

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

HENRI CARTAN

Calcul du second membre de la formule d'Atiyah-Singer dans quelques cas importants : exposé introductif

Séminaire Henri Cartan, tome 16, n° 2 (1963-1964), exp. n° 18, p. 1-14

http://www.numdam.org/item?id=SHC_1963-1964__16_2_A3_0

© Séminaire Henri Cartan
(Secrétariat mathématique, Paris), 1963-1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

23 mars 1964

CALCUL DU SECOND MEMBRE DE LA FORMULE D'ATIYAH-SINGER

DANS QUELQUES CAS IMPORTANTS :

EXPOSÉ INTRODUCTIF

par Henri CARTAN

Tous les fibrés vectoriels considérés sont localement triviaux, à base paracompacte.

1. Classes de Chern et classes de Pontrjagin.

Envisageons les trois situations que voici :

Cas (a). - On suppose qu'à chaque fibré vectoriel complexe V on a associé un élément $\alpha(V) \in H^{**}(X_V; \mathbb{Q})$ (on note H^{**} le produit des H^n , c'est-à-dire le complété de la somme directe H^* ; et X_V désignera toujours l'espace de base du fibré V), et cela de façon fonctorielle : pour tout morphisme strict $V \rightarrow V'$, l'homomorphisme $H^{**}(X_{V'}; \mathbb{Q}) \rightarrow H^{**}(X_V; \mathbb{Q})$ qu'il définit envoie $\alpha(V')$ en $\alpha(V)$.

Cas (b). - On suppose qu'à chaque fibré vectoriel réel orienté V on a associé un élément $\beta(V) \in H^{**}(X_V; \mathbb{Q})$, de façon fonctorielle.

Cas (c). - On suppose qu'à chaque fibré réel V (orientable ou non) on a associé un élément $\gamma(V) \in H^{**}(X_V; \mathbb{Q})$, de façon fonctorielle.

Dans le cas (a), on peut conclure que $\alpha(V)$ s'exprime par une série formelle par rapport aux classes de Chern c_1, \dots, c_n du fibré V (n désignant la dimension complexe de V); cette série formelle est, bien entendu, à coefficients rationnels, et il s'agit des classes de Chern rationnelles, c'est-à-dire des images des $c_i \in H^{2i}(X_V; \mathbb{Z})$ dans $H^{2i}(X_V; \mathbb{Q})$, images qu'on notera encore c_i par abus de langage. Les coefficients de la série en question sont indépendants de V , pour une dimension n donnée; mais, a priori, il n'y a pas de relation entre les séries relatives à des dimensions n différentes.

Toutes ces assertions résultent aussitôt du fait que les classes de fibrés vectoriels complexes de dimension n et de base X donnée (paracompacte) correspondent bijectivement aux classes d'homotopie d'applications continues de X dans l'espace classifiant $BU(n)$, noté aussi $G_n(\mathbb{C})$ (grassmannienne des sous-espaces vectoriels complexes de dimension n de \mathbb{C}^∞). Il suffit alors de savoir que l'algèbre de cohomologie $H^*(G_n(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$ est l'algèbre des polynômes (à coefficients

entiers) en les classes de Chern c_1, \dots, c_n du fibré universel noté $\chi(n)$ dans l'exposé 5 ; nous le noterons ici $E_n(\underline{\mathbb{C}})$. De là résulte que $H^*(G_n(\underline{\mathbb{C}}); \underline{\mathbb{Q}})$ est l'algèbre des polynômes à coefficients rationnels en c_1, \dots, c_n .

Le cas (c), resp. (b), est de même justiciable du calcul de l'algèbre de cohomologie $H^*(G_n(\underline{\mathbb{R}}); \underline{\mathbb{Q}})$, resp. $H^*(\tilde{G}_n(\underline{\mathbb{R}}); \underline{\mathbb{Q}})$, en notant $G_n(\underline{\mathbb{R}})$ la grassmannienne des sous-espaces vectoriels (réels) de dimension n de $\underline{\mathbb{R}}^\infty$, et $\tilde{G}_n(\underline{\mathbb{R}})$ son revêtement d'ordre 2 (grassmannienne des n -sous-espaces vectoriels orientés de $\underline{\mathbb{R}}^\infty$). Avant de rappeler la structure de ces deux algèbres, donnons la définition des classes de Pontrjagin $p_i(V) \in H^{4i}(X_V; \underline{\mathbb{Z}})$ d'un fibré vectoriel réel V (non supposé orienté, ni même orientable). Soit $V \otimes \underline{\mathbb{C}}$ le complexifié de V ; on pose

$$p_i(V) = (-1)^i c_{2i}(V \otimes \underline{\mathbb{C}}).$$

On notera aussi p_i l'image de p_i dans la cohomologie à coefficients rationnels $H^{4i}(X_V; \underline{\mathbb{Q}})$. Les $p_i(V)$ sont fonctorielles en V . On démontre (cf. Appendice, § 7) que les algèbres $H^*(G_{2n}(\underline{\mathbb{R}}); \underline{\mathbb{Q}})$ et $H^*(G_{2n+1}(\underline{\mathbb{R}}); \underline{\mathbb{Q}})$ sont des algèbres de polynômes engendrées par les classes de Pontrjagin p_1, \dots, p_n du fibré universel $E_{2n}(\underline{\mathbb{R}})$ de base $G_{2n}(\underline{\mathbb{R}})$, resp. du fibré universel $E_{2n+1}(\underline{\mathbb{R}})$ de base $G_{2n+1}(\underline{\mathbb{R}})$. De plus, l'application de revêtement $\tilde{G}_{2n+1}(\underline{\mathbb{R}}) \rightarrow G_{2n+1}(\underline{\mathbb{R}})$ induit un isomorphisme d'algèbres :

$$H^*(G_{2n+1}(\underline{\mathbb{R}}); \underline{\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\cong} H^*(\tilde{G}_{2n+1}(\underline{\mathbb{R}}); \underline{\mathbb{Q}}).$$

La situation est un peu moins simple dans le cas de la grassmannienne $\tilde{G}_{2n}(\underline{\mathbb{R}})$; le fibré universel $\tilde{E}_{2n}(\underline{\mathbb{R}})$ de base $\tilde{G}_{2n}(\underline{\mathbb{R}})$ a une classe d'Euler $\chi_n \in H^{2n}(\tilde{G}_{2n}(\underline{\mathbb{R}}); \underline{\mathbb{Z}})$, dont le carré n'est autre que la classe de Pontrjagin p_n de ce fibré, (cf. Appendice, prop. 1), et on montre que $H^*(\tilde{G}_{2n}(\underline{\mathbb{R}}); \underline{\mathbb{Q}})$ est l'algèbre des polynômes en χ_n et les classes de Pontrjagin p_1, \dots, p_{n-1} de ce fibré universel. Autrement dit, l'homomorphisme d'algèbres

$$H^*(G_{2n}(\underline{\mathbb{R}}); \underline{\mathbb{Q}}) \rightarrow H^*(\tilde{G}_{2n}(\underline{\mathbb{R}}); \underline{\mathbb{Q}})$$

est une injection qui identifie la première algèbre à la sous-algèbre de la seconde engendrée par les générateurs p_1, \dots, p_{n-1} et le carré p_n du générateur χ_n .

Ceci étant rappelé, il est clair que, dans le cas (b), $\beta(V)$, pour un fibré orienté V à fibres de dimension $2n+1$, s'exprime par une série formelle en les classes de Pontrjagin p_1, \dots, p_n de V , à coefficients rationnels indépendants de V . Et pour un fibré orienté V à fibres de dimension $2n$, $\beta(V)$ s'exprime

par une série formelle en les classes de Pontrjagin p_1, \dots, p_{n-1} de V et en la classe d'Euler $\chi_n(V)$, dont le carré est $p_n(V)$.

Dans le cas (c), $\gamma(V)$, pour un fibré V à fibres de dimension $2n + 1$, s'exprime par une série formelle en les classes de Pontrjagin p_1, \dots, p_n de V , à coefficients rationnels indépendants de V ; et il en est encore ainsi pour un fibré V à fibres de dimension $2n$.

2. Fonctions multiplicatives.

On va maintenant imposer une condition multiplicative dans chacun des trois cas (a), (b), (c) ci-dessus. Dans le cas (a), on pose la condition

$$(M) \quad \alpha(V \oplus V') = \alpha(V) \cup \alpha(V') ;$$

ici, $V \oplus V'$ désigne, conformément à nos conventions générales, la somme directe externe, qui a pour base le produit $X_V \times X_{V'}$; et au second membre il s'agit du cup-produit externe, élément de $H^{**}(X_V \times X_{V'}; \mathbb{Q})$. On formule de manière analogue la condition multiplicative (M) dans chacun des cas (b) et (c).

Donnons tout de suite des exemples.

Exemple 1 (cas (a)). - On prend pour $\alpha(V)$ la classe totale de Chern

$$c(V) = 1 + c_1(V) + \dots + c_n(V) + \dots$$

(rappelons que $c_i(V) = 0$ si $i > n$, $n =$ dimension des fibres de V). La propriété (M) est la propriété multiplicative de $c(V)$ (Exposé 4, théorème 4.2, page 4-09).

Exemple 2 (cas (a)). - On prend pour $\alpha(V)$ la classe de Todd $\tau(V)$ du fibré complexe V (cf. Exposé 6, page 6-07); sa "série génératrice" est $x(1 - e^{-x})^{-1}$. Rappelons (cf. Exposé 6, Appendice) que la classe de Todd $\tau(V)$ est l'unique fonction multiplicative $\alpha(V)$ qui, lorsque V est le fibré tangent à l'espace projectif $P_{2n}(\mathbb{C})$, prend la valeur 1 sur la classe fondamentale d'homologie de $P_{2n}(\mathbb{C})$ (orienté par la structure complexe), et ceci pour tout entier $n \geq 0$.

Exemple 3 (cas (b)). - On prend pour $\beta(V)$ la classe d'Euler $\chi(V)$ (à coefficients rationnels) du fibré réel orienté V ; elle est nulle si les fibres de V sont de dimension impaire (car alors la classe d'Euler à coefficients entiers est nulle ou d'ordre 2). La propriété $\chi(V \oplus V') = \chi(V) \cup \chi(V')$ est bien vraie (cf. Exposé 4, 2.3, (b)).

Exemple 4 (cas (c)). - On prend pour $\gamma(V)$ la classe de Todd $\tau(V \otimes \mathbb{C})$ du

complexifié de V (voir § 5 ci-dessous).

3. Calcul des fonctions multiplicatives dans le cas (a).

Définition. - Soit donné, dans le cas (a), un $\alpha(V)$ fonctoriel et multiplicatif. On appelle série génératrice de α la série formelle

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \quad (\text{à coefficients } a_n \text{ rationnels}),$$

qu'on obtient en calculant $\alpha(V)$ pour le fibré universel $V = E_1(\mathbb{C})$, noté aussi $\chi(1)$ (de base $G_1(\mathbb{C})$, à fibres de dimension complexe 1), à l'aide de sa classe de Chern x , laquelle est un générateur de l'algèbre de polynômes

$$H^*(G_1(\mathbb{C}); \mathbb{Q});$$

x est de degré 2 (cf. Exposé 5, proposition 2.2.2).

THÉORÈME 1. - Dans le cas (a), la connaissance de la série génératrice $A(x)$ détermine $\alpha(V)$ pour tout fibré vectoriel complexe V , de dimension n , par le procédé suivant : on exprime le produit

$$A(x_1) A(x_2) \dots A(x_n)$$

comme série formelle par rapport aux fonctions symétriques élémentaires de x_1, \dots, x_n :

$$c_1 = x_1 + \dots + x_n, \quad c_2 = \sum_{i < j} x_i x_j, \quad \dots, \quad c_n = x_1 x_2 \dots x_n,$$

ce qui donne une série $\alpha(c_1, \dots, c_n)$: c'est l'élément cherché de $\alpha(V)$, c_1, \dots, c_n désignant alors les classes de Chern du fibré V .

Démonstration. - Il suffit de prouver la formule lorsque V est le fibré universel $E_n(\mathbb{C})$ de base $G_n(\mathbb{C})$. Considérons la somme directe externe de n exemplaires du fibré $E_1(\mathbb{C})$ de base $G_1(\mathbb{C})$; il définit une application

$$(1) \quad \overbrace{G_1(\mathbb{C}) \times \dots \times G_1(\mathbb{C})}^{n \text{ fois}} \rightarrow G_n(\mathbb{C})$$

qui, en cohomologie, envoie les classes de Chern de $G_n(\mathbb{C})$ dans celles du produit des n exemplaires de $G_1(\mathbb{C})$. On a déjà vu (Exposé 4) que ceci identifie l'algèbre $H^*(G_n(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$ à la sous-algèbre des polynômes symétriques en x_1, \dots, x_n , en désignant par x_i le générateur de la cohomologie du i -ième espace facteur $G_1(\mathbb{C})$. Dans l'homomorphisme des algèbres de cohomologie (à coefficients rationnels,

cette fois), $\alpha(E_n(\mathbb{C}))$ va dans le produit des $\alpha(E_1(\mathbb{C}))$ relatifs aux n espaces facteurs, puisque par hypothèse α possède la propriété multiplicative (M). Autrement dit, $\alpha(E_n(\mathbb{C}))$ va dans le produit $A(x_1) A(x_2) \dots A(x_n)$, et ceci prouve le théorème.

Remarque. - Inversement, étant donnée une série arbitraire $A(x)$, à coefficients rationnels, elle définit un $\alpha(V)$ multiplicatif.

4. Calcul des fonctions multiplicatives dans les cas (b) et (c).

Il convient d'abord de comparer les grassmanniennes réelles et les grassmanniennes complexes. Si dans le fibré complexe $E_n(\mathbb{C})$ on oublie la structure complexe, on obtient un fibré réel à fibres orientées de dimension $2n$; d'où une application

$$(2) \quad G_n(\mathbb{C}) \rightarrow \tilde{G}_{2n}(\mathbb{R}),$$

d'ailleurs facile à expliciter géométriquement. Par composition avec l'application (1), on obtient

$$(3) \quad \overbrace{G_1(\mathbb{C}) \times \dots \times G_1(\mathbb{C})}^{n \text{ fois}} \rightarrow \tilde{G}_{2n}(\mathbb{R}).$$

Si on passe à la cohomologie, (3) définit un homomorphisme de $H^*(\tilde{G}_{2n}(\mathbb{R}); \mathbb{Z})$ dans l'algèbre des polynômes $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$; cet homomorphisme envoie la classe de Pontrjagin p_i dans la i -ième fonction symétrique élémentaire de $(x_1)^2, \dots, (x_n)^2$ et envoie la classe d'Euler dans le produit $x_1 \dots x_n$ (cf. Appendice, § 6 ci-dessous). Si on passe à la cohomologie rationnelle, on voit que (3) identifie $H^*(\tilde{G}_{2n}(\mathbb{R}); \mathbb{Q})$ à la sous-algèbre formée des polynômes symétriques de x_1, \dots, x_n qui s'expriment comme polynômes en les $(x_i)^2$ et en $x_1 \dots x_n$. En particulier, la classe de Pontrjagin p_1 du fibré réel sous-jacent à $E_1(\mathbb{C})$ (de base $G_1(\mathbb{C})$) est le carré x^2 de la classe de Chern x de $E_1(\mathbb{C})$.

Définition. - Soit donné, dans le cas (b), un $\beta(V)$ fonctoriel; et supposons que la condition multiplicative

$$(M) \quad \beta(V \oplus V') = \beta(V) \cup \beta(V')$$

soit vérifiée lorsque V et V' sont des fibrés vectoriels orientés à fibres de dimension paire. On appelle alors série génératrice de β la série formelle

$$B(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n$$

à coefficients rationnels b_n , obtenue en calculant $\beta(V)$ pour le fibré réel

orienté sous-jacent à $E_1(\mathbb{C})$, à l'aide de la classe de Chern x de $E_1(\mathbb{C})$.

THÉORÈME 2.

(i) On suppose que la condition (M) est vérifiée chaque fois que V et V' sont des fibrés réels orientés à fibres de dimension paire. Alors la série génératrice $B(x)$ est soit paire (i. e. $B(-x) = B(x)$), soit impaire (i. e. $B(-x) = -B(x)$).

Pour un fibré orienté V à fibres de dimension $2n$, $\beta(V)$ se calcule comme suit : si $B(x)$ est paire, $\beta(V)$ est une série formelle $\beta(p_1, \dots, p_n)$ par rapport aux classes de Pontrjagin $p_i(V)$, qu'on obtient en exprimant le produit $B(x_1) \dots B(x_n)$ comme série en les fonctions symétriques élémentaires p_i des $(x_i)^2$; si $B(x)$ est impaire, $\beta(V)$ est une série formelle en la classe d'Euler $\chi_n(V)$ et les classes de Pontrjagin $p_1(V), \dots, p_{n-1}(V)$, qu'on obtient en exprimant le produit $B(x_1) \dots B(x_n)$ comme série formelle en le produit $x_1 \dots x_n = \chi$ et en les fonctions symétriques élémentaires p_1, \dots, p_{n-1} des $(x_i)^2$.

(ii) Si en outre la relation multiplicative (M) est vraie lorsque V est un fibré orienté à fibres de dimension paire, et V' un fibré trivial à fibres de dimension 1, alors, si $B(x)$ est impaire, $\beta(V) = 0$ pour tout fibré orienté V à fibres de dimension impaire; si $B(x)$ est paire, on a, pour un fibré orienté V à fibres de dimension $2n + 1$,

$$\beta(V) = b \cdot \beta(p_1, \dots, p_n),$$

où $\beta(p_1, \dots, p_n)$ désigne la série définie en (i), et b la constante rationnelle, valeur de $\beta(V')$ pour V' trivial à fibres de dimension 1.

Démonstration.

(i) Il suffit de prouver les formules lorsque V est le fibré universel $\tilde{E}_{2n}(\mathbb{R})$, de base $\tilde{G}_{2n}(\mathbb{R})$. L'application (3) montre que, si on identifie $H^{**}(\tilde{G}_{2n}(\mathbb{R}); \mathbb{Q})$ à l'algèbre des séries formelles symétriques en x_1, \dots, x_n qui s'expriment à l'aide du produit $x_1 \dots x_n$ et des fonctions symétriques élémentaires p_i des $(x_i)^2$, $\beta(\tilde{E}_{2n}(\mathbb{R}))$ est égal au produit $B(x_1) \dots B(x_n)$, où B désigne la série génératrice. On va voir que ceci impose des conditions à la série $B(x)$. Laissons de côté le cas trivial où $B(x)$ est identiquement nulle; on peut alors multiplier B par une constante rationnelle $\neq 0$, de façon que B prenne la forme

$$B(x) = x^k B'(x), \quad k \text{ entier } \geq 0, \quad B'(0) = 1.$$

Alors $B'(x)$ s'obtient en remplaçant, dans le produit $B'(x_1) \dots B'(x_n)$, x_1 par x , et x_2, \dots, x_n par 0. Pour $n \geq 2$, cela revient à remplacer dans

$\beta(\chi_n, p_1, \dots, p_{n-1})$, χ_n par 0, p_1 par x^2 , et p_2, \dots, p_{n-1} par 0. Il s'ensuit que $B(x)$ est une série en x^2 . Donc $B(x)$ est paire si l'entier k est pair, impaire si k est impair. Réciproquement, si $B(x)$ est une série paire, le produit $B(x_1) \dots B(x_n)$ s'exprime d'une seule manière comme série en les fonctions symétriques élémentaires p_1, \dots, p_n des $(x_i)^2$; et si $B(x)$ est impaire, le même produit s'exprime d'une seule manière comme produit d'une série en p_1, \dots, p_n par $\chi_n = x_1 \dots x_n$ (observons à nouveau que $p_n = (\chi_n)^2$).

(ii) Pour calculer $\beta(V)$ pour un fibré orienté V à fibres de dimension $2n + 1$, il suffit de faire le calcul lorsque V est le fibré universel $\tilde{E}_{2n+1}(\mathbb{R})$, de base $\tilde{G}_{2n+1}(\mathbb{R})$. Considérons la somme directe externe du fibré $\tilde{E}_{2n}(\mathbb{R})$ et du fibré trivial de dimension 1, à base ponctuelle; ce fibré est image réciproque du fibré $\tilde{E}_{2n+1}(\mathbb{R})$ par l'injection canonique

$$i : \tilde{G}_{2n}(\mathbb{R}) \rightarrow \tilde{G}_{2n+1}(\mathbb{R}),$$

et la propriété multiplicative (M) montre que

$$i^*(\beta(\tilde{E}_{2n+1}(\mathbb{R}))) = b \cdot \beta(\tilde{E}_{2n}(\mathbb{R})),$$

où b désigne la constante rationnelle, valeur de $\beta(V')$ pour le fibré trivial V' de dimension 1, à base ponctuelle. Or i^* est une injection qui permet d'identifier $H^{**}(\tilde{G}_{2n+1}(\mathbb{R}); \mathbb{Q})$ à une sous-algèbre de $H^{**}(\tilde{G}_{2n}(\mathbb{R}); \mathbb{Q})$ (cf. § 1, et ci-dessous § 7). Ceci prouve que si $b = 0$, $\beta(V)$ est nul pour tout fibré orienté V de dimension impaire. Si $b \neq 0$, la relation précédente montre que $\beta(\tilde{E}_{2n}(\mathbb{R}))$ ne dépend pas de la classe d'Euler χ_n (mais seulement des classes de Pontrjagin p_1, \dots, p_n); donc la série génératrice $B(x)$ est paire. Ceci achève la démonstration du théorème 2.

Il reste à faire l'étude du cas (c) des fibrés réels (non orientés). Lorsque $\gamma(V)$ possède la propriété (M) pour les fibrés à fibres de dimension paire, on définit encore la série génératrice $C(x)$, qu'on obtient en calculant $\gamma(V)$ pour le fibré réel sous-jacent à $E_1(\mathbb{C})$. On obtient le théorème suivant (dont la démonstration est laissée au lecteur) :

THÉORÈME 3.

(i) On suppose que la condition (M) $[\gamma(V \oplus V') = \gamma(V) \cup \gamma(V')]$ est vérifiée lorsque V et V' ont leurs fibres de dimension paire; alors la série génératrice $C(x)$ est paire, et si V est à fibres de dimension $2n$, $\gamma(V)$ se calcule

en exprimant le produit $C(x_1) \dots C(x_n)$ comme série formelle $\gamma(p_1, \dots, p_n)$ en les fonctions symétriques élémentaires des $(x_i)^2$.

(ii) Si en outre la relation multiplicative (M) est vraie lorsque V est un fibré à fibres de dimension paire, et V' un fibré trivial à fibres de dimension 1, alors, pour un fibré V à fibres de dimension $2n + 1$, on a

$$\gamma(V) = c \cdot \gamma(p_1, \dots, p_n),$$

où $\gamma(p_1, \dots, p_n)$ désigne la série définie en (i), et c la constante rationnelle, valeur de $\gamma(V')$ pour V' trivial de dimension 1.

5. Exemple : Calcul de la classe de Todd $\tau(V \otimes \underline{\mathbb{C}})$, pour tout fibré vectoriel réel V .

Ce cas est justiciable du théorème 3. Avec les notations de ce théorème, on a $c = 1$ (classe de Todd d'un fibré complexe trivial de dimension complexe 1). La série génératrice $C(x)$ est paire ; on l'obtient en calculant la classe de Todd $\tau(V \otimes \underline{\mathbb{C}})$ lorsque V est le fibré réel sous-jacent à $E_1(\underline{\mathbb{C}})$, de base $G_1(\underline{\mathbb{C}})$. Alors $V \otimes \underline{\mathbb{C}}$ est un isomorphe, comme fibré complexe, à la somme directe (interne) de $E_1(\underline{\mathbb{C}})$ et de son conjugué $\bar{E}_1(\underline{\mathbb{C}})$ (cf. Appendice, prop. 2). On a donc

$$\tau(V \otimes \underline{\mathbb{C}}) = \tau(E_1(\underline{\mathbb{C}})) \cdot \tau(\bar{E}_1(\underline{\mathbb{C}})) \quad (\text{cup-produit interne}).$$

Par définition, $\tau(E_1(\underline{\mathbb{C}})) = x(1 - e^{-x})^{-1}$, x désignant la classe de Chern de $E_1(\underline{\mathbb{C}})$. On a donc $\tau(\bar{E}_1(\underline{\mathbb{C}})) = -x(1 - e^x)^{-1}$ (la classe de Chern de $\bar{E}_1(\underline{\mathbb{C}})$ est opposée à celle de $E_1(\underline{\mathbb{C}})$). D'où

$$C(x) = x^2 (e^{x/2} - e^{-x/2})^{-2} = \left(\frac{x}{2 \operatorname{Sh} \frac{x}{2}} \right)^2.$$

Telle est la série génératrice de $\tau(V \otimes \underline{\mathbb{C}})$; elle permet de calculer la classe de Todd $\tau(V \otimes \underline{\mathbb{C}})$ à l'aide des classes de Pontrjagin p_i du fibré réel V ; on trouve

$$1 - \frac{1}{12} p_1 - \frac{1}{720} (p_2 - 3 p_1^2) - \frac{1}{60480} (2 p_3 - 9 p_1 p_2 + 10 p_1^3) + \dots$$

Appendice

6. Classes de Pontrjagin et fonctions symétriques.

Nous rappelons la définition des classes de Pontrjagin $p_i(V)$ d'un fibré vectoriel réel V , donnée dans le texte :

$$p_i(V) = (-1)^i c_{2i}(V \otimes \underline{\mathbb{C}}) \in H^{4i}(X_V; \underline{\mathbb{Z}}).$$

(Dans ce paragraphe, on considère les classes de Pontrjagin dans la cohomologie à coefficients entiers.) La classe totale de Pontrjagin est

$$p(V) = \sum_{i \geq 0} p_i(V); \quad p_0(V) = 1, \quad p_i(V) = 0$$

si les fibres de V sont de dimension $< 2i$.

On pose aussi

$$\chi(V) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i p_i(V) = \sum_{i \geq 0} c_{2i}(V \otimes \underline{\mathbb{C}}).$$

PROPOSITION 1. - Soit V un fibré réel orienté à fibres de dimension $2n$; on a

$$p_n(V) = (\chi(V))^2,$$

$\chi(V)$ désignant la classe d'Euler.

En effet,

$$p_n(V) = (-1)^n c_{2n}(V \otimes \underline{\mathbb{C}}) = (-1)^n \chi(V \otimes \underline{\mathbb{C}});$$

or, le complexifié $V \otimes \underline{\mathbb{C}}$, muni de son orientation naturelle, est isomorphe à $V \oplus V$ (somme directe interne); les orientations de ces deux fibrés sont les mêmes si n est pair, opposées si n est impair. D'où

$$p_n(V) = \chi(V \oplus V) = (\chi(V))^2.$$

PROPOSITION 2. - Soit V un fibré vectoriel complexe; notons $V_{\mathbb{R}}$ le fibré réel sous-jacent, et soit $V_{\mathbb{R}} \otimes \underline{\mathbb{C}}$ son complexifié. Alors $V_{\mathbb{R}} \otimes \underline{\mathbb{C}}$ est isomorphe à $V \oplus \bar{V}$, somme directe (interne) de V et de son conjugué.

En effet, $V_{\mathbb{R}} \otimes \underline{\mathbb{C}}$ est isomorphe à $V_{\mathbb{R}} \oplus V_{\mathbb{R}}$, où la structure complexe est définie par

$$i \cdot (x, y) = (-y, x).$$

L'application $x \rightarrow (x, -ix)$ de V dans $V_{\mathbb{R}} \oplus V_{\mathbb{R}}$ est un isomorphisme du fibré (complexe) V sur un sous-fibré (complexe) de $V_{\mathbb{R}} \oplus V_{\mathbb{R}}$; de même, l'application $x \rightarrow (x, ix)$ est un isomorphisme du fibré (complexe) \bar{V} sur un sous-fibré (complexe) de $V_{\mathbb{R}} \oplus V_{\mathbb{R}}$. Et on vérifie aussitôt que $V_{\mathbb{R}} \oplus V_{\mathbb{R}}$ est somme directe des images de V et \bar{V} .

COROLLAIRE 1. - $\check{p}(V_{\mathbb{R}}) = c(V) \cdot c(\bar{V})$ (cup-produit interne), en notant $c(V)$ la classe totale de Chern de V .

En effet, on sait que

$$c(\bar{V}) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i c_i(V) ;$$

d'où

$$c_n(V_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}) = \sum_{i+j=n} (-1)^j c_i(V) c_j(V) ,$$

ce qui montre que $c_n(V_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}) = 0$ pour n impair, d'où

$$\check{p}(V_{\mathbb{R}}) = \sum_{n \geq 0} c_{2n}(V_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}) = c(V) \cdot c(\bar{V}) .$$

COROLLAIRE 2. - Si V et W sont deux fibrés complexes, on a

$$\check{p}(V_{\mathbb{R}} \oplus W_{\mathbb{R}}) = \check{p}(V_{\mathbb{R}}) \cup \check{p}(W_{\mathbb{R}}) ,$$

d'où

$$\check{p}(V_{\mathbb{R}} \oplus W_{\mathbb{R}}) = \check{p}(V_{\mathbb{R}}) \cup \check{p}(W_{\mathbb{R}}) .$$

(il s'agit ici de somme directe externe, et de cup-produit externe).

On va appliquer le corollaire 2 à la somme directe (externe) de n exemplaires du fibré réel sous-jacent à $E_1(\mathbb{C})$ (fibré universel de base $G_1(\mathbb{C})$) : si on note x_i la classe de Chern (de degré 2) du i -ième facteur $E_1(\mathbb{C})$, on sait que la cohomologie de

$$G_1(\mathbb{C}) \times \dots \times G_1(\mathbb{C})$$

s'identifie à l'algèbre des polynômes (à coefficients entiers) en x_1, \dots, x_n . Or la classe \check{p} du i -ième fibré est, d'après le corollaire 1, égale à

$$(1 + x_i)(1 - x_i) = 1 - (x_i)^2 ;$$

Donc la classe p du i -ième fibré est $1 + (x_i)^2$; d'après le corollaire 2, la classe totale de Pontrjagin de la somme directe est

$$p = \prod_{i=1}^n (1 + (x_i)^2) .$$

D'où la proposition suivante :

PROPOSITION 3. - La i -ième classe de Pontrjagin p_i de la somme directe (externe) de n exemplaires du fibré réel sous-jacent à $E_1(\mathbb{C})$ est égale à la i -ième fonction symétrique élémentaire de $(x_1)^2, \dots, (x_n)^2$ (éléments de la cohomologie de $G_1(\mathbb{C}) \times \dots \times G_1(\mathbb{C})$).

Reprenons alors l'application (1) du § 3 :

$$\overbrace{G_1(\mathbb{C}) \times \dots \times G_1(\mathbb{C})}^{n \text{ fois}} \rightarrow G_n(\mathbb{C}) ;$$

on voit que le fibré réel sous-jacent à $E_n(\mathbb{C})$ a pour classe de Pontrjagin p_i la i -ième fonction symétrique élémentaire des carrés $(x_1)^2, \dots, (x_n)^2$, lorsqu'on identifie $H^*(G_n(\mathbb{C}) ; \mathbb{Z})$ à l'algèbre des polynômes symétriques en x_1, \dots, x_n .

Considérons maintenant les applications canoniques

$$\overbrace{G_1(\mathbb{C}) \times \dots \times G_1(\mathbb{C})}^{n \text{ fois}} \rightarrow G_n(\mathbb{C}) \rightarrow \tilde{G}_{2n}(\mathbb{R}) \rightarrow G_{2n}(\mathbb{R}) ;$$

les homomorphismes qu'elles induisent sur les algèbres d'homologie (à coefficients dans \mathbb{Z}), et le fait que les classes de Pontrjagin sont fonctorielles, montrent que :

PROPOSITION 4. - Par les homomorphismes naturels

$$H^*(G_{2n}(\mathbb{R}) ; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(\tilde{G}_{2n}(\mathbb{R}) ; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$$

la classe de Pontrjagin $p_i \in H^{4i}(G_{2n}(\mathbb{R}) ; \mathbb{Z})$, resp. $p_i \in H^{4i}(\tilde{G}_{2n}(\mathbb{R}) ; \mathbb{Z})$ va dans la i -ième fonction symétrique élémentaire de $(x_1)^2, \dots, (x_n)^2$. La classe d'Euler $\chi_n \in H^{2n}(\tilde{G}_{2n}(\mathbb{R}) ; \mathbb{Z})$ va dans le produit $x_1 x_2 \dots x_n$.

(Dans cet énoncé, les classes de Pontrjagin s'entendent comme les classes de Pontrjagin du fibré universel $E_{2n}(\mathbb{R})$, resp. $\tilde{E}_{2n}(\mathbb{R})$; de même pour la classe d'Euler de $\tilde{E}_{2n}(\mathbb{R})$.)

L'assertion relative à la classe d'Euler se prouve en observant que la classe

d'Euler de $\tilde{E}_{2n}(\mathbb{R})$ va dans le produit des classes d'Euler des n fibrés composants isomorphes à $E_1(\mathbb{C})$.

7. Structure des algèbres de cohomologie à coefficients rationnels des grassmanniennes $G_{2n}(\mathbb{R})$, $G_{2n+1}(\mathbb{R})$, $\tilde{G}_{2n}(\mathbb{R})$ et $\tilde{G}_{2n+1}(\mathbb{R})$.

PROPOSITION 5.

(a) L'homomorphisme $H^*(G_{2n+1}(\mathbb{R}); \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(\tilde{G}_{2n+1}(\mathbb{R}); \mathbb{Q})$ est un isomorphisme; chacune de ces deux algèbres est l'algèbre des polynômes en les classes de Pontrjagin p_1, \dots, p_n ;

(b) L'homomorphisme $H^*(G_{2n}(\mathbb{R}); \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(\tilde{G}_{2n}(\mathbb{R}); \mathbb{Q})$ est une injection; la première algèbre est l'algèbre des polynômes en p_1, \dots, p_n , tandis que la seconde est l'algèbre des polynômes en p_1, \dots, p_{n-1} et la classe d'Euler χ_n (dont le carré est p_n).

Tout d'abord, la proposition 4 montre que p_1, \dots, p_n sont des éléments algébriquement indépendants des quatre algèbres en question, et que p_1, \dots, p_{n-1} et χ_n sont algébriquement indépendants dans $H^*(\tilde{G}_{2n}(\mathbb{R}); \mathbb{Q})$. Il reste donc seulement à prouver que ces éléments engendrent les algèbres.

On va procéder par récurrence sur n , en montrant successivement : 1° si l'assertion (a) est vraie pour $n-1$, l'assertion (b) est vraie pour n ; 2° si l'assertion (b) est vraie pour n , l'assertion (a) est vraie pour n . Au départ, le théorème est trivial pour $G_0(\mathbb{R})$ et $\tilde{G}_0(\mathbb{R})$, tous deux réduits à un point.

1° On suppose que l'assertion (a) est vraie pour $n-1$. On va écrire, pour \tilde{G}_{2n} et \tilde{G}_{2n-1} , une "suite exacte de Gysin" analogue à celle utilisée pour les grassmanniennes complexes (cf. Exposé 5, Appendice 2) : on raisonne d'abord sur la grassmannienne réelle finie $\tilde{G}_{2n,k}$ et son fibré $\tilde{E}_{2n,k}$; on note $\tilde{E}_{2n,k}^*$ l'ensemble des vecteurs non nuls de ce fibré. Soit

$$\rho : \tilde{E}_{2n,k}^* \rightarrow \tilde{G}_{2n-1,k+1}$$

l'application qui, à chaque vecteur $\neq 0$ contenu dans $V \in \tilde{G}_{2n,k}$, associe le $(2n-1)$ -sous-espace vectoriel orthogonal dans V , avec une convention fixe d'orientation. L'application ρ est fibrée, sa fibre est un espace vectoriel de dimension $k+1$ privé de 0; par suite, ρ induit des isomorphismes

$$H^q(\tilde{G}_{2n-1,k+1}; \mathbb{Q}) \approx H^q(\tilde{E}_{2n,k}^*; \mathbb{Q})$$

pour $q \leq k$. Par ces isomorphismes, la suite exacte de Gysin du fibré vectoriel

$\tilde{E}_{2n,k}$ se transforme en la suite exacte

$$\dots \rightarrow H^{q-2n}(\tilde{G}_{2n,k}) \xrightarrow{\chi_n} H^q(\tilde{G}_{2n,k}) \rightarrow H^q(\tilde{G}_{2n-1,k+1}) \rightarrow H^{q-2n+1}(\tilde{G}_{2n,k}) \rightarrow \dots$$

(valable pour $q \leq k$), où l'homomorphisme χ_n est la multiplication par la classe d'Euler χ_n (de degré $2n$) du fibré $\tilde{E}_{2n,k}$. (Toutes les cohomologies sont à coefficients dans \mathbb{Q}). En passant à la limite lorsque $k \rightarrow \infty$ (ce qui est licite car, pour un degré q donné, la suite est indépendante de k pour k assez grand), on obtient la suite exacte (pour toute valeur de q)

$$(S) \quad \dots \rightarrow H^{q-2n}(\tilde{G}_{2n}) \xrightarrow{\chi_n} H^q(\tilde{G}_{2n}) \xrightarrow{\alpha} H^q(\tilde{G}_{2n-1}) \xrightarrow{\beta} H^{q-2n+1}(\tilde{G}_{2n}) \rightarrow \dots$$

On prouve aisément que α est l'application naturelle qui envoie les classes de Pontrjagin p_i de \tilde{G}_{2n} dans les classes de Pontrjagin p_i de \tilde{G}_{2n-1} , pour $i \leq n-1$. L'exactitude de la suite (S) montre alors, par récurrence sur q , que chaque élément de $H^q(\tilde{G}_{2n})$ s'écrit d'une seule manière comme polynôme en p_1, \dots, p_{n-1} et χ_n . Il s'ensuit que $H^*(\tilde{G}_{2n}; \mathbb{Q})$ est bien l'algèbre des polynômes en p_1, \dots, p_{n-1} et χ_n .

Pour $H^*(G_{2n}; \mathbb{Q})$, on utilise le lemme (facile) : l'homomorphisme

$$H^*(G_p; \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(\tilde{G}_p; \mathbb{Q})$$

est une injection dont l'image se compose des éléments invariants par l'automorphisme involutif σ de \tilde{G}_p (celui qui change l'orientation de chaque fibre de \tilde{E}_p).

Ce lemme étant admis, il est clair que, pour \tilde{G}_{2n} , l'automorphisme σ change χ_n et $-\chi_n$; donc $H^*(G_{2n})$ est l'algèbre des polynômes en p_1, \dots, p_{n-1} et $(\chi_n)^2 = p_n$. On a ainsi achevé de prouver l'assertion (b) pour n .

2° On suppose que l'assertion (b) est vraie pour n , et on va prouver que l'assertion (a) est vraie pour n . Reprenons la suite exacte (S) ci-dessus, mais en y remplaçant $2n$ par $2n+1$:

$$\dots \rightarrow H^{q-2n-1}(\tilde{G}_{2n+1}) \xrightarrow{\chi} H^q(\tilde{G}_{2n+1}) \xrightarrow{\alpha} H^q(\tilde{G}_{2n}) \xrightarrow{\beta} H^{q-2n}(\tilde{G}_{2n+1}) \rightarrow \dots$$

L'automorphisme σ opère dans cette suite; d'une façon précise, on a

$$\alpha\sigma = \alpha, \quad \beta\sigma = -\sigma\beta, \quad \chi\sigma = -\sigma\chi.$$

Mais ici l'homomorphisme χ est nul, car la classe d'Euler de $H^{2n+1}(\tilde{G}_{2n+1}; \mathbb{Z})$ est un élément d'ordre 2, donc son image dans $H^{2n+1}(\tilde{G}_{2n+1}; \mathbb{Q})$ est nulle. Il s'ensuit que α est une injection; compte tenu des opérations de σ , on obtient une suite exacte

$$0 \rightarrow H^q(G_{2n+1}) \xrightarrow{\alpha'} H^q(G_{2n}) \xrightarrow{\beta'} H^{q-2n}(\tilde{G}_{2n+1})/H^{q-2n}(G_{2n+1}) \rightarrow 0.$$

Comme les classes $p_1, \dots, p_n \in H^*(G_{2n}; \mathbb{Q})$ engendrent cette algèbre (par l'hypothèse de récurrence), il s'ensuit que α' est surjectif, donc bijectif, et que $H^*(\tilde{G}_{2n+1}; \mathbb{Q})/H^*(G_{2n+1}; \mathbb{Q}) = 0$, ce qui achève la démonstration.

Remarque finale. - On a, en fait, un résultat plus précis que la proposition 5 : en cohomologie à coefficients dans \mathbb{Z} , $H^*(G_{2n+1}(\mathbb{R}))$ et $H^*(\tilde{G}_{2n+1}(\mathbb{R}))$ admettent une sous-algèbre de polynômes (à coefficients dans \mathbb{Z}) engendrée par p_1, \dots, p_n , et cette sous-algèbre a pour supplémentaire le sous-groupe de torsion de H^* , sous-groupe dont tous les éléments sont d'ordre 2 (ils font intervenir les "classes de Stiefel-Whitney"). De même, $H^*(G_{2n}(\mathbb{R}); \mathbb{Z})$ admet la sous-algèbre de polynômes $\mathbb{Z}[p_1, \dots, p_n]$, qui a pour supplémentaire le sous-groupe de torsion; tous ses éléments sont d'ordre 2. Enfin, $H^*(\tilde{G}_{2n}(\mathbb{R}); \mathbb{Z})$ admet la sous-algèbre $\mathbb{Z}[p_1, \dots, p_{n-1}, \chi_n]$, qui a pour supplémentaire le sous-groupe de torsion; tous ses éléments sont d'ordre 2.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] HIRZEBRUCH (F.). - Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie. 2te Auflage. - Berlin, Springer-Verlag, 1962 (Ergebnisse der Mathematik, Neue Folge, 9).
- [2] MILNOR (J.). - Lectures on characteristic classes. - Princeton, Princeton University Press (multigraphié).