Séminaire BOURBAKI Juin 2004
56^e année, 2003-2004, n$^{\text{o}}$ 934, p. 249 à 265

MÉTHODES GÉOMÉTRIQUES DANS L'ÉTUDE DES ÉQUATIONS D'EINSTEIN [d'après Christodoulou, Klainerman, Nicolò et Rodnianski]

par **Serge ALINHAC**

Dans cet exposé, nous présentons les outils développés dans les quinze dernières années par Christodoulou, Klainerman, Nicolò et Rodniansky, outils qui ont permis d'importants progrès dans l'étude des équations hyperboliques non-linéaires, notamment des équations d'Einstein. Il existe bien entendu beaucoup d'autres travaux sur ce sujet dont nous ne pourrons parler, et j'espère que leurs auteurs me pardonneront de m'être volontairement limité au choix retenu par Bourbaki. Pour ce qui est des aspects géométriques et physiques des équations d'Einstein, on consultera avec profit l'exposé de J.-P. Bourguignon [3] dans ce même séminaire. Notre propos est en quelque sorte complémentaire de celui de Bourguignon : il vise à rendre compte de façon un peu technique de méthodes qui se sont clarifiées au fil des ans, et dont le « cœur » apparaît dans de nombreux travaux.

1. LES PROBLÈMES

Nous ferons ici référence à trois groupes de travaux, très liés entre eux :

i) Les travaux de Klainerman [8] et Klainerman et Rodniansky [10] sur les équations d'ondes quasi-linéaires

$$\partial_t^2\phi - g^{ij}(\phi)\partial_{ij}^2\phi = N(\phi, \nabla\phi).$$

ii) Les travaux de Christodoulou et Klainerman [6], Klainerman et Nicolò [9] sur les équations d'Einstein $R_{\alpha\beta} = 0$.

iii) Les travaux de Klainerman et Rodniansky [11–16] sur les équations d'Einstein.

La discussion des travaux i), outre son intérêt intrinsèque, est utile pour mieux appréhender la démarche des travaux ii) et iii).

Dans tous les cas, il s'agit de problèmes qui s'écrivent dans des coordonnées bien choisies comme des systèmes hyperboliques non-linéaires, dont la partie principale est simplement $L_g \times \mathrm{Id}$, L_g étant le d'Alembertien associé à une métrique lorentzienne g. Il n'y a donc qu'*une seule géométrie* associée à de tels systèmes. Deux types de problèmes se posent alors :

A) Le problème de l'existence *globale en temps* de solutions C^∞ associées à des données de Cauchy elles-mêmes C^∞ et suffisamment décroissantes lorsque $|x| \to \infty$.

B) Le problème de l'existence *locale en temps* de solutions associées à des données de Cauchy peu régulières, par exemple dans un espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^3)$, avec s aussi petit que possible.

Dans le problème A, comme on peut le voir en consultant Hörmander [7] ou la première partie de l'exposé de Chemin [4], l'enjeu est de prouver la décroissance en temps, uniformément en espace, de la solution et de ses dérivées.

D'autre part, les problèmes A et B sont liés entre eux de deux façons :

i) Si l'on parvient à abaisser s jusqu'à un niveau contrôlé par une quantité « conservée » (comme l'énergie pour l'équation des ondes, par exemple), on obtient l'existence globale de solutions peu régulières.

ii) Une procédure d'attaque du problème B due à Bahouri et Chemin [1, 2], et reprise dans les références i), est la suivante : pour λ fixé grand, notons g_λ une régularisation de la métrique g ($g_\lambda \to g$ lorsque $\lambda \to \infty$) ; on établit alors l'équation (à coefficients régularisés) vérifiée par le « bloc » $\Delta_\lambda u$ (qui est, dans l'écriture de u à l'aide de sa transformée de Fourier $\widehat{u}(\xi)$, la partie de u pour laquelle $|\xi|$ est de l'ordre de λ)

$$L_{g_\lambda}(\Delta_\lambda u) = R_\lambda.$$

Après un changement d'échelle convenable, le problème se réduit à étudier la décroissance, sur un intervalle $[0, T]$, $T \leqslant \lambda^a$, $a > 0$, de la solution v d'une équation d'onde

$$L_{h_\lambda} v = 0,$$

où h_λ est une nouvelle métrique déduite de g. On peut alors « recoller » les informations sur les $\Delta_\lambda u$ pour obtenir l'estimation voulue sur la norme H^s de u.

Ce qui est important est que l'étude du problème A, comme celle du problème B par l'approche ii), se réduit à prouver la décroissance des solutions d'une équation *linéaire* associée à une métrique h déduite de g, et jouissant de propriétés connues (P). Le caractère *non-linéaire* du problème consiste en ceci : la métrique h dépend en fait de la solution ϕ. Il faut donc supposer certaines propriétés (Q) de ϕ sur un intervalle de temps $[0, T[$, qui impliquent les propriétés correspondantes (P) de h sur le même intervalle, lesquelles permettent d'établir que (Q) a lieu en fait sur un intervalle plus grand $[0, T + \varepsilon]$. C'est le procédé *d'induction sur le temps.*

Nous consacrerons les sections 2 à 6 à décrire les outils d'étude des équations linéaires, ne retournant aux aspects non-linéaires spécifiques qu'au paragraphe 7. La section 8, enfin, évoquera un travail en cours sur la « conjecture H^2 » pour les équations d'Einstein.

Notons que, dans un article récent [17], Lindblad et Rodniansky ont démontré l'existence globale de solutions régulières des équations d'Einstein écrites en coordonnées harmoniques, sans utiliser les outils géométriques qui font l'objet de cet exposé ; la contrepartie en est qu'ils ne semblent pas obtenir les propriétés asymptotiques fines des composantes de la courbure (« peeling properties ») telles qu'on peut les trouver dans [9], par exemple.

2. LE CŒUR DU DISPOSITIF : FEUILLETAGES, REPÈRES ET FONCTIONS OPTIQUES

Dans toute la suite de l'exposé, nous nous placerons dans $\mathbb{R}^4$, où nous tâcherons d'utiliser le moins possible les coordonnées usuelles

$$x^0 = t, \quad x = (x^1, x^2, x^3).$$

Nous supposerons donnée une métrique lorentzienne g, de signature $(-,+,+,+)$, le plus souvent proche de la métrique « plate » η de l'espace de Minkovski

$$\eta = -dt^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2.$$

Les composantes de g en coordonnées locales seront $g_{\alpha\beta}$, et $g^{\alpha\beta}$ seront les éléments de la matrice inverse de $g_{\alpha\beta}$. Nous noterons $g(X,Y) = \langle X, Y\rangle$, et D la connexion canonique associée à g. Le gradient et le hessien d'une fonction f seront définis par

$$\langle \nabla f, X\rangle = Xf, \quad \nabla^2 f(X,Y) = XYf - (D_X Y)f,$$

le d'Alembertien associé à g étant l'opérateur

$$L_g f = g^{\alpha\beta}\nabla^2 f_{\alpha\beta}.$$

Nous considérerons dans la suite deux situations géométriques distinctes :

(I) Celle des travaux i) sur les équations d'ondes pour une métrique scindée

$$-dt^2 + g_{ij}dx^i dx^j,$$

dans laquelle le feuilletage par les surfaces $\Sigma_{t_0} = \{t = t_0\}$ joue un rôle essentiel.

(II) Celle des travaux de Klainerman et Nicolò et Klainerman et Rodniansky sur les équations d'Einstein, dans lesquels aucune coordonnée n'apparaît *a priori*.

Pour le lecteur désireux d'approfondir, signalons que nous avons adopté les notations de [10] pour décrire la situation I, tandis que nous adoptons celles de [9] pour décrire la situation II. Enfin, au paragraphe 8, nous gardons les notations de [14].

Dans les deux situations géométriques, on suppose donné un feuilletage par des variétés de dimension deux, chacune homéomorphe à une 2-sphère standard. Ce feuilletage est tel qu'en chaque point $p \in S$, la restriction de g à l'orthogonal $H = (T_pS)^{\perp}$ est de signature $(-,+)$, et l'on note (e_3, e_4) des vecteurs isotropes de H, pointant vers le futur, de directions respectivement « rentrantes » et « sortantes » (*cf.* section 2). Si l'on choisit un repère orthonormé (e_1, e_2) sur S, on dispose ainsi d'un *repère isotrope* (e_1, e_2, e_3, e_4) (« null frame »), qui jouera un rôle central dans la suite (tous les tenseurs seront décomposés sur ce repère).

Si la collection des 3-plans engendrés par (e_1, e_2, e_4) est intégrable, on peut voir que les variétés intégrales correspondantes, les « cônes sortants », sont les surfaces de niveaux d'une fonction u vérifiant l'équation eikonale

$$g^{\alpha\beta}\partial_\alpha u \partial_\beta u = 0.$$

Une telle fonction est dite « fonction optique ». On définit également une fonction r, constante sur chaque sphère du feuilletage, par $4\pi r^2 = aireS$.

Dans la situation I, on définit d'abord une fonction optique u en imposant de plus $u = t - r$ infiniment près de l'axe des temps. Le feuilletage en sphères est alors

$$S_{t_0,u_0} = \{t = t_0, u = u_0\}.$$

En notant

$$L' = -\nabla u, b^{-1} = \partial_t u, \quad N = -b\partial^i u \partial_i,$$

on pose

$$e_4 = L = bL' = \partial_t + N, \quad e_3 = \underline{L} = \partial_t - N,$$

et l'on a les propriétés

$$\langle L, L\rangle = 0, \langle \underline{L}, \underline{L}\rangle = 0, \quad \langle L, \underline{L}\rangle = -2.$$

On notera qu'en général le système des 3-plans (e_1, e_2, e_3) n'est pas intégrable. On complète le dispositif en posant néanmoins $\underline{u} = 2t - u$.

Dans la situation II au contraire, on définit d'abord des fonctions optiques « entrantes » et « sortantes » $\underline{u}$ et u de la façon suivante :

i) On construit une fonction $\underline{u}_0$ sur $\Sigma_0 = \{t = 0\}$, dont les surfaces de niveaux jouissent de propriétés que nous expliquerons... à la section 7. On choisit alors pour $\underline{u}$ la solution entrante de l'équation eikonale qui vaut $\underline{u}_0$ pour $t = 0$. On se limite ici à un domaine de Σ_0 délimité par les deux surfaces $\underline{u}_0 = \nu_0$ et $\underline{u}_0 = \underline{u}_*$.

ii) Sur le cône rentrant $\underline{C}_* = \{\underline{u} = \underline{u}_*\}$ (que les auteurs appellent « the last slice »), on choisit une fonction u_* dont les surfaces de niveaux jouissent aussi de propriétés expliquées à la section 7. On définit alors u comme la solution sortante de l'équation eikonale valant u_* sur $\underline{C}_*$.

Une fois définies u et $\underline{u}$, on pose

$$L = -\nabla u, \quad \underline{L} = -\nabla \underline{u}, \quad 2\Omega^2 = -\langle L, \underline{L}\rangle^{-1} = -(g^{\alpha\beta}\partial_\alpha u \partial_\beta \underline{u})^{-1},$$

et finalement on choisit

$$e_3 = 2\Omega\underline{L}, \quad e_4 = 2\Omega L$$

en sorte que $\langle e_3, e_4\rangle = -2$. Le feuilletage en sphères est finalement défini par

$$S_{\lambda,\nu} = \{u = \lambda, \underline{u} = \nu\}.$$

3. LES OBJETS GÉOMÉTRIQUES DANS L'ESPACE-TEMPS DE MINKOWSKI

Dans l'espace-temps de Minkowski, la situation géométrique de la section 2 est très simple : on choisit

$$u = t - r, \quad \underline{u} = t + r, \quad r = |x|, x = r\omega,$$

et donc

$$e_4 = L = -\nabla u = \partial_t + \partial_r, \quad e_3 = \underline{L} = -\nabla \underline{u} = \partial_t - \partial_r, \quad r\partial_r = x^i \partial_i.$$

Le feuilletage en sphères est celui des sphères standard dans les plans horizontaux, et des champs tangents à ces sphères sont

$$R_i = (x \wedge \partial)_i.$$

Dans la théorie des équations hyperboliques, tous ces objets ont des fonctions multiples plus ou moins « évidentes », que nous allons détailler, car il sera nécessaire de les distinguer plus tard.

1. Nous pouvons définir au moins deux notions d'infini : ce qui se passe lorsque $r \to \infty$, et ce qui se passe lorsque $\underline{u} \to \infty$, pour u fixé (« null infinity »). La première notion est claire, et les puissances de r apparaissent partout comme « poids » dans les estimations de décroissance cherchées. Par ailleurs, observons qu'une solution ϕ de l'équation des ondes avec données de Cauchy C_0^∞ peut s'écrire (*cf.* [7])

$$\phi(x, t) = (1/r)F(r - t, \omega, 1/r).$$

Pour u fixé, $r\phi$ a une limite qui est $F(-u, \omega, 0))$ (que l'on peut calculer explicitement à l'aide des tranformées de Radon des données [7]). Dans [9], les auteurs établissent toutes les limites de ce type, qui sont importantes pour l'interprétation physique des résultats.

2. Les cônes sortants et rentrants permettent de préciser les domaines de détermination de divers sous-ensembles, c'est-à-dire de préciser la structure causale de l'univers que l'on décrit.

3. Nous notons que

$$\partial_t = \frac{1}{2}(L + \underline{L}), \quad S = t\partial_t + x^i \partial_i = \frac{1}{2}(ue_3 + \underline{u}e_4),$$
$$K_0 = (t^2 + x^2)\partial_t + 2tx^i \partial_i = \frac{1}{2}(u^2 e_3 + \underline{u}^2 e_4).$$

Les champs ∂_t et K_0 sont utiles (entre autres choses) comme *multiplicateurs* permettant d'obtenir des inégalités d'énergie pour l'équation des ondes. Cela signifie que pour $X = \partial_t$ ou $X = K_0$, l'on calcule en intégrant par parties

$$\int_{[0,T] \times R^3} L_\eta \phi X \phi dx dt,$$

obtenant ainsi un contrôle au temps T d'une énergie positive $E(\phi)(T)$ de ϕ. Pour $X = \partial_t$, on obtient simplement l'énergie standard $E(\phi)(T) = |\nabla\phi(.,T)|^2_{L^2}$, tandis que pour $X = K_0$ (« inégalité conforme »), on obtient une énergie équivalente à

$$\|\phi\|^2 + \Sigma\|R_i\phi\|^2 + \|S\phi\|^2 + \Sigma\|H_i\phi\|^2, \tag{3.1}$$

la norme $\|\cdot\|$ étant la norme L^2 à T fixé, les $H_i = t\partial_i + x^i\partial_t$ étant les champs de rotations hyperboliques. Nous expliquerons à la section 4 la généralisation de ces procédures.

4. Les champs considérés en 3 ont aussi de bonnes propriétés de commutation avec L_η. En effet,

$$[L_\eta, R_i] = 0, \quad [L_\eta, H_i] = 0, \quad [L_\eta, S] = 2L_\eta.$$

Le point 5 sera consacré à ce problème de commutation dans le cas non plat.

5. Enfin, en revenant à l'écriture de 1 d'une solution régulière

$$\phi(x,t) = (1/r)F(r-t, \omega, 1/r),$$

on observe que les différentes composantes de $\nabla\phi$ ont des comportements différents. Plus précisément,

$$L\phi \sim 1/r^2, \quad (R_i/r)(\phi) \sim 1/r^2, \quad \underline{L}\phi \sim 1/r.$$

Plus tard, il sera essentiel d'étudier séparément les diverses composantes des tenseurs que nous voulons estimer dans des repères isotropes analogues à (e_1, e_2, e_3, e_4).

4. LES INÉGALITÉS D'ÉNERGIE ET LE TENSEUR D'ÉNERGIE-MOMENT

Pour comprendre, dans le cas plat, le formalisme que nous allons expliquer, on pourra consulter [5].

4.1. Le cas des équations d'ondes

Le tenseur d'énergie-moment Q associé à une fonction ϕ est défini par

$$Q_{\alpha\beta} = \partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi - (1/2)g_{\alpha\beta}(g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi).$$

Ses propriétés principales sont les suivantes :

i) Si $L_g\phi = F$, alors

$$D^\alpha Q_{\alpha\beta} = F\partial_\alpha\phi.$$

ii) Si X et Y sont de type temps et orientés vers l'avenir, $Q(X,Y) \geqslant 0$.

Dans la situation I, la structure des composantes de Q dans notre repère habituel est la suivante :

$$Q_{LL} = |L\phi|^2, \quad Q_{\underline{L}\underline{L}} = |\underline{L}\phi|^2, \quad Q_{L\underline{L}} = \Sigma_{a=1,2}|e_a\phi|^2,$$
$$Q_{Le_a} = (L\phi)(e_a\phi), \quad Q_{\underline{L}e_a} = (\underline{L}\phi)(e_a\phi),$$
$$Q_{e_a e_b} = (e_a\phi)(e_b\phi) - (1/2)\delta_{ab}[-(L\phi)(\underline{L}\phi) + \Sigma_{a=1,2}|e_a\phi|^2].$$

Choisissons maintenant un champ X, et posons $P_\alpha = Q_{\alpha\beta}X^\beta$. Il vient

$$D^\alpha P_\alpha = (1/2)Q^{\alpha\beta}\pi_{\alpha\beta} + FX(\phi).$$

Autrement dit, on écrit le produit $(L_g\phi)(X\phi)$ sous la forme d'une divergence plus une forme quadratique en les dérivées premières de ϕ. Le tenseur π est le tenseur de déformation de X défini par

$$\pi_{\alpha\beta} = D_\alpha X_\beta + D_\beta X_\alpha.$$

On voit que c'est aussi la dérivée de Lie de g. Selon la formule ci-dessus, on a tout intérêt à choisir un champ X (de type temps) pour lequel π serait le plus petit possible. Le cas $\pi = 0$ est celui des champs de Killing (dont le flot laisse g invariante). Malheureusement, de tels champs n'existent pas en général. Les deux possibilités retenues par Klainerman sont d'une part $X = \frac{1}{2}(L+\underline{L}) = \partial_t$, généralisant ainsi l'inégalité d'énergie standard, d'autre part $X = \frac{1}{2}(u^2\underline{L} + \underline{u}^2 L)$, généralisant l'inégalité conforme du cas plat.

Il semble que ces choix soient guidés par deux considérations, outre le fait que ce sont les « bons choix » dans le cas plat :

a) D'abord, ces champs s'expriment simplement en termes de $u, \underline{u}, L, \underline{L}$, ce qui permet de calculer leurs tenseurs π en fonction des « coefficients du repère » (que nous discuterons au point 6).

b) Mais la vraie raison est la suivante : si nous décomposons la forme quadratique $Q^{\alpha\beta}\pi_{\alpha\beta}$ dans notre repère, tous les termes font intervenir au moins une « bonne » dérivée de ϕ (c'est-à-dire $e_i\phi$, $i = 1, 2$ ou $i = 4$), à l'exception du terme $\pi_{LL}Q_{\underline{L}\underline{L}}$ qui contient $|\underline{L}\phi|^2$. Mais justement, on peut calculer que

$$^{(T)}\pi_{LL} = 0, \quad ^{(K_0)}\pi_{LL} = 0.$$

Avec le choix du multiplicateur K_0, par exemple, on obtient le contrôle à l'instant t d'une énergie équivalant à

$$E(\phi)(t) = \int_{\Sigma_t} [|\phi|^2 + t^2|L\phi|^2 + t^2\Sigma_{a=1,2}|e_a\phi|^2 + u^2|\underline{L}\phi|^2]dv, \tag{4.1}$$

dv étant la mesure de volume induite par g sur Σ_t. Il est intéressant de comparer cette formule avec (3.1), sachant que, dans le cas plat, on a les relations

$$S + \Sigma\omega_i H_i = \underline{u}L, \quad S - \Sigma\omega_i H_i = u\underline{L}.$$

4.2. Le cas relativiste

Dans la situation II de l'étude des équations d'Einstein, les auteurs utilisent des estimations d'énergie du tenseur de courbure R. On sait que R satisfait la deuxième identité de Bianchi (« Bianchi equations »)

$$D_{[\varepsilon}R_{\gamma\delta]\alpha\beta} = 0,$$

où le crochet sur les indices signifie la somme alternée (comme pour la dérivée extérieure d'une 2-forme). En fait, puisque l'on étudie les équations d'Einstein dans le vide, qui s'écrivent $R_{\alpha\beta} = 0$, le tensor de Weyl W est identique à R, satisfait les mêmes équations de Bianchi, les mêmes symétries, avec en plus $W^{\alpha}{}_{\beta\alpha\gamma} = 0$. On peut établir une analogie entre ces équations et les équations de Maxwell. Le fait est qu'il existe une « machinerie » d'inégalités d'énergie analogue à celle que nous avons expliquée pour l'équation des ondes. On définit un tenseur d'énergie-moment (dit « de Bel-Robinson ») par

$$Q_{\alpha\beta\gamma\delta} = W_{\alpha\rho\gamma\sigma}W^{\rho\sigma}_{\beta\delta} + {}^*W_{\alpha\rho\gamma\sigma}{}^*W^{\rho\sigma}_{\beta\delta},$$

où ${}^*W_{\alpha\beta\gamma\delta} = (1/2)\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}W^{\mu\nu}{}_{\gamma\delta}$ est le dual de Hodge de W, défini à l'aide de la forme volume ε. Le tenseur Q jouit des propriétés suivantes :

i) Q est symétrique et de trace nulle par rapport à tout couple d'indices.

ii) $Q(X, Y, Z, U)$ est positif si les quatre champs X, Y, Z, U sont de type temps orientés vers le futur.

iii) Si W est solution des équations de Bianchi,

$$D^{\alpha}Q_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0.$$

Comme en 4.1, on en déduit qu'en posant, pour trois « multiplicateurs » donnés X, Y, Z,

$$P_{\alpha} = Q_{\alpha\beta\gamma\delta}X^{\beta}Y^{\gamma}Z^{\delta},$$

on trouve, si W satisfait les équations de Bianchi,

$$D^{\alpha}P_{\alpha} = \frac{1}{2}Q_{\alpha\beta\gamma\delta}[{}^{(X)}\pi^{\alpha\beta}Y^{\gamma}Z^{\delta} + {}^{(Y)}\pi^{\alpha\gamma}X^{\beta}Z^{\delta} + {}^{(Z)}\pi^{\alpha\delta}X^{\beta}Y^{\gamma}].$$

On voit donc que le choix des multiplicateurs X, Y, Z obéit exactement aux mêmes contraintes que pour l'équation des ondes : on prendra comme avant soit T, soit K_0, ce qui, compte tenu des symétries, ne laisse que quatre possibilités. Dans [9], les auteurs ne retiennent en fait que les choix (K_0, K_0, K_0) ou (K_0, K_0, T), ce qui correspond à l'inégalité conforme pour l'équation des ondes.

La nouveauté ici est qu'*il n'y a pas de coordonnée t*. On va donc intégrer $D^{\alpha}P_{\alpha}$ dans un domaine de détermination $K_{\lambda\nu}$ bordé par deux surfaces de niveau $u = \lambda$, $\underline{u} = \nu$ et une portion de $\Sigma_0 = \{t = 0\}$: au lieu d'obtenir une énergie qui s'exprime comme une intégrale sur un plan horizontal, comme dans le cas des ondes, on obtient deux intégrales sur le bord latéral de $K_{\lambda\nu}$, qui sont en fait, de façon analogue à (4.1), des intégrales des carrés de diverses composantes de R, agrémentées de divers poids qui sont des puissances de u et $\underline{u}$ (voir [9]).

5. COMMUTATIONS

Il s'avère qu'en général, pour obtenir des estimations ponctuelles à poids (qui sont ici r et $\langle u\rangle = (1+|u|^2)^{1/2}$) sur les solutions d'une équation hyperbolique, le contrôle de l'énergie de cette solution ne suffit pas. Dans l'esprit des inégalités de Sobolev, il faut aussi contrôler l'énergie d'un certain nombre de dérivées de la solution, résultat que l'on n'atteint qu'en établissant des équations vérifiées par ces dérivées, c'est-à-dire en les « commutant » à l'opérateur.

5.1. Le cas des ondes

Dans le cas plat (voir [7] ou l'exposé de Chemin [4]), on commute avec l'équation des produits Z^α, où les Z sont pris parmi les « champs de Klainerman »

$$\partial_\alpha, R_i, S, H_i.$$

Dans le cas général, on utilise la formule suivante (*cf.* [8]) :

$$[L_g, X]\phi = \pi^{\alpha\beta}\nabla^2\phi_{\alpha\beta} + D_\alpha\pi^{\alpha\beta}\partial_\beta\phi - (1/2)\partial^\beta(\operatorname{tr}\pi)\partial_\beta\phi.$$

On notera que le commutateur ne dépend que du tenseur de déformation $\pi = {}^{(X)}\pi$ de X, le même qui intervenait déjà dans les inégalités d'énergie. On remarquera à ce propos que, contrairement aux apparences, π contient des dérivées $X(g^{\alpha\beta})$, comme il est normal pour un commutateur, car

$$\pi^{\alpha\beta} = \partial^\alpha(X^\beta) + \partial^\beta(X^\alpha) - X(g^{\alpha\beta}).$$

Il faut donc commuter avec L_g des champs pour lesquels π soit le plus petit possible, et qui apportent l'information souhaitée. Dans le cas de l'équation des ondes (situation I), pour gagner le contrôle des dérivées de ϕ d'ordre supérieur à un, le plus simple est de commuter le champ $T = (1/2)(L + \underline{L})$, dont le tenseur de déformation a de bonnes propriétés. Utilisant alors l'équation, on obtient un contrôle de $\Delta_g\phi$ qui, via la théorie elliptique, donne finalement le contrôle de toutes les dérivées.

Il est cependant des cas où un contrôle de l'analogue des « champs de Klainerman » appliqués à ϕ est souhaitable, pour les mêmes raisons que dans le cas plat (par exemple, pour pouvoir ensuite appliquer l'inégalité de Klainerman [7] [4]). Dans ce cas, on dispose déja d'un analogue du champ de scaling S défini par

$$S = (1/2)(u\underline{L} + \underline{u}L).$$

Pour ce qui est des rotations analogues aux R_i, on note que les cônes sortants sont des surfaces caractéristiques pour L_g ; il est donc raisonnable de choisir des champs ${}^iO$ tangents aux sphères du feuilletage, c'est-à-dire ici aux sphères S_{t_0,u_0}. Le choix des auteurs est de préserver autant que faire se peut les relations existantes dans le cas plat

$$[R_i, R_j] = \varepsilon_{ijk} R^k, \quad [R_i, \partial_r] = 0, \quad \langle e_i, R_j \rangle = 0, \quad i = 3, 4.$$

Pour ce faire (toujours dans la situation I), on considère, dans Σ_0, le feuilletage en sphères $u = u_0$, et son champ unitaire normal (sortant) N. Le flot de N permet de ramener sur une sphère donnée les champs (standard !) R_i qui vivent sur la sphère à l'infini : cela est dû au fait que le feuilletage ressemble, à l'infini, au feuilletage standard, et que les champs R_i sont homogènes d'ordre zéro. Pour obtenir les champs tangents à la sphère S_{t_0,u_0}, on prend l'image des champs tangents à la sphère S_{0,u_0} par le flot de L, pendant le temps t_0. On assure ainsi les relations

$$[{}^i\!O, {}^j\!O] = \varepsilon_{ijk} {}^k\!O, \quad [L, {}^i\!O] = 0.$$

Il y a un certain arbitraire dans cette définition, car on aurait par exemple obtenu d'autres champs en transportant les champs standard de l'infini directement dans le plan Σ_{t_0}.

Finalement, notons qu'il ne semble pas qu'on dispose d'analogues aux rotations hyperboliques H_i du cas plat, jouissant de bonnes propriétés de commutation.

5.2. Le cas relativiste

On a vu que, dans ce cas, les auteurs utilisent les équations de Bianchi pour contrôler la courbure à l'aide d'inégalités d'énergie. Les champs que l'on souhaite commuter aux équations de Bianchi sont les mêmes que plus haut : T, S, ${}^{(i)}O$. Notons ici que les rotations ${}^{(i)}O$ sont définies à partir des rotations sur la surface $\{\underline{u}_0 = \underline{u}_*\}$ de Σ_0 à l'aide des flots de deux champs « équivariants » (c'est-à-dire que leurs flots appliquent les sphères du feuilletage les unes dans les autres) : on pousse d'abord les champs le long de $\underline{C}_*$ par le flot de $2\Omega^2 \underline{L}$, puis, de la sphère à laquelle on a abouti, le long du cône sortant par le flot de $2\Omega^2 L$ jusqu'à la sphère voulue.

La principale différence est qu'on dérive le tenseur de Weyl, et non pas une fonction, ce qui nécessite quelques précautions. Au lieu de considérer la dérivée de Lie usuelle $\mathcal{L}_X W$, on doit introduire, afin de préserver les symétries de W, la dérivée de Lie modifiée (par des termes linéaires)

$$\widehat{\mathcal{L}}_X W = \mathcal{L}_X W - (1/2)^{(X)}[W] + (3/8)\,\mathrm{tr}^{(X)}\,\pi W,$$

où l'on a posé (avec ${}^{(X)}\pi = \pi$)

$${}^{(X)}[W]_{\alpha\beta\gamma\delta} = \pi_\alpha^\mu W_{\mu\beta\gamma\delta} + \pi_\beta^\mu W_{\alpha\mu\gamma\delta} + \pi_\gamma^\mu W_{\alpha\beta\mu\delta} + \pi_\delta^\mu W_{\alpha\beta\gamma\mu}.$$

Nous renvoyons le lecteur à [3] pour des aperçus géométriques sur cette définition.

6. LES ÉQUATIONS DE STRUCTURE : PROPAGATION ET ELLIPTICITÉ

Nous avons vu plus haut la nécessité d'introduire les champs T, K_0, S, ${}^{(i)}O$, et comment leurs tenseurs de déformation intervenaient, aussi bien dans les inégalités d'énergie que dans les formules de commutation. Il reste à expliquer comment l'on contrôle ces divers tenseurs de déformations.

Bien que les traitements des situations géométriques I (ondes) et II (relativité) soient assez nettement différents, ils ont en commun suffisamment de traits caractéristiques pour que nous puissions en donner une idée en exposant ici le seul cas I. Nous reviendrons sur le cas II à la section 7.

Nous définissons les coefficients de connexion (qui sont des tenseurs sur les sphères du feuilletage) par les équations

$$\begin{aligned}
\chi_{ab} &= \langle D_a L, e_b\rangle, & \underline{\chi}_{ab} &= \langle D_a \underline{L}, e_b\rangle,\\
2\xi_a &= \langle D_L L, e_a\rangle = 0, & 2\underline{\xi}_a &= \langle D_{\underline{L}} \underline{L}, e_a\rangle,\\
2\eta_a &= \langle D_{\underline{L}} L, e_a\rangle, & 2\underline{\eta}_a &= \langle D_L \underline{L}, e_a\rangle.
\end{aligned}$$

Il est clair que ces coefficients suffisent à exprimer les tenseurs de déformation des champs T, S, K_0. Notons que χ et $\underline{\chi}$ sont les secondes formes pour le feuilletage en sphères, et à ce titre, symétriques. Définissons k comme la seconde forme pour les surfaces Σ_t,

$$k_{ij} = -(1/2)\partial_t g_{ij}.$$

Les formules

$$\begin{aligned}
\underline{\chi}_{ab} &= -\chi_{ab} - 2k_{ab}, & \underline{\xi}_a &= -\eta_a + k_{aN},\\
\underline{\eta}_a &= -k_{aN}, & \eta_a &= b^{-1} \neq \nabla_a b + k_{aN}
\end{aligned}$$

montrent, en supposant k suffisamment connue, qu'il suffit de contrôler χ, η, b.

Notons que ces coefficients sont à peu de chose près les composantes (non nulles) de $\nabla^2 u$:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 u_{ab} &= \langle D_a \nabla u, e_b\rangle = -\langle D_a b^{-1} L, e_b\rangle = -b^{-1}\chi_{ab},\\
\nabla^2 u_{a\underline{L}} &= -\langle D_{\underline{L}} b^{-1} L, e_a\rangle = -2b^{-1}\eta_a,\\
\nabla^2 u_{\underline{L}\underline{L}} &= -\langle D_{\underline{L}} b^{-1} L, \underline{L}\rangle = 2e_3(b)b^{-2} - 2b^{-1}k_{NN}.
\end{aligned}$$

En dérivant deux fois l'équation eikonale, on obtient d'autre part

$$D_L \nabla^2 u_{\alpha\beta} + b\nabla^2 u_\alpha^\mu \nabla^2 u_{\mu\beta} = b^{-1} R_{\alpha L\beta L}.$$

Pour en déduire les équations de transport sur χ, η, b, nous introduisons la partie sans trace de χ définie par

$$\widehat{\chi} = \chi - (1/2)g(\operatorname{tr}\chi).$$

Les *équations de transport* sont alors

$$\begin{aligned} L(b) &= -bk_{NN}, \\ L(\operatorname{tr}\chi) + (1/2)(\operatorname{tr}\chi)^2 &= -|\widehat{\chi}|^2 - k_{NN}\operatorname{tr}\chi - R_{44}, \\ \not{D}_4\widehat{\chi}_{ab} + (1/2)(\operatorname{tr}\chi)\widehat{\chi}_{ab} &= -k_{NN}\widehat{\chi}_{ab} - \widehat{\alpha}_{ab}, \\ \not{D}_4\eta_a + (1/2)(\operatorname{tr}\chi)\eta_a &= -(k_{Nb}+\eta_b)\widehat{\chi}_{ab} - (1/2)(\operatorname{tr}\chi)k_{aN} - (1/2)\beta_a, \end{aligned}$$

où α, β sont des composantes de R

$$\alpha_{ab} = R_{aLbL}, \quad \operatorname{tr}\alpha = R_{44}, \quad \beta_a = R_{La\underline{L}L},$$

et $\not{D}_4$ est la projection sur l'espace tangent aux sphères de D_4. En principe, ces équations suffisent à saisir χ, η, b et leurs dérivées. Cependant, cela conduit à de mauvaises estimations, à cause de pertes de dérivées. C'est pourquoi l'on introduit l'équation de Codazzi

$$\not{\mathrm{d}}\mathrm{iv}\,\widehat{\chi}_a + \widehat{\chi}_{ab}k_{bN} = (1/2)(\not{\nabla}_a\operatorname{tr}\chi + k_{aN}\operatorname{tr}\chi) - R_{b4ab}.$$

La clé est de penser cette équation comme un *système elliptique* sur les sphères.

La stratégie est alors la suivante :

i) On remarque que l'équation de transport sur $\operatorname{tr}\chi$ ne fait intervenir que la composante R_{44} du tenseur de Ricci.

ii) Le point crucial est la structure particulière de $\operatorname{Ric}(L, L)$,

$$\operatorname{Ric}(L, L) = L(m) - (1/2)e_4^\mu e_4^\nu L_g(g_{\mu\nu}) + E.$$

Ici, m ne dépend que des dérivées premières de g, et E est une somme de termes quadratiques en les dérivées premières de g. Dans le contexte du problème non-linéaire de [10], on dispose sur $L_g(g_{\mu\nu})$ d'estimations meilleures que sur les composantes de R en général. En appliquant e_a à l'équation de transport, et en introduisant l'inconnue « normalisée » $y = \operatorname{tr}\chi - 2/(t-u)$, on trouve finalement

$$\begin{aligned} &\not{D}_4\ \not{\nabla}_a(y+m) + (3/2)\ \not{\nabla}_a(y+m) \\ &\quad = -\widehat{\chi}_{ab}\ \not{\nabla}_b(y+m) + (y+m)\ \not{\nabla}_a(y+m) - (y+m)\ \not{\nabla}_a\operatorname{tr}\chi\widehat{\chi} - \operatorname{tr}\chi\ \not{\nabla}_a k_{NN} \\ &\qquad\qquad - k_{NN}\ \not{\nabla}_a\operatorname{tr}\chi + \not{\nabla}_a((1/2)e_4^\mu e_4^\nu L_g g_{\mu\nu} - E). \end{aligned}$$

iii) En combinant cette équation à l'équation de Codazzi, on contrôle finalement les dérivées sur les sphères de $\operatorname{tr}\chi$, $\widehat{\chi}$ sans faire intervenir de dérivées de R. On a donc véritablement gagné une dérivée.

Pour contrôler $\nabla_a\eta$ ainsi que la dérivée manquante $\underline{L}\operatorname{tr}\chi$, on ne dérive pas l'équation de transport sur η, car cela introduirait une dérivée de β. On pose

$$\mu = 2\operatorname{div}\eta + 2\operatorname{tr}\chi k_{NN} + 2|\eta|^2 - \operatorname{tr}(\widehat{\chi}.\widehat{\underline{\chi}}) + \gamma,$$

où $\gamma = R^1_{431} + R^2_{432}$. L'équation de transport sur μ s'écrit

$$L\mu + \mu\operatorname{tr}\chi = \cdots + \underline{L}(R_{44}),$$

où les points désignent des termes qui ne contiennent pas de dérivées de R. Compte tenu de la structure remarquable de R_{44}, le terme $\underline{L}(R_{44})$ ne pose plus de problème. Une fois μ estimée, on obtient les dérivées de η par le *système elliptique*

$$\operatorname{div}\eta = (1/2)\mu - \operatorname{tr}\chi k_{NN} - |\eta|^2 + (1/2)\operatorname{tr}(\widehat{\chi}\widehat{\underline{\chi}}) - (1/2)\gamma,$$

$$\operatorname{curl}\eta = (1/2)(\widehat{\underline{\chi}}_{1c}\widehat{\chi}_{2c} - \widehat{\underline{\chi}}_{2c}\widehat{\chi}_{1c}) - (1/2)(R_{1432} - R_{2431}).$$

Finalement,

$$\underline{L}\operatorname{tr}\chi = \mu - k_{NN}\operatorname{tr}\chi + (1/2)(\operatorname{tr}\chi)^2$$

fournit l'information souhaitée.

7. COMPTAGE DES DÉRIVÉES ET ÉQUATIONS EIKONALES EN RELATIVITÉ

Nous n'avons jusqu'ici discuté que de la façon d'obtenir des estimations de solutions d'équations linéaires. Un problème fondamental dans le cas non-linéaire est la mise au point d'une hypothèse d'induction. Une telle hypothèse comporte en général l'indication des comportements d'un certain nombre n de dérivées de la solution. L'étude du problème linéaire dont les propriétés sont déduites de cette hypothèse doit permettre de retrouver (avec une amélioration) ces mêmes propriétés, en particulier de retrouver un contrôle du même nombre n de dérivées.

Nous allons brièvement expliquer ce « comptage des dérivées » dans le cas de la relativité. L'hypothèse d'induction consiste à supposer connues, dans une région $\mathcal{K}$ bordée par une portion de Σ_0, une portion de cône sortant $u = \nu_0$ et une portion de cône rentrant $\underline{u} = \underline{u}_*$, une métrique, ainsi que deux fonctions optiques u et $\underline{u}$ réalisant un feuilletage dit « canonique », et vérifiant

$$\mathcal{O} \leqslant \varepsilon_0, \mathcal{R} \leqslant \varepsilon_0.$$

En simplifiant outrageusement, on peut dire que la quantité $\mathcal{R}$ décrit les comportements de dérivées d'ordre (au plus) deux des composantes de R, tandis que $\mathcal{O}$ décrit les comportements de dérivées d'ordre (au plus) trois des coefficients de connexion (notons que les dérivées d'ordre trois sont prises sur les sphères). Pour retrouver/améliorer l'hypothèse sur R, on utilise les équations de Bianchi que l'on dérive deux fois. Nous admettrons, ce qui est *très loin* d'être évident, que les informations sur $\mathcal{O}$ suffisent pour maîtriser les commutations et les inégalités d'énergie correspondantes. Il faut ensuite retrouver l'hypothèse sur $\mathcal{O}$, et c'est ce point que nous allons un peu détailler, pour bien voir comment les fonctions optiques u et $\underline{u}$ sont construites.

Dans la situation géométrique II, on définit des coefficients de connexion, tout à fait comme au point 6 :

$$\begin{gathered}\chi_{ab}=\langle D_a e_4, e_b\rangle, \quad \underline{\chi}_{ab}=\langle D_a e_3, e_b\rangle, \quad 2\zeta_a=\langle D_a e_4, e_3\rangle,\\ 2\xi_a=\langle D_{e_4} e_4, e_a\rangle=0, \quad \underline{\xi}_a=\langle D_{e_3} e_3, e_a\rangle=0,\\ \eta_a=(1/2)\langle D_{e_3} e_4, e_a\rangle=\zeta_a+\nabla_a \log\Omega,\\ \underline{\eta}_a=(1/2)\langle D_{e_4} e_3, e_a\rangle=-\zeta_a+\nabla_a \log\Omega,\\ 4\omega=\langle D_{e_4} e_4, e_3\rangle=-2D_4\log\Omega, 4\underline{\omega}=\langle D_{e_3} e_3, e_4\rangle=-2D_3\log\Omega.\end{gathered}$$

La grande différence est que les composantes de *Ric* sont nulles. Les *équations de transport naturelles*, où l'on a scindé χ et $\underline{\chi}$, sont comme plus haut

$$\begin{aligned}D_4 \operatorname{tr}\chi+(1/2)(\operatorname{tr}\chi)^2-(D_4\log\Omega)\operatorname{tr}\chi+|\widehat{\chi}|^2&=0,\\ D_4\widehat{\chi}+\operatorname{tr}\chi\widehat{\chi}-(D_4\log\Omega)\widehat{\chi}&=-\alpha,\\ \not{D}_4\zeta+2\chi\zeta+\not{D}_4\log\Omega&=-\beta,\\ D_3\operatorname{tr}\underline{\chi}+(1/2)(\operatorname{tr}\underline{\chi})^2-(D_3\log\Omega)\operatorname{tr}\underline{\chi}+|\widehat{\underline{\chi}}|^2&=0,\\ D_3\widehat{\underline{\chi}}+\operatorname{tr}\underline{\chi}\widehat{\underline{\chi}}-(D_3\log\Omega)\widehat{\underline{\chi}}&=-\alpha.\end{aligned}\tag{7.1}$$

Les équations « anti-naturelles », qui expriment $D_3 \operatorname{tr}\chi$ ou $D_4 \operatorname{tr}\underline{\chi}$ en fonction de $\operatorname{div}\zeta$, servent en fait à calculer $\operatorname{div}\zeta$, comme on l'a vu plus haut.

Les *équations elliptiques* sont

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\widehat{\chi}+\widehat{\chi}\zeta&=(1/2)(\nabla\operatorname{tr}\chi+\zeta\operatorname{tr}\chi)-\beta,\\ \operatorname{div}\widehat{\underline{\chi}}-\widehat{\underline{\chi}}\zeta&=(1/2)(\nabla\operatorname{tr}\underline{\chi}-\zeta\underline{\chi})+\beta,\\ \operatorname{curl}\zeta&=-(1/2)\widehat{\chi}\wedge\widehat{\underline{\chi}}+\sigma,\\ \operatorname{div}\zeta&=\cdots,\end{aligned}$$

où les points indiquent des quantités préalablement estimées.

C'est la nécessité de « boucler » l'hypothèse d'induction qui va conduire au concept fondamental de « feuilletage canonique ». Supposons en effet donnée sur Σ_0 une fonction w dont les surfaces de niveau forment un feuilletage en sphères raisonnable de Σ_0, et qui servira de donnée initale pour $\underline{u}$. Le contrôle de trois dérivées de $\underline{\chi}$ via (7.1) nécessite le contrôle de trois dérivées de θ, la seconde forme du feuilletage en sphères sur Σ_0. En notant N le vecteur unitaire sortant et $a=|\nabla w|^{-1}$, on a

$$\nabla_N \operatorname{tr}\theta+(1/2)(\operatorname{tr}\theta)^2=-(\Delta\log a+\rho)+[-|\nabla\log a|^2+|\widehat{\theta}|^2+g(k)],$$

où $g(k)$ est une somme de carrés de composantes de k. Comme on n'a besoin en fait que de trois dérivées $\not\nabla$, pour ne pas avoir à dériver ρ, on va demander, et c'est là la définition du feuilletage canonique sur Σ_0,

$$\not\Delta\log a+\rho=\overline{\rho}, \quad \overline{\log a}=0,$$

où la barre supérieure dénote la moyenne sur la sphère.

Pour choisir la donnée $\underline{u}_*$ de u sur $\underline{C}_*$, on introduit comme au point 6 la fonction μ

$$\mu = -\,\not{\mathrm{d}}\mathrm{iv}\,\eta + (1/2)\widehat{\chi}\widehat{\underline{\chi}} - \rho.$$

Le point important est que l'équation de transport sur μ est agréable. Pour contrôler les dérivées $\not\nabla$, on choisit d'imposer $\mu = \overline{\mu}$ sur $\underline{C}_*$. Sans entrer dans les détails, disons qu'il est possible de choisir u de cette façon, que les auteurs appellent « canonique ».

8. VERS LA CONJECTURE H^2 ?

Pour terminer ce court exposé, nous voudrions effleurer les travaux en cours iii) de Klainerman et Rodniansky [11–16]. Il ne nous est en aucune façon possible d'entrer ici dans les détails. Ce qui importe pour notre propos est d'illustrer l'*unité* des méthodes d'approche.

Il s'agit du problème de type B : résoudre les équations d'Einstein pour des données de Cauchy $g \in H^2, k \in H^1$. Dans le contexte que nous avons expliqué plus haut, un des points clé est de pouvoir contrôler les cônes sortants, surfaces de niveau de la fonction optique u. Rappelons (*cf.* [9]) que $\int_S \mathrm{tr}\,\chi$ mesure le taux de variation du volume de S dans la direction de e_4 : pour éviter l'apparition d'un phénomène de type « caustique », il est donc nécessaire (entre autres choses) de contrôler $\mathrm{tr}\,\chi$ dans L^∞. En notant ici $L = -\nabla u$ et $\chi(X,Y) = \langle D_X L, Y\rangle$, on a l'équation de transport

$$L(\mathrm{tr}\,\chi) + (1/2)(\mathrm{tr}\,\chi)^2 = -|\widehat{\chi}|^2.$$

Il faut donc contrôler $\int_\Gamma |\widehat{\chi}|^2$ sur les géodésiques Γ qui tissent un cône sortant C.

On a vu (au paragraphe 7) que la bonne façon d'estimer $\widehat{\chi}$ est l'équation de Codazzi

$$\mathrm{div}\,\widehat{\chi} = -\beta + (1/2)\ \not\nabla\,\mathrm{tr}\,\chi + (1/2)\,\mathrm{tr}\,\chi\zeta - \zeta.\widehat{\chi}.$$

En supposant que les deux derniers termes ne causent pas de problèmes, et en notant D^{-1} l'opérateur pseudo-différentiel (sur la sphère !) d'ordre -1 qui résout le système ci-dessus, il reste à considérer

$$I_1 = \int_\Gamma |D^{-1}\beta|^2, I_2 = \int_\Gamma |D^{-1}\ \not\nabla\,\mathrm{tr}\,\chi|^2.$$

Nous supposons estimée la quantité R_0, qui est la somme des normes des « bonnes » composantes de R (dont β) dans $L^2(C)$. Notons que Γ est de codimension deux dans C (qui est de dimension trois), en sorte que le théorème de trace de $H^s(C)$ dans $H^{s-1}(\Gamma)$ qu'on aimerait utiliser... est faux, car ici $s = 1$ et non $s > 1$. De façon tout à fait analogue à la situation de [10] décrite en 6 où la structure particulière de R_{44} permettait de gagner une dérivée, c'est ici la *structure particulière de* β qui va nous aider. Les équations de Bianchi, écrites dans le repère habituel, donnent en particulier (*cf.* [9])

$$\not{\mathrm{div}}\,\beta = D_4\rho + (3/2)\rho\,\mathrm{tr}\,\chi + (1/2)\underline{\widehat{\chi}}.\alpha - \zeta\beta - 2\underline{\eta}\beta,$$
$$\mathrm{curl}\,\beta = -D_4\sigma - (3/2)\,\mathrm{tr}\,\chi\sigma + (1/2)\underline{\widehat{\chi}}^*\alpha - \zeta^*\beta - 2\underline{\eta}^*\beta.$$

En abrégé, nous écrivons $\beta = D^{-1}(L(\rho), L(\sigma))$, soit, en ignorant le commutateur

$$D^{-1}\beta = \nabla_L Q + \cdots, \quad Q = D^{-2}(\rho,\sigma).$$

L'intégrale I_1 sera majorée par la norme de $Q|\Gamma$ dans H^1, qui est estimée par

$$|Q|_{H^2(C)} \leqslant C|(\rho,\sigma)|_{L^2(C)} \leqslant CR_0.$$

Si l'on a une chance de majorer $|\,\mathrm{tr}\,\chi|_{L^\infty}$ à l'aide de l'équation de transport, c'est en majorant I_2 à l'aide de cette même norme. Mais $D^{-1}\ \not\nabla$, opérateur (pseudo-différentiel) d'ordre zéro sur la sphère, n'opère pas dans L^∞... Nous arrêtons ici, en plein « suspens », le récit de cette passionnante aventure, en espérant avoir donné au lecteur quelques clés pour aborder la lecture des travaux de Klainerman et Rodniansky [14–16].

Remarque. — Nous nous sommes limités ci-dessous aux travaux ayant un rapport immédiat avec l'approche que nous avons choisie. Une bibliographie plus vaste concernant les équations hyperboliques non-linéaires se trouve dans [7], tandis que les lecteurs plus spécialement intéressés par la relativité consulteront [9].

RÉFÉRENCES

[1] H. Bahouri & J.-Y. Chemin – « Équations d'ondes quasi-linéaires et effet dispersif », *Internat. Math. Res. Notices* **21** (1999), p. 1141–1178.

[2] H. Bahouri & J.-Y. Chemin – « Équations d'ondes quasi-linéaires et estimations de Strichartz », *Amer. J. Math.* **121** (1999), p. 1337–1377.

[3] J.-P. Bourguignon – « Stabilité par déformation non-linéaire de la métrique de Minkowski », in *Sém. Bourbaki 1990/91*, Astérisque, vol. 201-202-203, Société Mathématique de France, 1991, Exp. n° 740, p. 321–358.

[4] J.-Y. Chemin – « Explosion géométrique pour certaines équations d'ondes non linéaires », in *Sém. Bourbaki, 1998/99*, Astérisque, vol. 266, Société Mathématique de France, 2000, Exp. n° 850, p. 7–20.

[5] D. Christodoulou & S. Klainerman – « Asymptotic properties of linear field equations in Minkowski space », *Comm. Pure Appl. Math.* **XLIII** (1990), p. 137–199.

[6] ______, *The global nonlinear stability of the Minkowski space*, Princeton Math. Series, vol. 41, Princeton University Press, 1993.

[7] L. Hörmander – *Lectures on Nonlinear Hyperbolic Equations*, Math. Appl., vol. 26, Springer-Verlag, 1987.

[8] S. Klainerman – « A commuting vector field approach to Strichartz type inequalities and applications to quasilinear wave equations », *Internat. Math. Res. Notices* **5** (2001), p. 221–274.

[9] S. Klainerman & F. Nicolò – *The evolution problem in general relativity*, Prog. Math. Physics, vol. 25, Birkhäuser, 2003.

[10] S. Klainerman & I. Rodniansky – « Improved local well posedness for quasilinear wave equations in dimension three », *Duke Math. J.* **117** (2003), p. 1–124.

[11] ———, « Rough solutions of the Einstein vacuum equations », *Ann. of Math.* (to appear).

[12] ———, « The causal structure of microlocalized, rough, Einstein metrics », *Ann. of Math.* (to appear).

[13] ———, « Ricci defects of microlocalized Einstein metrics », *J Nonlinear Hyp. Eq.* (to appear).

[14] ———, « Causal geometry of Einstein-vacuum spacetimes with finite curvature flux », *Invent. Math.* (to appear).

[15] ———, « A geometric theory of Littlewood-Paley theory », preprint, 2003.

[16] ———, « Sharp trace theorems for null hypersurfaces on Einstein metrics with finite curvature flux », preprint, 2003.

[17] H. Lindblad & I. Rodniansky – « Global Existence for the Einstein vacuum equations in wave coordinates », preprint, 2003.

Serge ALINHAC

Université Paris XI
Département de Mathématiques
Bâtiment 425
F-91405 Orsay Cedex
E-mail : Serge.Alinhac@math.u-psud.fr