$. La relation $U_{t_k} \leqq b_k \leqq t_j$ entraîne alors $U_{t_k} = U_{t_j}$, et K s'écrit

(3) $\{ U_{t_1} \in]a_1,b_1] \ldots U_{t_{j-1}} \in]a_{j-1},b_{j-1}] ; U_{t_k} = U_{t_j} \in]a,b] \}$

où $]a,b]$ est l'intersection des $]a_i,b_i]$ pour $i=j,\ldots,k$. Posons

$$t_{j-1} = u \ , \quad t_j = s$$

de sorte que $u<s\leqq t$. Comme $b_k<t$, on a $b<t$; comme $b_k \leqq t_j$, on a $b \leqq s$. Comme $a_k \geqq t_{k-1}$, on a $a \geqq t_{j-1} = u$. Désignons par L la partie de l'événement (3) jusqu'au ; , il est clair que $L \in \underline{\underline{F}}^o_u$, et on peut en fin de compte mettre K sous la forme plus simple

(4) $K = L \cap \{ U_t \in]a,b] \}$ avec $L \in \underline{\underline{F}}^o_a$, $a<b<t$

(noter que $U_t \leqq b \Rightarrow U_t \leqq s$, donc $U_t = U_s$). K étant mis sous cette forme, nous allons calculer le premier membre de (2). Choisissons une subdivision finie (r_n) de l'intervalle $]a,b]$, de pas $r< t-b$, et écrivons le premier membre de (2) sous la forme

(5) $$\sum_n \int_{L \cap \{U_t \in]r_n,r_{n+1}]} \phi \circ V_t \, dP$$

Comparons les ensembles $G_n = \{U_t \in]r_n,r_{n+1}]\}$, et $G'_n = \{U^{t-r_n}_{r_n} \in]r_n,r_{n+1}] \}$ (notation de la prop. 6). On a $G'_n \subset G_n$: en effet, si l'extrémité gauche du premier intervalle contigu de longueur $> t-r_n$ après r_n se trouve entre r_n et r_{n+1} , il n'existe aucun point de $M(\omega)$ entre r_{n+1} et t, mais il en existe entre r_n et t, donc $U_t \in]r_n,r_{n+1}]$. D'autre part, $G_n \setminus G'_n$ est composé d'éléments ω de Ω tels que $t \notin M(\omega)$ (sinon on aurait $U_t=t$!) mais que $[t,t+r]$ rencontre $M(\omega)$ (car l'intervalle contigu d'origine U_t a une longueur $\leqq t-r_n$). La différence entre (5) et

(6) $$\sum_n \int_{L \cap G'_n} \phi \circ V_t \, dP$$

vaut donc au plus $\| \phi \| . \sum_n P(G_n \setminus G'_n) = \| \phi \| . P(\bigcup_n (G_n \setminus G'_n)) \leqq \| \phi \| . P\{t<S_t \leqq t+r\}$, qui est arbitrairement petit si r est petit.

Calculons maintenant (6). Sur G'_n , nous avons $U_t = U^{t-r_n}_{r_n}$, et $V_t = V^{t-r_n}_{r_n}$. Nous pouvons donc appliquer la proposition 6, et obtenir pour (6) la valeur

$$(7) \qquad \sum_n \int_{L\cap G'_n} H(t-r_n,\phi)\, dP$$

Mais alors le même raisonnement que ci-dessus permet à nouveau de remplacer G'_n par G_n , à très peu près. Donc le premier membre de (2) diffère très peu, si r est assez petit, de

$$(8) \qquad \sum_n \int_{L\cap\{U_t\in]r_n,r_{n+1}\}} H(t-r_n,\phi)\, dP$$

Comme ϕ est continue, cette intégrale tend lorsque $r\to 0$ vers $\int_{L\cap\{U_t\in]a,b]\}} H(t-U_t,\phi)\, dP$, et la proposition est établie.

LE SEMI-GROUPE DE MARKOV

DEFINITIONS.- 1) <u>Nous posons</u> $F_t(B) = P\{A_t\in B\}$ <u>pour tout borélien</u> B <u>de</u> $\mathbb{R}_+$ (*). [nous écrirons souvent F(t,B) au lieu de $F_t(B)$]

2) <u>Nous posons si</u> $0<x<c$ (prop.5)

$$P_t(x,B) = P\{A_{T^x+t} \in B\}$$

<u>et si</u> $x\geqq c$, $P_t(x,B)= I_B(x+t)$, <u>si</u> $x=0$ $P_t(0,B)=P\{A_t\in B\}=F_t(B)$.

Nous verrons un peu plus tard que les P_t forment un semi-groupe de Markov. Noter que si $x\in[0,c[$, T^x est fini p.s., donc les noyaux P_t sont markoviens. On vérifie aussitôt que $P_0(x,.)=\varepsilon_x$.

Le lemme suivant exprime que les noyaux P_t sont " fellériens pour la topologie droite de $\mathbb{R}_+$ ", dans le cas intéressant où $q=+\infty$.

LEMME 2.- <u>Soit</u> f <u>une fonction continue à droite et bornée sur</u> $\mathbb{R}_+$.

1) P_tf <u>est continue à droite en tout point</u> $x\neq 0$, <u>et aussi en</u> 0 <u>si</u> $q=+\infty$.

2) $P_.(x,f)$ <u>est une fonction continue à droite pour tout</u> $x\in\mathbb{R}_+$

DEMONSTRATION.- Il suffit de traiter le cas où $x\in[0,c[$. Si $x>0$, et $x_n \downarrow x$, on a $T^{x_n} \downarrow T^x$, donc $t+T^{x_n} \downarrow t+T^x$ et enfin $A_{t+T^{x_n}} \to A_{t+T^x}$. Si x=0, en revanche, T^{x_n} décroît vers le temps d'arrêt Z de la prop.3,

(*) Noter que $A_t<c$ p.s., donc F_t est portée par $[0,c[$. De même $P_t(x,.)$ si $x<c$.

qui est égal à 0 si et seulement si $q=+\infty$. L'assertion 2) est évidente.

Dans les calculs à venir, nous aurons besoin du lemme suivant, qui est une extension immédiate de la propriété de régénération (par classes monotones).

LEMME 3.- Soit S un temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}_{T+})$, dont le graphe est contenu dans $\underline{\underline{M}}$, et soit G une fonction positive sur $\Omega\times\Omega$, mesurable par rapport à $\underline{\underline{F}}_{S+}\times\underline{\underline{F}}^{o}$. Alors, si $K\in\underline{\underline{F}}_{S+}$,

$$\int_{K\cap\{S<\infty\}} G(\omega,\theta_S\omega)\, P(d\omega) = \int_{K\cap\{S<\infty\}} P(d\omega')\int_{\Omega} G(\omega',\omega'')P(d\omega'') .$$

PROPOSITION 8.- $P_t(x,B) = \int_x^{x+t} F(t+x-w,B)H(x,dw) + I_B(x+t)H(x,]x+t,\infty])$

DEMONSTRATION.(*) $P_t(x,B)=P\{A_{T^x+t}\in B\} = P\{A_{T^x+t}\in B,\ t+T^x<S^x\} +$

$$+P\{A_{T^x+t}\in B,\ t+T^x\geqq S^x\} \qquad \text{si } x\in[0,c[$$

Dans l'intervalle $[U^x,S^x[$, et en particulier dans $[T^x,S^x[$, la fonction $A_{\bullet}(\omega)$ est linéaire. Donc le premier terme au dernier membre vaut, comme $A_{T^x}=x$

$$I_B(x+t)P\{t+T^x < S^x\} = I_B(x+t)P\{V^x>t+x \}$$

ce qui correspond au second terme dans l'énoncé. Pour le second terme au dernier membre, nous décomposons suivant la valeur w de V^x, comprise entre x et $t+x$ puisque $S^x\leqq t+T^x$; à la valeur w de V^x correspond la valeur $t+x-w$ de $t+T^x-S^x$. Autrement dit, nous appliquons le lemme 3 avec $S=S^x$, $K=\{S^x \leqq t+T^x \}$, et $G(\omega',\omega'')=I_{\{A_{t+T^x(\omega')-S^x(\omega')}(\omega'')\in B\}}$, en notant que $t+T^x-S^x= t+x-V^x$ est $\underline{\underline{F}}_S$-mesurable. Il vient

$$\int_{\{S^x\leqq t+T^x\}} I_{\{A_{t+T^x}\in B\}}dP = \int_{\{S^x\leqq t+T^x\}} P(d\omega)F(t+T^x(\omega)-S^x(\omega),B)$$

PROPOSITION 9.- $P\{A_{t+h}\in B \mid \underline{\underline{F}}_t,S_t\} = P\{A_{t+h}\in B\mid \underline{\underline{F}}_{t}\ ,\ V_t\} =$

$$= F(A_t+h-V_t,B)I_{\{V_t-A_t\leqq h\}} + I_B(A_t+h)I_{\{V_t-A_t>h\}} .$$

(*) Nous supposons $0<x<c$. Le cas où $x\geqq c$ est trivial, et le cas $x=0$ aussi.

DEMONSTRATION.- L'égalité des deux premières espérances résulte aussitôt du fait que $S_t - V_t = U_t$ est $\underline{\underline{F}}_t$-mesurable.

Prenons $J \in \underline{\underline{F}}_t$ et calculons , pour $D \in \underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)$

$$\int_{J\cap\{S_t>t+h\}\cap\{S_t\in D\}} I_{\{A_{t+h}\in B\}}\, dP + \int_{J\cap\{S_t\leq t+h\}\cap\{S_t\in D\}} I_{\{A_{t+h}\in B\}}\, dP$$

Dans la première intégrale, nous remplaçons A_{t+h} par A_t+h, S_t-t par V_t-A_t, et nous obtenons le second terme de l'expression de l'énoncé. Dans la seconde intégrale, nous appliquons le lemme 3, en y posant $S=S_t$, $K= J\cap\{S_t\in D\ [0,t+h]\}$, $G(\omega',\omega") = I_B\circ A_{t+h-S_t(\omega')}(\omega")$, et nous obtenons le premier terme cherché.

Nous pouvons prouver maintenant le résultat fondamental de HOFFMANN-JØRGENSEN : le caractère markovien homogène dans le temps du processus des âges.

THEOREME 1.- 1) $P\{A_{t+h}\in B \mid \underline{\underline{F}}_t\} = P_h(A_t,B)$ p.s.

2) Les noyaux P_t forment un semi-groupe de Markov sur $\mathbb{R}_+$.

3) Si $q=+\infty$, le semi-groupe (P_t) est fellérien pour la topologie droite de $\mathbb{R}_+$.

DEMONSTRATION.- Nous démontrons d'abord 1) :

$$P\{A_{t+h}\in B \mid \underline{\underline{F}}_t\} = E[P\{A_{t+h}\in B \mid \underline{\underline{F}}_t,V_t\} \mid \underline{\underline{F}}_t] =$$

$$E[\ F(A_t+h-V_t,B)I_{\{V_t-A_t\leq h\}}+ I_B(A_t+h)I_{\{V_t-A_t>h\}} \mid \underline{\underline{F}}_t\ ]$$

d'après la proposition 9. Mais la prop. 7 nous donne la loi conditionnelle de $V_t|\underline{\underline{F}}_t$: $P\{V_t\in dw \mid \underline{\underline{F}}_t\} = H(t-U_t, dw) = H(A_t, dw)$. En reportant cette valeur ici, nous obtenons

$$P\{A_{t+h}\in B|\underline{\underline{F}}_t\} = \int_t^{A_t+h} F(A_t+h-w,B)H(A_t,dw) + I_B(A_t+h)H(A_t,\ ]A_t+h,\infty\,])$$

c'est à dire $P_h(A_t,B)$ (proposition 8).

Nous allons démontrer d'abord 2) et 3) dans le cas"intéressant" où $q=+\infty$, et indiquer ensuite les modifications à faire lorsque $q<\infty$. Soit f une fonction continue à droite et bornée sur $\mathbb{R}_+$; si nous écrivons que $E[f\circ A_{t+u+v}|\underline{\underline{F}}_t]=E[f\circ A_{t+u+v}|\underline{\underline{F}}_{t+u}|\underline{\underline{F}}_t\ ]$, il vient que

(1) $\quad P_{u+v}f = P_u P_v f \quad F_t(.)$-p.p.

Mais les deux membres sont des fonctions continues à droite sur $\mathbb{R}_+$ (lemme 2), et pour montrer qu'ils sont égaux partout, il nous suffit de montrer que

pour tout intervalle $[a,b[$ $(0\leq a<b<c)$ il existe t tel que $F_t([a,b[)>0$.

(noter que tout est trivial sur $[c,\infty[$). Or comme $b<c$ nous avons p.s. $T^b<+\infty$, et le processus (A_s) prend p.s. des valeurs $>b$. Comme ses trajectoires sont continues sauf aux instants de passage par 0, l'ensemble des t rationnels tels que $A_t(\omega)\in[a,b[$ est p.s. non vide. Mais alors il existe un rationnel t tel que $F_t([a,b[)>0$.

Si $q=+\infty$, le semi-groupe est fellérien pour la topologie droite d'après le lemme 2, et l'énoncé est donc prouvé dans ce cas.

Passons au cas où $q<\infty$. Le seul point à démontrer est le fait que les P_t forment encore un semi-groupe, et (1) est encore valable. Or nous avons dans ce cas une variante évidente du lemme 2 : si f est bornée et continue à droite sauf en 0, $P_v f$ possède la même propriété. Le raisonnement fait plus haut montre alors que $P_{u+v}f=P_uP_vf$ sauf peut-être en 0, et pour montrer que l'égalité a lieu en 0 aussi il nous suffit de trouver un t tel que $F_t(\{0\})>0$. Mais ceci a lieu en fait pour tout t, puisque les trajectoires du processus (A_t) ne quittent 0 qu'après une durée exponentielle de paramètre q.

REMARQUES.- Tout processus de Markov (A_t) dont les trajectoires sont continues à droite, et dont le semi-groupe de transition est fellérien pour la topologie droite sur $\mathbb{R}_+$, est fortement markovien. Cela s'applique au processus considéré ici, lorsque $q=\infty$, et il résulte aisément de la propriété de Markov forte que <u>tout temps d'arrêt</u> T <u>dont le graphe passe p.s. dans</u> $M\setminus\underline{M}$ <u>est p.s. infini</u> . En conséquence, la propriété de régénération s'exprime alors plus simplement, puisqu'elle vaut pour tous les temps d'arrêt dont le graphe passe dans M.

Cela n'est pas vrai si $q<\infty$, mais il est facile dans ce cas de construire un autre processus de Markov (A'_t), fortement markovien, dont $\underline{M}$ est l'ensemble des zéros. Il suffit de poser

$$A'_t(\omega) = A_t(\omega) \text{ si } A_t(\omega)=0 \quad , \quad A'_t(\omega) = 1+A_t(\omega) \text{ si } A_t(\omega)\neq 0$$

Nous n'insisterons pas sur cette construction.

APPENDICE : RELATION AVEC LES SUBORDINATEURS

Nous allons d'abord montrer que " l'image d'un subordinateur est un ensemble régénératif" .

Désignons par W l'ensemble de toutes les applications croissantes et continues à droite $t \mapsto w(t)$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, telles que $w(0)=0$, et posons $w(t)=Z_t(w)$. Pour tout t, soit $\underline{\underline{G}}_t^o$ la tribu engendrée par les applications Z_s , $s \leq t$. Définissons sur W un opérateur de translation $\overline{\Theta}_t$ par

$$Z_s(\overline{\Theta}_t w) = Z_{s+t}(w)-Z_t(w) \ .$$

Nous munirons W d'une loi de probabilité Q (*) pour laquelle le processus (Z_t) est un <u>subordinateur</u> , i.e. un processus à accroissements indépendants, positifs et stationnaires. Pour tout $w \in W$, considérons l'ensemble

$$I(w) = \{ t \in \mathbb{R}_+ : \text{il existe } s \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } Z_s(w)=t \}$$

c'est à dire l'<u>image</u> dans $\mathbb{R}_+$ de la trajectoire w du subordinateur. C'est un ensemble fermé droit, et on vérifie aussitôt que $I(w)=\underline{I}(w)$ (les extrémités gauches non isolées d'intervalles contigus à I n' appartiennent pas à I). Nous allons montrer que I est régénératif. Ensuite, nous " montrerons" pourquoi on obtient (sans doute) ainsi le modèle le plus général d'ensemble régénératif.

D'abord, il faut construire une famille croissante de tribus pour laquelle I soit progressivement mesurable. A cet effet, nous adjoindrons d'abord aux $\underline{\underline{G}}_t^o$ tous les ensembles de mesure nulle de la tribu complétée sur W , ce qui nous donne des tribus $\underline{\underline{G}}_t$. Nous introduisons ensuite la fonction inverse de Z :

$$A_s(w) = \inf \{ r : Z_r(w)>s \}$$

A_s est un temps d'arrêt fini de la famille $(\underline{\underline{G}}_t)$, et le processus (A_s) est continu à droite. Il est classique aussi que la famille $(\underline{\underline{G}}_t)$ est continue à droite. Posons $\underline{\underline{H}}_s = \underline{\underline{G}}_{A_s}$; nous définissons ainsi une famille de tribus sur W, croissante et continue à droite. On montre aisément que si R est un temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{H}}_s)$, A_R est un temps d' arrêt de la famille $(\underline{\underline{G}}_s)$ (on peut se borner au cas où R est étagé, puis au cas où R ne prend que deux valeurs, t et $+\infty$; c'est alors

(*) Nous excluons le cas trivial où $Z_t(w)=0$ p.s. pour tout t. On a alors p.s. $\lim_{t \to \infty} Z_t(w) = +\infty$. On peut donc ajouter la condition $w(\infty)=\infty$ à la définition de W.

évident).

<u>Montrons que</u> I <u>est progressivement mesurable par rapport à la famille</u> $(\underline{\underline{H}}_t)$. Nous avons l'équivalence $(s\in I(w)) \Longleftrightarrow (Z_{A_s}(w)=s)$. Il nous suffit donc de montrer que pour tout t, l'application $(s,w) \mapsto Z_{A_s}(w)$ est mesurable de $\underline{\underline{B}}([0,t])\times\underline{\underline{H}}_t$ dans $\mathbb{R}_+$. Or cette application est composée de

$$(s,w) \mapsto (A_s(w),w) \quad \text{de } \underline{\underline{B}}([0,t])\times\underline{\underline{H}}_t \text{ dans } \underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\underline{\underline{H}}_t$$

$$(u,w) \mapsto Z_{u\wedge A_t}(w) \quad \text{de } \underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times \underline{\underline{H}}_t \text{ dans } \underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)$$

et ces deux applications sont mesurables, par continuité à droite.

Reprenons maintenant les notations du début de l'exposé : $\phi(w)$ est la fonction en dents de scie associée à I(w), c'est un élément de Ω, etc. Soit P la loi image de Q par ϕ. Soit T un temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}^o_{t+})$ dont le graphe passe dans $\underline{M}$, et soient $A\in\underline{\underline{F}}^o_{T+}$, $B\in\underline{\underline{F}}^o$.

Posons $T'=T\circ\phi$, $A'=\phi^{-1}(A)$, $B'=\phi^{-1}(B)$

T' est alors un temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{H}}_t)$, donc $S=A_{T'}$ est un temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{G}}_t)$. Comme le graphe de T passe dans $\underline{M}$, celui de T' passe dans I, et on a donc $Z_S=T'$. On a $A\in\underline{\underline{F}}^o_{T+}$, donc $A'\in \underline{\underline{H}}_T\subset\underline{\underline{G}}_S$. Enfin, on a $\phi^{-1}(\theta_T^{-1}B) = \overline{\theta}_S^{-1}(B')$. On a par conséquent

$$P(A\cap\theta_T^{-1}B) = Q(A'\cap\phi^{-1}\theta_T^{-1}B) = Q(A'\cap \overline{\theta}_S^{-1}B') = Q(A')Q(B') = P(A)P(B)$$

d'après la propriété de Markov forte du processus (Z_t). Le caractère régénératif de I est donc établi.

PROBLEME.- Quelles sont dans ce cas les relations entre 1) la représentation de LEVY du processus (Z_t), 2) Le semi-groupe (P_t) et le noyau fondamental H introduits par HOFFMANN-JØRGENSEN , 3) Les caractéristiques des ensembles régénératifs introduites par KRYLOV-YUSHKEVICH .

Voyons maintenant pourquoi l'on peut penser que tout ensemble régénératif peut être associé à un subordinateur de la manière précédente. Nous avons vu plus haut que tout ensemble régénératif peut être considéré comme l'ensemble des zéros d'un " honnête" processus de Markov (A_t). Si l'on vérifie que ce processus est assez honnête en effet pour que l'on puisse lui appliquer la théorie des fonctionnelles additives, il est possible de définir le <u>temps local</u> de $\{0\}$, fonctionnelle additive (L_t) dont l'ensemble des points de croissance coincide (à peu près) avec l'ensemble des zéros de (A_t), i.e. avec l'ensemble régénératif M . Mais alors il est bien connu (au moins si 0 est un point régulier, i.e. si $q=\infty$ et 0 est non isolé) que l'inverse du temps local est un subordinateur (Z_t), et M apparaît alors comme l'image du subordinateur (Z_t) (*).

BIBLIOGRAPHIE

[1] N.V.KRYLOV, A.A.YUSHKEVICH . Markov random sets. Trans.Moscow Math.Soc. 13 (1965), p.127-153.

[2] J.HOFFMANN-JØRGENSEN. Markov sets. Article à paraître (*) (actuellement disponible comme publication multigraphiée, Matematisk Institut, Aarhus Universitet, 1967/68).

Pour le point de vue de KINGMAN, on pourra consulter : A continuous time analogue of the theory of recurrent events, Bull.Amer.Math.Soc., 69, 1963, p.268-272 ; The stochastic theory of regenerative events , Z. fur W. 2, 1964, p.180-224 ; Some further analytical results in the theory of regenerative events , J.Math.Anal.Appl., 11, 1965, p.422-433.

Note sur les épreuves : l'article Markov sets de Hoffmann-Jørgensen est paru dans Math.Scand , 24, 1969, p. 145-166.

(*) Ce programme a été réalisé en Juin 1969 par B.MAISONNEUVE et Ph.MORANDO. Voir un exposé ultérieur à ce séminaire. J'ai appris par M.GETOOR que des résultats analogues ont été obtenus aux USA par M.HOROWITZ.