

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

SAMUEL EILENBERG

La suite spectrale. II : espaces fibrés

Séminaire Henri Cartan, tome 3 (1950-1951), exp. n° 9, p. 1-9

http://www.numdam.org/item?id=SHC_1950-1951__3__A9_0

© Séminaire Henri Cartan

(Secrétariat mathématique, Paris), 1950-1951, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Séminaire H. CARTAN,
E.N.S., 1950/51. Topologie algébrique.

LA SUITE SPECTRALE. II. ESPACES FIBRÉS.
(Exposé de Samuel EILENBERG, le 5.2.1951).

1.- Enoncé des résultats.

Soit X un espace fibré de fibre F , de base B , et soit τ la projection : $X \rightarrow B$. Nous supposons que B est un complexe simplicial fini ; on notera B^p le squelette p -dimensionnel de B , et on posera $X_p = \tau^{-1}(B^p)$. Alors

$$(1.1) \quad \emptyset = X_{-1} \subset X_0 \subset \dots \subset X_p \subset \dots \subset X_n = X \quad (n = \dim B).$$

Supposons donnée une théorie de l'homologie avec un groupe G comme groupe de coefficients ; alors la suite (1.1) détermine des groupes $E_{n,p}^k$ et des homomorphismes $d_{n,p}^k$ comme il a été expliqué dans l'exposé précédent (8). En particulier, pour $k = 1$,

$$(1.2) \quad E_{p+q,p}^1 = H_{p+q}(X_p, X_{p-1}; G),$$

tandis que $d_{p+q,p}^1 : E_{p+q,p}^1 \rightarrow E_{p-1+q,p-1}^1$ est l'opérateur bord du triple (X_p, X_{p-1}, X_{p-2}) .

Nous allons établir les résultats suivants :

(1.3) Le groupe $E_{p+q,p}^1$ est isomorphe à $C_p(B) \otimes H_q(F; G)$, où $C_p(B)$ désigne le groupe des p -chaînes entières de B .

(1.4) Le groupe $H_q(F; G)$ peut être regardé comme un système local de groupes sur B . Cela conduit à un opérateur bord $\partial : C_p(B) \otimes H_q(F; G) \rightarrow C_{p-1}(B) \otimes H_q(F; G)$.

(1.5) Par l'isomorphisme (1.3), l'opérateur $d_{p+q,p}^1$ se transforme dans l'opérateur ∂ de (1.4).

Comme corollaire on obtient un isomorphisme

$$E_{p+q,p}^2 \simeq H_p(B; H_q(F; G)),$$

où $H_q(F; G)$ est regardé comme système de coefficients locaux sur B .

Il y a des résultats analogues pour la cohomologie, mais il semble qu'il y ait quelques difficultés à appliquer la présente méthode à l'étude de la structure multiplicative. Moyennant des précautions convenables concernant les

théories d'homologie utilisées, les résultats sont aussi valables quand B est un complexe infini.

2.- Préliminaires concernant les produits en homologie.

Nous considérerons deux théories de l'homologie : $H_q(X, A)$ avec des coefficients entiers, et $H_q(X, A; G)$ avec des coefficients dans un groupe G . Nous supposerons en outre qu'on a donné des homomorphismes

$$\chi : H_p(X, A) \otimes H_q(Y; G) \longrightarrow H_{p+q}((X, A) \times Y; G),$$

où $(X, A) \times Y$ désigne $(X \times Y, A \times Y)$. L'homomorphisme χ sera supposé satisfaire aux axiomes suivants :

(2.1) Si $f : (X, A) \longrightarrow (X', A')$ et $g : Y \longrightarrow Y'$, alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_p(X, A) \otimes H_q(Y; G) & \xrightarrow{\chi} & H_{p+q}((X, A) \times Y; G) \\ \downarrow f_* \otimes g_* & & \downarrow (f \times g)_* \\ H_p(X', A') \otimes H_q(Y; G) & \xrightarrow{\chi} & H_{p+q}((X', A') \times Y; G) \end{array}$$

est commutatif ;

(2.2) le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_p(X, A) \otimes H_q(Y; G) & \xrightarrow{\chi} & H_{p+q}((X, A) \times Y; G) \\ \downarrow \partial \otimes i_* & & \downarrow \partial \\ H_{p-1}(A) \otimes H_q(Y; G) & \xrightarrow{\chi} & H_{p-1+q}(A \times Y; G) \end{array}$$

est commutatif ;

(2.3) si P est un espace consistant en un point unique, si f est l'homéomorphisme $Y \longrightarrow P \times Y$ défini par $f(y) = (P, y)$, si $1 \in H_0(P) = \mathbb{Z}$ est le générateur de $H_0(P)$, et $u \in H_q(Y)$, alors

$$\chi(1 \otimes u) = f_* u.$$

On voit facilement que (2.1) et (2.2) peuvent aussi être formulés pour des triples (X, A, B) .

Nous allons porter notre attention sur le cas où $(X, A) = (s, \dot{s})$ est composé d'un p -simplexe s et de son bord $\dot{s}$. Soit s' une $(p-1)$ -face de s , et soit $c = \dot{s} - (s' - \dot{s}')$. Considérons le diagramme

$$H_p(s, \dot{s}) \xrightarrow{\partial} H_{p-1}(\dot{s}, c) \xrightarrow{j_*} H_{p-1}(s', \dot{s}'),$$

où ∂ et j_* sont des isomorphismes sur, et définissons

$[s : s'] = j_*^{-1} \partial : H_p(s, \dot{s}) \longrightarrow H_{p-1}(s', \dot{s})$. De la même manière, en se servant du diagramme

$$H_p((s, \dot{s}) \times Y; G) \xrightarrow{\partial} H_{p-1}((\dot{s}, c) \times Y; G) \xleftarrow{(j \times i)_*} H_{p-1}((s', \dot{s}') \times Y; G),$$

on obtient un isomorphisme $[s \times Y : s' \times Y] = \partial(j \times i)_*^{-1}$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$(2.4) \quad \begin{array}{ccc} H_p(s, \dot{s}) \otimes H_q(Y; G) & \xrightarrow{\chi} & H_{p+q}((s, \dot{s}) \times Y; G) \\ \downarrow [s:s'] \otimes i_* & & \downarrow [s \times Y : s' \times Y] \\ H_{p-1}(s', \dot{s}') \otimes H_q(Y; G) & \xrightarrow{\chi} & H_{p-1+q}((s', \dot{s}') \times Y; G) \end{array}$$

Prouvons maintenant que

$$(2.5) \quad \chi : H_p(s, \dot{s}) \otimes H_q(Y; G) \longrightarrow H_{p+q}((s, \dot{s}) \times Y; G) \text{ est un isomorphisme.}$$

En effet, pour $p = 0$, s est un point et $\dot{s} = \emptyset$, de sorte que (2.5) est dans ce cas une conséquence de (2.3). Pour $p > 0$ la proposition résulte de (2.4) par récurrence.

Lemme - Soit $\alpha : (s, \dot{s}) \longrightarrow (s_1, \dot{s}_1)$ une application simpliciale, s et s_1 étant des p -simplexes. Soit en outre $\gamma : (s, \dot{s}) \times Y \longrightarrow (s_1, \dot{s}_1) \times Y_1$ une application telle que $\gamma(x, y) = (\alpha(x), \eta_x(y))$ où $\eta_x : Y \longrightarrow Y_1$. Alors les homomorphismes $\eta_{x*} : H_q(Y; G) \longrightarrow H_q(Y_1; G)$ sont tous identiques entre eux, et l'on a

$$(2.6) \quad \gamma_* \chi(u \otimes v) = \chi(\alpha_* u \otimes \eta_{x*} v)$$

pour $u \in H_p(s, \dot{s})$, $v \in H_q(Y; G)$.

Démonstration : puisque s est connexe par arcs, les applications η_x sont toutes homotopes entre elles et par suite les η_{x*} sont tous les mêmes. Pour prouver (2.6) nous pouvons, compte tenu de (2.1), nous borner au cas où $s = s_1$ et où α est l'identité. Si $p = 0$, $(s, \dot{s})$ se réduit à un simple point P , et l'on a $\gamma = i \times \eta$ où $i : P \longrightarrow P$ est l'application identique, et $\eta = \eta_P : Y \longrightarrow Y_1$. La relation (2.6) est alors une conséquence de (2.1). Si $p > 0$, choisissons une $(p-1)$ -face s' de s et un point $x \in s'$. Soit γ' l'homéomorphisme de $(s', \dot{s}') \times Y$ sur lui-même défini par la restriction de γ . On vérifie aisément que

$$[s \times Y : \dot{s} \times Y] \gamma_* = \gamma'_* [s \times Y : \dot{s} \times Y].$$

Ainsi, en supposant (2.6) vrai pour la dimension $p-1$, on a

$$\begin{aligned} [s \times Y : \dot{s} \times Y]_* \chi(u \otimes v) &= \gamma_* [s \times Y : \dot{s} \times Y] \chi(u \otimes v) \\ &= \gamma'_* \chi([s, \dot{s}] u \otimes v) = \chi([s, \dot{s}] u \otimes \eta_{x*} v) \\ &= [s \times Y : \dot{s} \times Y] \chi(u \otimes \eta_{x*} v) . \end{aligned}$$

(2.6) en résulte, puisque $[s \times Y : \dot{s} \times Y]$ est un isomorphisme.

3.- Calcul de $H_{p+q}(X_p, X_{p-1})$.

Soit s un p -simplexe de B , et soit φ_s un homéomorphisme de $(s, \dot{s}) \times F$ sur $(\tau^{-1}s, \tau^{-1}\dot{s})$ tel que $\tau \varphi_s(x, y) = x$ pour $x \in s$, $y \in F$. Si ψ_s est un autre tel homéomorphisme, $\psi_s^{-1} \varphi_s$ est un homéomorphisme de $(s, \dot{s}) \times F$ sur lui-même, qui satisfait aux conditions du Lemme (où $\alpha = 1$ 'identité). Cela donne naissance à un isomorphisme

$$(3.1) \quad \langle \varphi_s, \psi_s \rangle : H_q(F; G) \longrightarrow H_q(F; G)$$

tel que

$$(3.2) \quad \psi_{s*} \chi(u \otimes v) = \varphi_{s*} \chi(u \otimes \langle \varphi_s, \psi_s \rangle v)$$

pour $u \in H_p(s, \dot{s})$, $v \in H_q(F; G)$.

Si τ_s est un troisième homomorphisme, il est clair que

$$(3.3) \quad \langle \varphi_s, \psi_s \rangle \langle \psi_s, \tau_s \rangle = \langle \varphi_s, \tau_s \rangle .$$

Soit $\Phi = \{\varphi_s\}$ une famille contenant un homéomorphisme φ_s pour chaque simplexe s de B . Si s est un p -simplexe, on a

$$(3.4) \quad \varphi_{s*} \chi : H_p(s, \dot{s}) \otimes H_q(F; G) \approx H_{p+q}(\tau^{-1}s, \tau^{-1}\dot{s}; G) .$$

Utilisons maintenant le fait que les homomorphismes

$$H_p(s, \dot{s}) \longrightarrow H_p(B^p, B^{p-1}) = C_p(B)$$

$$H_{p+q}(\tau^{-1}s, \tau^{-1}\dot{s}; G) \longrightarrow H_{p+q}(X_p, X_{p-1}; G) = E_{p+q,p}^1$$

définis par inclusion, sont des isomorphismes dans, et définissent une décomposition en somme directe des groupes écrits à droite. Ainsi (3.3) définit un isomorphisme

$$(3.5) \quad \Phi^* : C_p(B) \otimes H_q(F; G) \approx E_{p+q,p}^1$$

Si $\Psi = \{\psi_s\}$ est une autre famille d'homéomorphismes, alors il résulte de (3.2) que

$$(3.6) \quad \psi^\#(u \otimes v) = \bar{\psi}^\#(u \otimes \langle \varphi_s, \psi_s \rangle v) \quad .$$

4.- Calcul de d_p^1 .

$$\text{L'homomorphisme } d_{p+q,p}^1 : E_{p+q,p}^1 \longrightarrow E_{p-1+q,p-1}^1$$

coïncide avec l'opérateur bord

$$\partial : H_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \longrightarrow H_{p-1+q}(X_{p-1}, X_{p-2})$$

du triple (X_p, X_{p-1}, X_{p-2}) .

Considérons un système $\Phi = \{\varphi_s\}$ d'homéomorphismes comme ci-dessus, et soit s' une face (de dimension quelconque) du simplexe s . Soit $\varphi_{s'}$ la restriction de l'homéomorphisme φ_s à s' . Alors, grâce à l'isomorphisme (3.1) nous définissons

$$(4.1) \quad \langle s, s', \Phi \rangle = \langle \varphi_{s'}, \varphi_s \rangle : H_q(F; G) \longrightarrow H_q(F; G) \quad .$$

Comme conséquence de (3.3) on a

$$(4.2) \quad \langle s', s'', \Phi \rangle \langle s, s', \Phi \rangle = \langle s, s'', \Phi \rangle$$

pour toute face s'' de s . Ces relations montrent que le groupe $H_q(F; G)$ et les isomorphismes (4.1) définissent un système local de groupes sur le complexe B . L'opérateur bord ∂_Φ de ce système local a la forme

$$(4.3) \quad \partial_\Phi(u \otimes v) = \sum ([s : s_i] u \otimes \langle s, s_i, \Phi \rangle v)$$

où $u \in H_p(s, \dot{s})$, s est un p -simplexe, et s_i parcourt l'ensemble des $(p-1)$ -faces de s (ou de tous les $(p-1)$ -simplexes de B) .

Le système local $\{H_q(F; G), \langle s, s', \Phi \rangle\}$ dépend de la famille Φ . Néanmoins si Ψ est une autre telle famille, il suit facilement de (3.3) que

$$(4.4) \quad \langle s, s', \Phi \rangle \langle \varphi_s, \psi_s \rangle = \langle \varphi_{s'}, \psi_{s'} \rangle \langle s, s', \Psi \rangle$$

ce qui montre que les systèmes locaux définis par Φ et Ψ sont équivalents.

Le but essentiel de ce paragraphe est de prouver

$$(4.5) \quad \Phi^\# \partial_\Phi = \partial_{\bar{\Phi}}^\#$$

Cette relation affirme que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} C_p(B) \otimes H_q(F; G) & \xrightarrow{\Phi^\#} & E_{p+q,p}^1 \\ \downarrow \partial_1 & & \downarrow d_{p+q,p}^1 \\ C_{p-1}(B) \otimes H_q(F; G) & \xrightarrow{\bar{\Phi}^\#} & E_{p-1+q,p-1}^1 \end{array}$$

Cela achèvera la démonstration des assertions énoncées au paragraphe 1 .

La démonstration de (4.5) se fait en plusieurs étapes. On prouve d'abord que si (4.5) est vrai pour le système Φ d'homéomorphismes, il l'est aussi pour tout autre système Ψ . En effet, en utilisant (3.6), (4.2) et (4.3) on a

$$\begin{aligned} \partial \Psi^\#(u \otimes v) &= \partial \Phi^\#(u \otimes \langle \varphi_s, \psi_s \rangle v) \\ &= \sum \Phi^\#([s, s_i] u \otimes \langle s, s_i, \Phi \rangle \langle \varphi_s, \psi_s \rangle v) \\ &= \sum \Phi^\#([s, s_i] u \otimes \langle \varphi_{s_i}, \psi_{s_i} \rangle \langle s, s_i, \Psi \rangle v) \\ &= \sum \Psi^\#([s, s_i] u \otimes \langle s, s_i, \Psi \rangle v) = \Psi^\# \partial_\Psi(u \otimes v). \end{aligned}$$

Ensuite on observe que la relation (4.5) ne fait intervenir qu'un simplexe s et ses faces ; il suffit donc de considérer le cas où $B = s$ est un simplexe. On obtient alors une famille Φ en choisissant l'homéomorphisme φ_s et définissant tous les autres homéomorphismes φ_{s_i} comme restrictions de φ_s . Ceci réduit le problème au cas où $B = s$, $X = s \times F$, $\tau(x, y) = x$, la famille se composant des applications identiques. L'application $\Phi^\#$ se réduit alors à χ , et la relation (4.5) devient la relation de commutativité dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_p(s, \dot{s}) \otimes H_q(F; G) & \xrightarrow{\chi} & H_{p+q}((s, \dot{s}) \times F; G) \\ \downarrow \partial \times i_* & & \downarrow \partial \\ H_{p-1}(\dot{s}, s^{p-2}) \otimes H_q(F; G) & \xrightarrow{\chi} & H_{p-1+q}((\dot{s}, s^{p-2}) \times F; G) \end{array}$$

où s^{p-2} est le squelette $(p-2)$ -dimensionnel de s . Cela achève la démonstration de (4.5).

5.- Conditions de compatibilité.

Outre l'espace fibré $\{X, B, \tau, F\}$ considérons un espace fibré $\{\bar{X}, \bar{B}, \bar{\tau}, \bar{F}\}$. Une application homomorphique du premier dans le second est un couple d'applications continues $f: X \rightarrow \bar{X}$ et $g: B \rightarrow \bar{B}$, où g est simpliciale et $\bar{\tau} f = g \tau$. Puisque f applique chaque X_p dans $\bar{X}_p$, f définit des applications $f_{n,p}^k: E_{n,p}^k \rightarrow \bar{E}_{n,p}^k$ telles que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E_{n,p}^k & \xrightarrow{f_{n,p}^k} & \bar{E}_{n,p}^k \\ \downarrow d_{n,p}^k & & \downarrow \bar{d}_{n,p}^k \\ E_{n-1,p-k}^k & \xrightarrow{f_{n-1,p-k}^k} & \bar{E}_{n-1,p-k}^k \end{array}$$

Soient Φ et $\bar{\Phi}$ des systèmes d'applications coordonnées pour les deux espaces fibrés. Alors, pour $k = 1$, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 E_{p+q,p}^1 & \xrightarrow[f_{p+q,p}^1]{} & \bar{E}_{p+q,p}^1 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 C_p(B) \otimes H_q(F;G) & \xrightarrow{h} & C_p(\bar{B}) \otimes H_q(\bar{F};G)
 \end{array}$$

où h déterminé par la condition de commutativité. Nous allons calculer h explicitement.

Soit s un p -simplexe de B et soit $\bar{s} = g(s)$. Si $\dim \bar{s} < \dim s$, on voit facilement que $h(u \otimes v) = 0$ pour $u \in H_p(s, s)$, $v \in H_q(F; G)$. Si $\dim \bar{s} = p$, g définit une application $g : (s, \dot{s}) \longrightarrow (\bar{s}, \dot{\bar{s}})$ qui, avec l'application $\bar{\varphi}_{\bar{s}}^{-1} \circ \varphi_s : (s, \dot{s}) \times F \longrightarrow (\bar{s}, \dot{\bar{s}}) \times \bar{F}$, satisfait aux conditions du Lemme (paragraphe 2). On en déduit un homomorphisme $\mathcal{V}_s : H_q(F; G) \longrightarrow H_q(\bar{F}; G)$ tel que

$$\phi^\#(u \otimes v) = \bar{\phi}^\#(gu \otimes \mathcal{V}_s v).$$

Ceci donne

$$(5.1) \quad h(u \otimes v) = gu \otimes \mathcal{V}_s v$$

pour $u \in H_p(s, \dot{s})$, $v \in H_q(F; G)$. Cette formule vaut aussi pour $\dim \bar{s} < p$, puisque $gu = 0$ dans ce cas.

6.- Une digression.

Revenons aux notations du paragraphe 3 de l'exposé 8, et supposons, outre (3.3) et (3.4), que l'on ait aussi

$$(6.1) \quad E_{n,p}^1 = H_n(A_p, A_{p-1}) = 0 \text{ pour } n < p \text{ ou } p < 0.$$

Il s'ensuit que $E_{n,p}^k = 0$ pour $n < p$ ou $p < 0$. Par suite les homomorphismes

$$d_{n,o}^k : E_{n,o}^k \longrightarrow E_{n-1,-k}^k ; \quad d_{n+1,n+k}^k : E_{n+1,n+k}^k \longrightarrow E_{n,n}^k$$

sont nuls. Ainsi tous les éléments de $E_{n,o}^k$ sont des cycles, et aucun élément $\neq 0$ de $E_{n,n}^k$ n'est un bord. Par suite $E_{n,o}^{k+1}$ est un groupe quotient $E_{n,o}^k$, tandis que $E_{n,n}^{k+1}$ est un sous-groupe de $E_{n,n}^k$. Puisque $E_{n,o}^k = E_{n,o}$ et $E_{n,n}^k = E_{n,n}$ pour k assez grand, on obtient des homomorphismes

$$(6.2) \quad E_{n,o}^k \longrightarrow E_{n,o}, \quad E_{n,n} \longrightarrow E_{n,n}^k$$

dont le premier est sur, et le second est biunivoque.

Puisque $E_{n,p} \approx B_{n,p}/B_{n,p-1}$ est nul pour $n < p$ et pour $p < 0$, et que

$B_{n,p} = 0$ pour p petit et $B_{n,p} = H_n(A)$ pour p grand, il s'ensuit que

$$0 = B_{n,-1} \subset B_{n,0} \subset \dots \subset B_{n,n} = H_n(A) ,$$

avec $B_{n,0} \approx E_{n,0}$ et $H_n(A)/B_{n,n-1} \approx E_{n,n}$.

Il en résulte des homomorphismes

$$(6.3) \quad E_{n,0} \longrightarrow H_n(A) \longrightarrow E_{n,n}$$

dont le premier est biunivoque, et le second est sur. Compte tenu de (6.2), cela donne des homomorphismes

$$(6.4) \quad E_{n,0}^k \longrightarrow H_n(A) \longrightarrow E_{n,n}^k .$$

Dans le cas de l'espace fibré considéré dans cet exposé, on a $X_p = 0$ pour $p < 0$, et $X_p = X$ pour p grand. Ainsi les conditions (3.3) et (3.4) de l'exposé 8 sont satisfaites. En outre $E_{n,p}^1 \approx C_p(B) \otimes H_{n-p}(F;G)$, qui est nul pour $p < 0$ ou $n < p$. Donc les conditions (6.1) sont remplies.

7.- Interprétation des homomorphismes $H_n(F) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_n(B)$.

Soit $\Phi = \{\varphi_s\}$ une famille d'applications coordonnées pour l'espace fibré $\{X, B, \tau, F\}$. Elle donne des isomorphismes

$$E_{n,p}^2 \approx H_p(B; H_{n-p}(F;G)) .$$

Avec (6.4), on obtient des homomorphismes

$$(7.1) \quad H_0(B; H_n(F;G)) \longrightarrow H_n(X;G) \longrightarrow H_n(B; H_0(F;G))$$

que nous proposons maintenant d'interpréter.

Soit P un sommet de B , et $Y = \tau^{-1}(P)$. Regardons Y comme espace fibré de base P , de fibre F , d'application coordonnée définie par Φ . Les applications d'inclusion $i: Y \longrightarrow X$, $j: P \longrightarrow B$ définissent alors une application de cet espace fibré dans l'espace fibré $\{X, B, \tau\}$. L'application $h: C_0(P) \otimes H_n(F;G) \longrightarrow C_0(B) \otimes H_n(F;G)$, calculée par la méthode du paragraphe 5, n'est autre que celle induite par j , puisque, dans ce cas, l'application φ_s du paragraphe 5 est l'identité. Cela donne un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_n(F;G) \approx H_0(P; H_n(F;G)) & \longrightarrow & H_n(Y;G) \\ \downarrow i_* & & \downarrow j_* \\ H_0(B; H_n(F;G)) & \longrightarrow & H_n(X;G) \end{array}$$

où les applications horizontales sont les premières applications de (7.1) .

L'application horizontale $H_n(F; G) \longrightarrow H_n(Y; G)$ est l'application naturelle induite par les applications coordonnées.

Si B est connexe, l'homomorphisme j_* est indépendant du choix de P . On obtient alors un homomorphisme bien défini $\chi : H_n(F; G) \longrightarrow H_n(X; G)$, tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H_n(F; G) & \xrightarrow{\chi} & H_n(X; G) \\ & \searrow j_* & \nearrow \\ & H_0(B; H_n(F; G)) & \end{array}$$

Si en outre le système $H_n(F; G)$ est simple sur B , alors j_* est un isomorphisme sur. Ainsi la première application de (7.1) peut être identifiée à χ .

Pour interpréter d'une manière analogue la seconde application de (7.1), considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\tau} & B \\ \downarrow r & & \downarrow i \\ B & \longrightarrow & B \end{array}$$

et interprétons l'application verticale i comme une projection de B regardé comme espace fibré de base B et de fibre réduite à un point Q . Soit $f : F \longrightarrow Q$ et $f_* : H_0(F; G) \longrightarrow H_0(Q; G) = G$. L'application

$h : C_n(B) \otimes H_0(F; G) \longrightarrow C_n(B) \otimes G$, calculée par la méthode du paragraphe 5, est alors celle induite par f_* . Cela donne naissance au diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_n(X; G) & \longrightarrow & H_n(B; H_0(F; G)) \\ \downarrow \tau_* & & \downarrow f_* \\ H_n(B; G) & \longrightarrow & H_n(B; H_0(Q; G)) \end{array}$$

où les applications horizontales sont les secondes applications de (7.1). Si on identifie $H_0(Q; G)$ à G , la flèche horizontale du bas représente l'application identique. En effet, dans l'espace fibré $i : B \longrightarrow B$, on a

$$E_{n,p}^1 = H_n(B^p, B^{p-1}; G) = \begin{cases} C_n(B; G) & \text{si } p = n \\ 0 & \text{si } p \neq n \end{cases}.$$

Ainsi tous les opérateurs $d_{n,p}^k$ sont nuls pour $k > 1$, et

$$E_{n,p} = E_{n,p}^2 = \begin{cases} H_n(B; G) & \text{si } n = p \\ 0 & \text{si } n \neq p \end{cases}.$$

Donc le diagramme se réduit à

$$\begin{array}{ccc} H_n(X; G) & \longrightarrow & H_n(B; H_0(F; G)) \\ \tau_* \searrow & & \nearrow f_* \\ & H_n(B; G) & \end{array}$$

Si en outre F est connexe (relativement à la théorie de l'homologie $H(\ ; G)$), alors f_* est un isomorphisme, et dans ce cas la seconde application de (7.1) peut être identifiée à τ_* .