Séminaire BOURBAKI Mars 2004
56e année, 2003-2004, nº 932, p. 195 à 217

COMPLÈTE RÉDUCTIBILITÉ

par **Jean-Pierre SERRE**

1. INTRODUCTION : LE CAS DU GROUPE LINÉAIRE

1.1. Rappels

Soient k un corps commutatif et Γ un groupe. Un Γ-*module* (ou *une représentation linéaire* de Γ) est un k-espace vectoriel V de dimension finie, muni d'une action linéaire de Γ.

On dit que :

(1.1.1) V est *irréductible* (ou *simple*) si $V \neq 0$ et si V ne contient aucun sous-Γ-module distinct de 0 et de V.

(1.1.2) V est *complètement réductible* (ou *semi-simple*) si V est somme directe de Γ-modules irréductibles.

(1.1.3) V est *indécomposable* si $V \neq 0$, et si V n'est pas somme directe de deux sous-Γ-modules $\neq 0$.

[Dans la suite, nous abrégerons en écrivant ir, cr, ind respectivement.]

Les propriétés suivantes sont bien connues :

(1.1.4) V est cr si et seulement si, pour tout sous-module W de V, il existe un sous-module W' de V tel que $V = W \oplus W'$.

(1.1.5) Si V est somme directe de sous-modules V_i, alors V est cr $\Leftrightarrow$ tous les V_i sont cr.

On connaît moins bien les propriétés relatives au produit tensoriel $V \otimes V'$ de deux représentations V et V'. La plupart des cours d'Algèbre se bornent à définir le produit en question, et à en démontrer des propriétés évidentes. Aucun, à ma connaissance, ne signale le résultat très frappant suivant, dû à Chevalley :

THÉORÈME 1.1 ([Ch55, p. 88]). — *Supposons k de caractéristique* 0. *Si V et V' sont des Γ-modules complètement réductibles, leur produit tensoriel $V \otimes V'$ est complètement réductible.*
(Noter que l'on ne fait aucune hypothèse sur le groupe Γ.)

Lorsqu'on veut étendre ce théorème à la caractéristique p (avec des conditions restrictives sur $\dim V$ et $\dim V'$, *cf.* prop. 5.8), il est utile de disposer d'une notion de *complète réductibilité* dans laquelle le groupe linéaire $\mathbf{GL}(V)$ est remplacé par un groupe réductif quelconque. Cette notion peut se définir, soit en termes de sous-groupes paraboliques, soit en termes d'*immeubles de Tits*, *cf.* [Se97b], [Se98]. C'est ce que nous allons voir. Les §§ 2,3 contiennent les énoncés généraux, et les §§ 4,5 donnent des critères plus précis, ainsi que diverses applications.

1.2. Exemple : l'immeuble de $\mathbf{GL}(V)$

Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie n. On supposera $n \geqslant 2$ (sinon, l'immeuble correspondant est vide).

1.2.1. Définition. — L'immeuble de $\mathbf{GL}(V)$, appelé aussi immeuble de V, est un complexe simplicial $X = X(V)$, de dimension $n-2$, qui est défini de la manière suivante :

– les sommets de X correspondent bijectivement aux sous-espaces vectoriels de V distincts de 0 et de V. (Si W est un tel sous-espace, on note x_W le sommet correspondant.)

– un ensemble s de sommets de X est un simplexe de X si et seulement si les sous-espaces vectoriels correspondants forment un drapeau, i.e. une filtration strictement croissante de V. [Si l'on préfère la géométrie projective à la géométrie affine, on peut aussi voir les sommets de X comme les sous-variétés projectives de l'espace projectif $\mathbf{P}(V)$, distinctes de $\varnothing$ et de $\mathbf{P}(V)$.]

1.2.2. Type. — Si $x = x_W$ est un sommet de X, on note $\mathrm{type}(x)$ la dimension de l'espace vectoriel W. L'ensemble des types de sommets est l'ensemble $I = \{1, \ldots, n-1\}$.

1.2.3. Opposition. — Deux sommets $x = x_W$ et $x' = x_{W'}$ sont dits *opposés* si V est somme directe de W et W' ; leurs types se correspondent par l'involution $t \mapsto n-t$ de I. Deux simplexes sont *opposés* si tout sommet de l'un est opposé à un sommet de l'autre. En termes de filtrations, cela correspond à la notion usuelle de *filtrations opposées*.

1.2.4. Sous-groupes paraboliques. — Les sous-groupes paraboliques de $\mathbf{GL}(V)$ sont les stabilisateurs des drapeaux de V. Les sous-groupes paraboliques *propres* (i.e. distincts de $\mathbf{GL}(V)$) correspondent donc aux simplexes non vides de l'immeuble X ; les paraboliques maximaux correspondent aux sommets de X et le groupe $\mathbf{GL}(V)$ au simplexe $\varnothing$. Deux simplexes s et s', correspondant aux paraboliques P et P', sont opposés au sens du n° 1.2.3 si et seulement si P et P' sont opposés au sens usuel du terme, c'est-à-dire si $P \cap P'$ est un sous-groupe de Levi de chacun d'eux, *cf.* [BT65, 4.8].

1.2.5. Appartements. — Soit T un tore déployé maximal de $\mathbf{GL}(V)$. L'action de T sur V décompose V en somme directe de droites D_i. Si, dans la définition de X, on se restreint aux W qui sont sommes directes de certaines des D_i, on obtient un sous-complexe C de X qui est isomorphe au *complexe de Coxeter* du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$. D'un point de vue combinatoire, c'est la subdivision barycentrique du bord d'un $(n-1)$-simplexe; topologiquement, c'est une sphère de dimension $n-2$. Un sous-complexe de X obtenu de cette façon est appelé un *appartement* de X. Par construction, les appartements correspondent aux tores déployés maximaux de $\mathbf{GL}(V)$.

1.2.6. Exemple. — Prenons $n = 3$. L'immeuble correspondant est un *graphe*, qui a deux types de sommets : ceux qui correspondent aux points du plan projectif et ceux qui correspondent aux droites. Deux sommets sont voisins (i.e. sont les extrémités d'une arête) si et seulement si ils correspondent à un point situé sur une droite : la relation de voisinage est la relation d'incidence. Les appartements sont les hexagones $a - B - c - A - b - C - a$ associés aux triangles ABC, de côtés $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$: la théorie de Tits transforme triangles en hexagones!

1.3. Traductions immobilières : le cas de $\mathbf{GL}(V)$

Si V est un Γ-module, le groupe Γ opère de façon naturelle sur l'immeuble $X = X(V)$ du n° 1.2. Cette action respecte les types (au sens du n° 1.2.2). En particulier, si un simplexe s de X est stable par Γ, il est fixé par Γ. Si P est le sous-groupe parabolique correspondant à s, P est normalisé par Γ, i.e. contient Γ (puisqu'un parabolique est son propre normalisateur). Le sous-espace X^Γ des points fixes de Γ est un *sous-complexe simplicial* de X, et les définitions du n° 1.1 se traduisent de la façon suivante :

(1.3.1) V est *irréductible* $\Leftrightarrow X^\Gamma = \varnothing \Leftrightarrow \Gamma$ n'est contenu dans aucun sous-groupe parabolique propre de $\mathbf{GL}(V)$.

(1.3.2) V est *complètement réductible* $\Leftrightarrow$ pour tout sommet x de X^Γ il existe un sommet x' de X^Γ qui est opposé à x (*cf.* 1.2.3) $\Leftrightarrow$ pour tout parabolique maximal P contenant Γ, il existe un parabolique P' opposé à P qui contient Γ.

(1.3.3) V est *indécomposable* $\Leftrightarrow X^\Gamma$ ne contient aucun couple de sommets opposés $\Leftrightarrow$ il n'existe pas de couple (P, P') de paraboliques propres de $\mathbf{GL}(V)$ qui soient opposés et contiennent tous deux Γ.

Il n'est pas difficile de montrer que (1.3.2) équivaut à :

$(1.3.2')$ pour tout simplexe s de X^Γ, il existe un simplexe s' de X^Γ qui est opposé à $s \Leftrightarrow$ pour tout parabolique P (maximal ou pas) contenant Γ, il existe un parabolique opposé à P qui contient Γ.

2. LA COMPLÈTE RÉDUCTIBILITÉ DANS LES IMMEUBLES SPHÉRIQUES

2.1. Immeubles sphériques

Un immeuble sphérique est un complexe simplicial X, muni d'une famille de sous-complexes appelés *appartements*. Je renvoie à [Ti74] pour la liste des axiomes ; voir aussi [Br89], [Ron89] et [TW02, § 40]. Voici quelques-unes des propriétés de ces immeubles :

2.1.1. Dimension et rang. — Le complexe X est de dimension finie. L'entier $r = \dim(X) + 1$ est appelé le *rang* de X. Lorsque $X = \varnothing$, on convient que $\dim(X) = -1$, de sorte que $r = 0$. Tout simplexe maximal est de dimension $\dim(X)$.

2.1.2. Types des sommets. — Soit $\mathrm{som}(X)$ l'ensemble des sommets de X. Il existe une unique relation d'équivalence R sur $\mathrm{som}(X)$ ayant les propriétés suivantes :

(a) L'ensemble quotient $\mathrm{som}(X)/R$ a r éléments.

(b) Deux sommets appartenant à un même simplexe ne sont R-équivalents que s'ils sont égaux.

Si $x \in \mathrm{som}(X)$, l'image de x dans $I = \mathrm{som}(X)/R$ est appelée le *type* de x, et notée $\mathrm{type}(x)$. On dit qu'un automorphisme f de X *préserve les types* si x et $f(x)$ ont même type quel que soit $x \in \mathrm{som}(X)$.

Exemple. — Lorsque X est l'immeuble $X(V)$ du n° 1.2, on peut identifier I à $\{1, \ldots, n-1\}$, *cf.* 1.2.2.

2.1.3. Appartements. — Un appartement est isomorphe au complexe de Coxeter d'un groupe de Coxeter fini qui ne dépend que de X ; c'est une sphère de dimension $r - 1$. Deux simplexes quelconques sont contenus dans un appartement.

2.1.4. Opposition et géodésiques. — Soient x et y deux points de X (c'est-à-dire de sa réalisation géométrique), et soit A un appartement les contenant. On dit que x et y sont *opposés* dans X s'ils le sont dans A (ce qui a un sens puisque A est un complexe de Coxeter) ; cela ne dépend pas du choix de A. Deux simplexes sont dits opposés si chaque sommet de l'un est opposé à un sommet de l'autre. Si x et y ne sont pas opposés, il y a une unique géodésique xy qui les joint dans A. Elle est indépendante (paramétrisation comprise) du choix de A.

2.1.5. Convexité. — Une partie Y de X est dite *convexe*, si l'on a $xy \subset Y$ pour tout couple de points x, y de Y, non opposés. On dit que Y est *strictement convexe* si Y est convexe et ne contient aucun couple de points opposés (c'est la notion de « convexité » de [Ti74] et de [Mu65, p. 63]).

2.1.6. Sphères de Levi. — Une sphère de Levi est un sous-complexe S de X, qui est contenu dans un appartement A, et qui est l'intersection de A (vu comme sphère) avec un sous-espace vectoriel.

2.1.7. Remarque. — Ces définitions se présentent de façon un peu plus naturelle si l'on introduit l'immeuble vectoriel X^{vect} associé à X, dans lequel les points de X sont remplacés par des demi-droites, ayant en commun un point « 0 » (*cf.* [Rou78]). Les appartements deviennent alors des espaces vectoriels de dimension r, et les sphères de Levi des sous-espaces vectoriels définis par l'annulation de certaines racines. Si x et y sont deux points de X^{vect}, leur somme $x+y$ a un sens, et l'on a

$$x+(y+z)=(x+y)+z$$

pourvu que x, y et z appartiennent à un même appartement. Deux points x et x' sont opposés si $x+x'=0$. Une partie de X est convexe si le cône correspondant de X^{vect} est stable par $(x,y)\mapsto x+y$, autrement dit si son intersection avec tout appartement est un cône convexe au sens usuel du terme.

2.1.8. Immeuble résiduel. — Soit s un simplexe de X de dimension m. On note X_s, ou $\mathrm{St}(s)$, l'immeuble résiduel (« link ») de X en s, *cf.* [Ti74]). Rappelons que les simplexes de X_s de dimension d correspondent bijectivement aux simplexes de X contenant s de dimension $d+m+1$ (de sorte que le simplexe vide de X_s correspond à s). Si Y est un sous-complexe de X, les simplexes de Y contenant s définissent un sous-complexe Y_s de X_s ; si Y est convexe, il en est de même de Y_s.

Soit S une sphère de Levi, et soient s et s' deux simplexes de S de dimension maximale. Il y a un isomorphisme canonique $\mathrm{proj} : X_s \to X_{s'}$ (défini dans [Ti74, § 3.19]). Ces isomorphismes satisfont à la condition de transitivité usuelle, ce qui permet d'écrire X_S à la place de X_s. L'immeuble X_S peut être appelé *l'immeuble* de S. Les sphères de Levi de X_S correspondent bijectivement aux sphères de Levi de X contenant S.

2.2. Complète réductibilité et contractibilité

2.2.1. Définition. — Une partie Y de X est dite *complètement réductible* (en abrégé : X-cr, ou simplement cr) si elle est convexe, et si, pour tout point $y\in Y$, il existe $y'\in Y$ qui est opposé à y.

Dans la suite, nous nous intéresserons surtout au cas où Y est un sous-complexe convexe de X (ou, parfois, de sa subdivision barycentrique) ; dans ce cas, la condition cr équivaut à dire que, pour tout simplexe s de Y, il existe un simplexe s' de Y qui est opposé à s (il suffit même que tout sommet de Y ait un opposé dans Y, *cf.* th. 2.2 ci-dessous).

Exemple de sous-complexe convexe. — Prenons pour X l'immeuble $X(V)$ du n° 1.2. Soit L un ensemble de sous-espaces vectoriels de V tel que :

$$W, W' \in L \quad \Longrightarrow \quad W \cap W' \in L \quad \text{et} \quad W + W' \in L.$$

Soit Y_L le sous-complexe plein de $X(V)$ dont les sommets sont les x_W, pour $W \in L$ et $W \neq 0, V$ (*cf.* 1.2.1). Alors Y_L est *convexe*, et l'on obtient ainsi tous les sous-complexes convexes de $X(V)$.

2.2.2. Nous allons donner un critère topologique permettant de reconnaître si un sous-complexe convexe est cr. Précisons que nous munissons X de la topologie limite inductive : une partie de X est ouverte si ses intersections avec les sous-complexes finis de X le sont. (Une autre topologie est souvent utile : celle définie par la distance angulaire ; elle n'interviendra pas ici.)

Rappelons d'autre part qu'un espace est *contractile* s'il a le type d'homotopie d'un point ; un espace discret est contractile si et seulement si son cardinal est égal à 1 (l'ensemble vide n'est pas contractile !).

Théorème 2.1 ([Se97b]). — *Soit Y un sous-complexe convexe de X. Les propriétés suivantes sont équivalentes* :

(a) Y *est* X-cr.
(b) Y *contient un couple* (s, s') *de simplexes opposés ayant même dimension que* Y.
(c) Y *contient une sphère de Levi* S *de dimension* $\dim(Y)$.
(d) Y *n'est pas contractile.*

Démonstration. — (a) ⇒ (b) est clair.

(b) ⇒ (c) : le plus petit sous-complexe convexe $C(s, s')$ contenant s et s' est une sphère de Levi.

(c) ⇒ (d) : la sphère S définit un cycle dans Y qui n'est pas homologue à 0 puisqu'il est de même dimension que Y (ceci ne vaut que si $\dim(Y) \geqslant 1$, mais le cas $\dim(Y) \leqslant 0$ est immédiat).

(d) ⇒ (a) : si Y n'est pas cr, il existe un point $y \in Y$ qui n'a pas d'opposé dans Y, et l'on contracte Y grâce aux géodésiques issues de y. ☐

Théorème 2.2. — *Les conditions* (a), …, (d) *du th.* 2.1 *sont équivalentes à* :

(e) *Pour tout sommet x de Y, il existe un sommet x' de Y qui est opposé à x.*

La démonstration sera donnée au n° 2.2.5 ci-dessous.

Remarques. — 1) Un résultat analogue au th. 2.1 vaut pour les sous-complexes convexes de la subdivision barycentrique de X, à condition d'utiliser d'autres sphères que les sphères de Levi.

2) Supposons que Y soit cr, et non vide. On peut préciser sa structure topologique de la façon suivante :

Choisissons un simplexe s de Y de dimension maximum, et soit $U(s)$ l'ensemble des simplexes de Y qui sont opposés à s. Si $t \in U(s)$, soit $S_t = C(s,t)$ la sphère de Levi définie par s et t. Soit $B = * S_t$ le bouquet des sphères S_t $(t \in U(s))$; le choix d'un point x de s permet d'envoyer B dans Y.

PROPOSITION 2.3. — *L'application $B \to Y$ ainsi définie est une équivalence d'homotopie.*
(Autrement dit, Y a le type d'homotopie d'un bouquet de n-sphères, où $n = \dim(Y)$.)

Démonstration. — Soit x un point intérieur à s, et soit Y' le complexe obtenu en retirant de Y les intérieurs des simplexes appartenant à $U(s)$. Si $y \in Y'$, il est clair que y n'est pas opposé à x ; de plus, on peut montrer que la géodésique xy est contenue dans Y'. Il en résulte que Y' est contractile. On peut donc contracter Y' en un point sans changer le type d'homotopie de Y. On obtient ainsi le bouquet de sphères B, et la prop. 2.3 s'en déduit. (Noter que cet argument est le même que celui employé par Solomon-Tits [So69] dans le cas particulier où $Y = X$.) □

On peut aussi se placer à un point de vue homologique. Il est commode d'utiliser les groupes d'homologie réduits $\widetilde{H}_i(Y, \mathbf{Z})$; rappelons que ces groupes sont égaux aux groupes d'homologie usuels si $i > 0$ et que $\widetilde{H}_0(Y, \mathbf{Z})$ et $\widetilde{H}_{-1}(Y, \mathbf{Z})$ sont respectivement le noyau et le conoyau de l'homomorphisme $H_0(Y, \mathbf{Z}) \to \mathbf{Z}$. En particulier $\widetilde{H}_{-1}(Y, \mathbf{Z})$ est 0 si $Y \neq \varnothing$ et est $\mathbf{Z}$ si $Y = \varnothing$. Si Y est contractile, tous les $\widetilde{H}_i(Y, \mathbf{Z})$ sont nuls.

PROPOSITION 2.4. — *Si Y est un sous-complexe convexe de dimension n, on a $\widetilde{H}_i(Y, \mathbf{Z}) = 0$ pour $i \neq n$, et $\widetilde{H}_n(Y, \mathbf{Z})$ est un groupe abélien libre de rang égal à* $\mathrm{Card}(U(s))$; *il est $\neq 0$ si et seulement si Y est* cr.

Cela résulte de la prop. 2.3.

2.2.3. Réduction. — L'énoncé suivant permet souvent de passer de X à l'un des immeubles résiduels X_s du n° 2.1.8.

PROPOSITION 2.5. — *Soit Y un sous-complexe convexe de X, et soit S une sphère de Levi contenue dans Y. Soit X_S l'immeuble associé à S, et soit Y_S le sous-complexe de X_S défini par Y. Pour que Y soit X*-cr*, il faut et il suffit que Y_S soit X_S*-cr.
(Précisons comment est défini Y_S : on choisit un simplexe s de S de dimension maximum, et l'on prend l'image de Y_s par l'isomorphisme naturel $X_s \to X_S$.)

La démonstration utilise le lemme suivant ([Ti74, p. 54]) :

LEMME 2.6. — *Soit $\{s, s'\}$ un couple de simplexes opposés, et soient t_1, t_2 deux simplexes de X_s* (identifiés à des simplexes de X contenant s)*. Soit t'_1 le simplexe de $X_{s'}$ correspondant à t_1 par l'isomorphisme* $\mathrm{proj} : X_s \to X_{s'}$*. Alors :*

t_1 et t_2 sont opposés dans $X_s \iff t'_1$ et t_2 sont opposés dans X.

2.2.4. Démonstration de la prop. 2.5. — Soit s un simplexe de S de dimension maximum, et soit t_1 un simplexe de Y contenant s et de dimension égale à $\dim(Y)$. Supposons d'abord que Y_s soit X_s-cr. Soit s' l'unique simplexe de S opposé à s. Puisque Y_s est cr, il existe un simplexe t_2 de Y contenant s, qui est opposé à t_1 dans Y_s. Le simplexe t_1' du lemme 2.6 est opposé à t_2, et est contenu dans Y du fait que Y est convexe (utiliser la définition de l'isomorphisme $\mathrm{proj} : X_s \to X_{s'}$ donnée dans [Ti74, § 3.19]). On en déduit que Y contient la sphère de Levi définie par $\{t_2, t_1'\}$, d'où le fait que Y est cr d'après le th. 2.1. Inversement, si Y est cr, il contient un simplexe opposé à t_1, d'où une sphère de Levi S' de même dimension que Y ; le sous-complexe S_s' de X_s est une sphère de Levi contenue dans Y_s et de même dimension ; il en résulte que Y_s est cr.

2.2.5. Démonstration du théorème 2.2. — Il s'agit de prouver que (e) $\Leftrightarrow$ (a). L'implication (a) $\Rightarrow$ (e) est évidente. On prouve (e) $\Rightarrow$ (a) par récurrence sur $\dim(X)$. Si $Y = \varnothing$, l'énoncé est clair. Sinon, choisissons un sommet y de Y, que nous identifions à un simplexe de dimension 0. Puisque Y satisfait à (e), il contient un sommet y' opposé à y. Le couple $\{y, y'\}$ est une sphère de Levi de dimension 0. Vu la prop. 2.5, pour prouver que Y est X-cr il suffit de montrer que le sous-complexe Y_y de l'immeuble résiduel X_y est X_y-cr. Comme $\dim(X_y) = \dim(X) - 1$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence au couple (X_y, Y_y) ; il suffit donc de prouver que Y_y a la propriété (e). Cela revient à montrer que, pour toute arête yz de Y d'extrémité y, il existe une autre arête yz_1 qui est opposée à la précédente dans X_y. Choisissons un sommet z' de Y opposé à z, ce qui est possible d'après (e). Il existe une sphère de Levi D de dimension 1 (« cercle de Levi ») contenant z' et yz. De plus, z' et yz sont contenus dans le demi-cercle formé de la réunion de yz et de la géodésique yz'. Soit z_1 le sommet de la géodésique yz' qui est le plus proche de y, tout en étant distinct de y. L'image D_y de D dans X_y est égale à $\{yz, yz_1\}$, et c'est une sphère de Levi de dimension 0 de X_y ; il en résulte que yz et yz_1 sont opposés dans X_y, comme on le désirait.

2.3. Groupes agissant sur X

2.3.1. Soit Γ un groupe agissant sur X, i.e. muni d'un homomorphisme $\Gamma \to \mathrm{Aut}(X)$. Soit X^Γ le sous-espace de X fixé par Γ. Il est clair que X^Γ est convexe : si Γ fixe deux points x et y qui ne sont pas opposés, il fixe la géodésique xy. Par analogie avec le n° 1.3, nous dirons que l'action de Γ sur X est :

– *irréductible*, si $X^\Gamma = \varnothing$;
– *complètement réductible*, si X^Γ est cr ;
– *indécomposable*, si X^Γ est strictement convexe (*cf.* n° 2.1.5).

Comme précédemment, nous utiliserons les abréviations ir, cr et ind.

Remarque. — L'espace X^Γ est un sous-complexe de la subdivision barycentrique de X. Si l'action de Γ préserve les types (ce qui sera le cas dans les §§ 3,4,5), c'est même un sous-complexe de X. D'après le th. 2.1 (complété par la Remarque 2.2.1), X^Γ *est contractile si et seulement si l'action de* Γ *sur* X *n'est pas* cr.

2.3.2. Voici une propriété de réduction, au sens du n° 2.2.3 :

PROPOSITION 2.7. — *Supposons que* Γ *préserve les types, et qu'il fixe une sphère de Levi* S*, auquel cas il opère sur l'immeuble* X_S *correspondant. On a l'équivalence suivante* :

L'action de Γ *sur* X *est* cr $\Leftrightarrow$ *L'action de* Γ *sur* X_S *est* cr.

Cela résulte de la prop. 2.5, appliquée au sous-complexe $Y = X^\Gamma$ de X.

2.4. La conjecture du point fixe

CONJECTURE 2.8. — *Soit* Y *un sous-complexe de* X (ou de sa subdivision barycentrique)*, convexe et contractile. Il existe alors un point de* Y *qui est fixé par tout automorphisme de* X *qui stabilise* Y*.*
(Un tel point mérite d'être appelé un *centre* de Y.)

Cette conjecture a été faite par Tits dans les années 50, sous l'hypothèse supplémentaire que Y est strictement convexe ; son but était, semble-t-il, de prouver un résultat sur les groupes unipotents que Borel et lui ont démontré ensuite par une méthode différente, *cf.* [BT71]. Sous cette forme plus restrictive, la conjecture est signalée par Mumford [Mu65, p. 64] à cause de ses relations avec la « Geometric Invariant Theory » (G.I.T.). En fait, le cas particulier utile pour G.I.T. a été démontré en 1978 par Kempf [Ke78] et Rousseau [Rou78]. Il y a d'ailleurs beaucoup d'autres cas où 2.8 a été démontrée, *cf.* [Rou78], [Ti97] et [Mue97].

PROPOSITION 2.9. — *Admettons la conjecture* 2.8. *Soit* Y *un sous-complexe convexe contractile de* X *et soit* Γ *un groupe d'automorphismes de* X *préservant les types, et stabilisant* Y*. Alors* Y^Γ *est contractile.*

Il est clair que Y^Γ est un sous-complexe convexe de X. D'après 2.8, il est non vide. Il s'agit de montrer qu'il n'est pas cr. S'il l'était, il contiendrait une sphère de Levi S de même dimension, *cf.* th. 2.1. L'image Y_S de Y dans X_S est stable par Γ, et est contractile (prop. 2.5). En lui appliquant la conjecture 2.8, on en déduirait que $(Y^\Gamma)_S = (Y_S)^\Gamma$ est non vide, ce qui est impossible puisque S et Y^Γ ont la même dimension.

PROPOSITION 2.10. — *La prop.* 2.9 *est vraie* (*sans supposer que la conjecture* 2.8 *le soit*) *dans chacun des deux cas suivants* :

(a) $\dim(Y) \leqslant 1$.
(b) *L'image de* Γ *dans* $\mathrm{Aut}(Y)$ *est un groupe résoluble fini.*

Le cas (a) est clair si $\dim(Y) = 0$, car Y est réduit à un point ; il est facile si $\dim(Y) = 1$ car Y est un arbre de diamètre borné, et un tel arbre a un centre, à savoir le milieu des chemins sans aller-retour de longueur égale au diamètre.

Pour (b), on se ramène par dévissage au cas où Γ agit sur Y par un groupe cyclique d'ordre premier p. Comme les $\widetilde{H}_i(Y, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ sont tous nuls, il en est de même des $\widetilde{H}_i(Y^\Gamma, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ d'après la théorie de Smith ; en effet, cette théorie dit que, si $\Gamma \simeq \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ opère sur un complexe Y de dimension finie, et si les $\widetilde{H}_i(Y, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ sont nuls pour $i > N$ (où N est un entier fixé), il en est de même des $\widetilde{H}_i(Y^\Gamma, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ pour $i > N$. Or, si Y n'était pas contractile, il serait cr, et le groupe $\widetilde{H}_i(Y^\Gamma, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ correspondant à $i = \dim(Y^\Gamma)$ serait non nul d'après la prop. 2.4.

Action de sous-groupes normaux

Proposition 2.11. — *Admettons la conjecture* 2.8. *Soit* Γ *un groupe d'automorphismes de* X *respectant les types, et soit* Γ' *un sous-groupe normal de* Γ. *Si l'action de* Γ *est* cr*, il en est de même de celle de* Γ'.

(Comparer avec le résultat bien connu suivant : si une représentation linéaire d'un groupe Γ est complètement réductible, il en est de même de ses restrictions aux sous-groupes normaux de Γ, *cf.* e.g. [Se94, lemme 5].)

Posons $Y' = X^{\Gamma'}$ et $Y = X^\Gamma = Y'^{\Gamma/\Gamma'}$. Il s'agit de montrer que Y' n'est pas contractile. S'il l'était, la prop. 2.9, appliquée à (X, Y', Γ), montrerait que $Y = X^\Gamma$ est contractile, contrairement à l'hypothèse faite.

Un argument analogue, utilisant la prop. 2.10, démontre :

Proposition 2.12. — *Si* Γ/Γ' *est un groupe résoluble fini, la prop.* 2.11 *est vraie sans supposer que la conjecture* 2.8 *le soit.*

Nous verrons au § 3.3, th. 3.6, un autre cas du même genre.

3. COMPLÈTE RÉDUCTIBILITÉ DES SOUS-GROUPES D'UN GROUPE RÉDUCTIF

Dans ce qui suit, G désigne un groupe algébrique réductif sur un corps k (*cf.* [BT65]). Rappelons qu'un tel groupe est lisse et connexe.

Par un « sous-groupe algébrique » de G, on entend un k-sous-groupe algébrique (« défini sur k »).

3.1. L'immeuble de G

3.1.1. Sous-groupes paraboliques. — Un sous-groupe parabolique de G est un sous-groupe algébrique P tel que G/P soit une variété projective (définition équivalente : après extension des scalaires, P contient un sous-groupe de Borel). Un tel groupe est lisse, connexe, et coïncide avec son normalisateur dans G. Les propriétés de ces groupes dont nous aurons besoin se trouvent dans [BT65] ; voir aussi [DG70, XXVI].

3.1.2. L'immeuble de G. — Sa définition est donnée dans [Ti74, § 5]. On le notera $X(G)$ ou simplement X. Ses simplexes correspondent aux sous-groupes paraboliques de G ; si s est un simplexe, on note P_s le sous-groupe parabolique correspondant. Les sommets de X correspondent aux paraboliques propres maximaux ; le simplexe vide correspond à G. Le rang r de X est égal au k-rang semi-simple de G, c'est-à-dire au k-rang (ou *rang relatif*) de $G^{\mathrm{ad}} = G/C_G$, où C_G est le centre de G. On a $r = 0$ (et $X = \varnothing$) si G^{ad} est anisotrope.

3.1.3. Appartements. — Ils correspondent aux tores déployés maximaux (de G, ou de G^{ad}, c'est la même chose).

3.1.4. Types de sommets. — L'ensemble I des types de sommets peut être identifié à l'ensemble des sommets du k-diagramme de Dynkin de G.

3.1.5. Opposition. — Deux simplexes s et s' de X sont opposés si et seulement si les paraboliques P_s et $P_{s'}$ sont opposés au sens de [BT65, § 4], i.e. si $P_s \cap P_{s'}$ est réductif, auquel cas c'est un sous-groupe de Levi de chacun d'eux.

3.1.6. Action de G(k). — Le groupe $G(k)$ des k-points de G opère sur X (par conjugaison des paraboliques). Cette action respecte les types. Si s est un simplexe de X, le sous-groupe de $G(k)$ fixant (ou stabilisant) s est $P_s(k)$.

3.1.7. Sphères de Levi. — Soit L un sous-groupe de Levi d'un parabolique. Les sous-groupes paraboliques contenant L correspondent aux simplexes d'une *sphère de Levi* S_L, et l'on obtient ainsi une bijection entre les L et les sphères de Levi (ce qui explique la terminologie utilisée au § 2). Les paraboliques ayant L pour sous-groupe de Levi correspondent aux simplexes de dimension maximale de la sphère S_L. Si s est l'un de ces simplexes, l'immeuble résiduel X_s (*cf.* 2.1.8) peut être identifié à l'immeuble de L.

3.1.8. Critère de convexité. — Soit Y un sous-complexe de X, et soit H l'ensemble des paraboliques correspondant aux simplexes de Y.

PROPOSITION 3.1. — *Pour que Y soit convexe, il faut et il suffit que H satisfasse à la propriété suivante* :

(C) *Si trois paraboliques P, P', Q sont tels que $P \in H$, $P' \in H$, et $Q \supset P \cap P'$, alors $Q \in H$.*

(Attention : l'inclusion $Q \supset P \cap P'$ est une inclusion de groupes algébriques. Il ne suffit pas que $Q(k)$ contienne $P(k) \cap P'(k)$.)

L'énoncé revient à déterminer l'enveloppe convexe de la réunion de deux simplexes (ceux correspondant à P et P'), ce qui se fait au moyen d'un appartement les contenant tous deux.

3.1.9. Relations avec les sous-groupes multiplicatifs à 1 *paramètre* (*G.I.T.*). — Soit $\lambda : \mathbf{G}_m \to G$ un homomorphisme. On peut lui associer de façon naturelle deux points opposés $h_+(\lambda)$ et $h_-(\lambda)$ de l'immeuble vectoriel X^{vect}, *cf.* 2.1.7. Si λ est à valeurs dans le centre de G, on a $h_+(\lambda) = h_-(\lambda) = 0$. Sinon, les demi-droites engendrées par $h_+(\lambda)$ et $h_-(\lambda)$ définissent deux points $x_+(\lambda)$ et $x_-(\lambda)$ de l'immeuble X ; ces points sont opposés. Soient $s_+(\lambda)$ et $s_-(\lambda)$ les plus petits simplexes de X contenant respectivement $x_+(\lambda)$ et $x_-(\lambda)$, et soient $P_+(\lambda)$ et $P_-(\lambda)$ les sous-groupes paraboliques correspondants. Le groupe $P_+(\lambda)$ est formé des points g de G qui sont *contractés* par λ, i.e. tels que $\lambda(t).g.\lambda(t^{-1})$ ait une limite pour $t \to 0$ (*cf.* [Mu65, p. 55] ou [Ri88, § 2]). De même, $P_-(\lambda)$ est l'ensemble des g tels que $\lambda(t) \cdot g \cdot \lambda(t^{-1})$ ait une limite pour $t \to \infty$, et le groupe de Levi $P_+(\lambda) \cap P_-(\lambda)$ est le *centralisateur* de l'image de λ.

Remarque. — Les $h_+(\lambda)$ jouent le rôle de *points entiers* pour l'immeuble vectoriel, et les $x_+(\lambda)$ sont les *points rationnels* de l'immeuble sphérique. L'interprétation des sous-groupes paraboliques en termes de contractions est à la base de la « Geometric Invariant Theory » ; elle joue un rôle essentiel dans les résultats de Richardson et de Bate-Martin-Röhrle cités plus loin.

3.2. Les propriétés G-ir, G-cr et G-ind

3.2.1. À partir de maintenant, Γ désigne un sous-groupe de $G(k)$. Son action sur X permet de lui appliquer les définitions du n° 2.3.1 : irréductibilité, complète réductibilité et indécomposabilité. Pour mettre G en évidence, nous écrirons G-ir, G-cr et G-ind. Autrement dit :

Γ *est* G-ir $\Leftrightarrow$ Γ *n'est contenu dans aucun sous-groupe parabolique propre de* G.

Γ *est* G-cr $\Leftrightarrow$ *Pour tout parabolique* P *de* G *contenant* Γ, *il existe un sous-groupe de Levi de* P *contenant* Γ (ou, ce qui revient au même, il existe un parabolique P' opposé à P tel que $\Gamma \subset P(k) \cap P'(k)$).

Γ *est* G-ind $\Leftrightarrow$ Γ *n'est contenu dans aucun sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique propre de* G.

3.2.2. Exemples. — Lorsque G est un groupe classique (ou un groupe de type G_2) la notion de « G-cr » peut se traduire très concrètement :

(a) Lorsque $G = \mathbf{GL}(V)$, elle signifie que le Γ-module V est semi-simple, *cf.* n° 1.3.

(b) Supposons k de caractéristique $\neq 2$, et prenons pour G un groupe $\mathbf{SO}(V)$ (ou $\mathbf{Sp}(V)$), relatif à une forme bilinéaire symétrique (ou alternée) B sur V, non dégénérée. La définition de « G-cr » donnée ci-dessus dit que Γ est G-cr si et seulement si, pour tout sous-Γ-module totalement isotrope W de V, il existe un autre sous-Γ-module totalement isotrope W', de même dimension, tel que la restriction de B à $W + W'$ soit non dégénérée. Un argument élémentaire permet de montrer que *cela se produit si et seulement si le* Γ*-module* V *est semi-simple* (c'est aussi une conséquence de la théorie de Richardson, du moins quand k est algébriquement clos, *cf.* [Ri88, cor. 16.10]).

(c) Supposons G de type G_2, et k de caractéristique $\neq 2$. Soit V l'unique représentation irréductible de G de dimension 7. Ici encore, on peut montrer que Γ *est* G-cr *si et seulement si le* Γ*-module* V *est semi-simple*. Cela se voit en utilisant la description des paraboliques donnée dans [AS86].

On verra au § 5 des résultats analogues pour d'autres représentations – mais on devra alors éviter d'autres caractéristiques que la caractéristique 2.

3.2.3. La proposition suivante est une conséquence immédiate de la prop. 2.5 :

Proposition 3.2. — *Supposons que* Γ *soit contenu dans un sous-groupe de Levi* L *d'un sous-groupe parabolique de* G*. On a alors*

$$\Gamma \textit{ est } G\text{-cr} \iff \Gamma \textit{ est } L\text{-cr}.$$

(Lorsque $G = \mathbf{GL}_n$, cela redonne (1.1.5).)

3.2.4. On peut définir un « G-analogue » de la *semi-simplification* d'une représentation :

Choisissons un parabolique P contenant Γ et minimal pour cette propriété (cela revient à choisir un simplexe de dimension maximum de X^Γ). Soit L un sous-groupe de Levi de P et soit $\pi : P \to L$ la projection de P sur L de noyau le radical unipotent $R_u(P)$ de P.

Proposition 3.3. — (a) *Le groupe* $\pi(\Gamma) \subset L(k)$ *est* L-ir *et* G-cr*.*

(b) *Différents choix de* (P, L) *donnent des homomorphismes* $\Gamma \to L(k) \to G(k)$ *qui sont conjugués par* $G(k)$*.*

(Lorsque $G = \mathbf{GL}(V)$, l'homomorphisme $\Gamma \to L(k) \to G(k)$ est le semi-simplifié de $\Gamma \to G(k)$, et l'assertion d'unicité de (b) est le *théorème de Jordan-Hölder*.)

Dans (a), le fait que $\pi(\Gamma)$ soit L-ir provient de ce que P est minimal ; on en déduit que Γ est G-cr en appliquant la prop. 3.2. On prouve (b) en remarquant que, pour P fixé, le choix de L n'a pas d'importance puisque deux L différents sont conjugués par $R_u(P)(k)$; et, pour un autre choix P' de P, on utilise le fait que P et P' ont un sous-groupe de Levi commun (c'est une propriété générale des simplexes maximaux d'un sous-complexe convexe).

3.2.5. Voici un autre résultat, inspiré par des arguments de [Ri88] et de [BMR04] :

PROPOSITION 3.4. — *Soit C_Γ le centralisateur de Γ dans G. Soit T un tore déployé maximal de C_Γ, et soit L le centralisateur de T dans G. On a $\Gamma \subset L(k)$. De plus :*

(a) *L est un sous-groupe de Levi d'un parabolique de G ; il est minimal parmi tous les Levi de paraboliques contenant Γ.*

(b) *Γ est L*-ind.

(c) *Pour que Γ soit G*-cr*, il faut et il suffit qu'il soit L*-ir.

(d) *Si k est parfait, les différents choix de L sont conjugués par $C_\Gamma(k)$.*

(Lorsque $G = \mathbf{GL}(V)$, le choix de L correspond à une décomposition du Γ-module V en somme directe de modules indécomposables, et (d) est le *théorème de Krull-Remak-Schmidt.*)

L'assertion (a) se déduit du fait que les sous-groupes de Levi de paraboliques sont les centralisateurs des tores déployés de G, *cf.* [BT65, 4.16]. L'assertion (b) provient de la minimalité de L, et (c) se déduit de (b) et de la prop. 3.2. Quant à (d), il résulte de la conjugaison des tores déployés maximaux de C_Γ, qui est valable quand k est parfait, d'après [BT65, 11.6].

3.3. La propriété de « forte réductivité » de Richardson

On suppose maintenant que k est *algébriquement clos*, ce qui assure que tous les tores sont déployés. La prop. 3.4 (c) s'énonce alors de la façon suivante :

THÉORÈME 3.5 ([BMR04]). — *Soit T un tore maximal du centralisateur de Γ, et soit L le centralisateur de T. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *Γ est G*-cr.

(ii) *Γ n'est contenu dans aucun sous-groupe parabolique propre de L.*

La propriété (ii) a été introduite en 1988 par Richardson [Ri88, § 16] sous le nom de « strong reductivity ». Ce n'est que tout récemment que Bate, Martin et Röhrle ont démontré qu'elle équivaut à la propriété (i). Ils en ont tiré de nombreuses conséquences, que l'on trouvera dans [BMR04]. En voici quelques unes :

THÉORÈME 3.6 ([Ma03b] et [BMR04]). — *Soit Γ' un sous-groupe normal de Γ. Si Γ est G*-cr*, il en est de même de Γ'.*
(Comparer avec la prop. 2.11 du § 2.)

THÉORÈME 3.7 ([Ri88] et [BMR04]). — *Supposons que Γ soit engendré topologiquement par des éléments $x_1, \ldots, x_m$. Soit $f : G \to G \times \cdots \times G$ (m copies) l'application*

$$g \longmapsto (gx_1g^{-1}, \ldots, gx_mg^{-1}).$$

Pour que Γ soit G-cr*, il faut et il suffit que $f(G)$ soit une partie fermée de $G \times \cdots \times G$.*

Dans le cas particulier $m = 1$, on retrouve le fait qu'une classe de conjugaison est fermée si et seulement si ses éléments sont semi-simples.

Théorème 3.8 ([BMR04]). — *Soit G' un groupe réductif contenant G, et tel que* :

(a) *Le centralisateur (schématique) de Γ dans G' est lisse.*

(b) *Il existe un sous-espace vectoriel $\mathbf{m}$ de $\mathrm{Lie}\, G'$, stable par conjugaison par G et tel que* $\mathrm{Lie}\, G' = \mathbf{m} \oplus \mathrm{Lie}\, G$.

*Alors, si Γ est G'-*cr*, il est G-*cr.

(Dans [BMR04], la condition (a) est appelée « séparabilité » ; quant à (b), elle exprime que (G', G) est un « couple réductif » au sens de Richardson.)

Corollaire 3.9. — *Soit V un G-module fidèle. Supposons que la forme bilinéaire $(x, y) \mapsto \mathrm{Tr}(x_V \cdot y_V)$ sur $\mathrm{Lie}\, G$ soit non dégénérée. Alors, si V est Γ-semi-simple, le groupe Γ est G-*cr.

Cela résulte du th. 3.8, appliqué à $G' = \mathbf{GL}(V)$. La condition (a) est satisfaite. La condition (b) l'est aussi : on prend pour $\mathbf{m}$ l'orthogonal de $\mathrm{Lie}\, G$ dans $\mathrm{Lie}\, \mathbf{GL}(V)$ pour la forme trace.

4. CRITÈRES DE COMPLÈTE RÉDUCTIBILITÉ

Dans ce qui suit, G est un groupe réductif sur un corps algébriquement clos k, et Γ est un sous-groupe de $G(k)$. À partir du n° 4.2, on suppose que la caractéristique p de k est > 0.

On se propose de donner des critères, aussi explicites que possible, permettant de reconnaître si Γ possède la propriété G-cr. Si $\overline{\Gamma}$ est l'adhérence de Γ pour la topologie de Zariski, il est clair que Γ est G-cr $\Leftrightarrow$ $\overline{\Gamma}$ est G-cr. Cela nous permettra souvent de supposer que Γ est fermé, i.e. que c'est un sous-groupe algébrique (lisse) de G.

[Il serait intéressant de considérer aussi le cas d'un sous-groupe algébrique *non nécessairement lisse*. Il n'y a pas de difficulté à étendre à de tels groupes la définition de « G-cr », non plus que celle du sous-complexe convexe « X^Γ ». Ce qui est moins clair, c'est ce qui doit remplacer la *saturation* du § 5. Une fois cet obstacle surmonté, on peut espérer que les résultats des nos 5.2 et 5.3 s'étendent sans changement.]

4.1. Une première condition

Notons $R_u(\Gamma)$ le radical unipotent de Γ, i.e. son plus grand sous-groupe unipotent normal (connexe ou non). (Lorsque k est de caractéristique $p > 0$, et que Γ est fini, on a $R_u(\Gamma) = O_p(\Gamma)$, avec les notations usuelles de la théorie des groupes finis.)

Proposition 4.1. — *Si Γ est G-*cr*, on a $R_u(\Gamma) = 1$.*

Quitte à remplacer G par un Levi de l'un de ses sous-groupes paraboliques, on peut supposer que Γ est G-ir (*cf.* prop. 3.3). Soit alors U l'adhérence de $R_u(\Gamma)$. D'après [BT71, prop. 3.1], il existe un sous-groupe parabolique P de G, avec $U \subset R_u(P)$, qui est stable par tout automorphisme du couple (G, U). Comme Γ normalise U, il normalise P, donc est contenu dans P. Puisque Γ est G-ir, cela entraîne $P = G$, d'où $U = 1$ puisque $R_u(G) = 1$.

PROPOSITION 4.2. — *Supposons k de caractéristique* 0*, et supposons que Γ soit fermé. Les propriétés suivantes sont équivalentes* :

(i) Γ *est G*-cr.
(ii) $R_u(\Gamma) = 1$.
(iii) *La composante neutre Γ^0 de Γ est un groupe réductif.*

L'équivalence de (ii) et (iii) provient de ce que tout sous-groupe unipotent de Γ est contenu dans Γ^0. L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est la prop. 4.1. L'implication (iii) $\Rightarrow$ (i) provient du fait bien connu suivant (spécial à la caractéristique 0) : toute extension de Γ par un groupe unipotent est scindée, et deux scindages quelconques sont conjugués (on se ramène, par dévissage à une annulation de groupes de cohomologie, *cf.* [Mo56] et [DG70, p. 393]).

COROLLAIRE 4.3. — *Supposons k de caractéristique* 0*. Soit $f : G \to G'$ un homomorphisme de G dans un groupe réductif G'. Si Γ est G*-cr*, alors $f(\Gamma)$ est G'*-cr ; *la réciproque est vraie si f est presque fidèle.*
(Un homomorphisme f est dit *presque fidèle* si $\mathrm{Ker}(f)$ est un groupe de type multiplicatif.)

C'est clair, grâce à (iii).

Remarques. — 1) Le cor. 4.3 redonne le théorème de Chevalley cité au n° 1.1 : il suffit de l'appliquer à l'homomorphisme naturel $f : \mathbf{GL}(V) \times \mathbf{GL}(V') \to \mathbf{GL}(V \otimes V')$.

2) La prop. 4.2 montre que la propriété « G-cr » n'a pas grand intérêt en caractéristique 0. C'est pour cela que, à partir de maintenant, *on supposera que le corps k est de caractéristique $p > 0$.* On donnera alors des conditions sur p (du genre « p est assez grand ») permettant d'avoir des résultats analogues à ceux de la caractéristique 0, *cf.* th. 4.4, th. 4.5 et th. 5.3.

4.2. Le cas où Γ est connexe

Définissons un entier $a(G)$ par la recette suivante :

(1) Si G est simple : $a(G) = 1 + \mathrm{rang}(G)$.
(2) Si $\{G_1, \ldots, G_r\}$ sont les quotients simples de G, on pose :

$$a(G) = \sup(1, a(G_1), \ldots, a(G_r)).$$

THÉORÈME 4.4 (Jantzen, McNinch, Liebeck-Seitz). — *Supposons que $p \geqslant a(G)$, que Γ soit un sous-groupe fermé de G, et que $(\Gamma : \Gamma^0)$ soit premier à p. Il y a alors équivalence entre* :

(i) Γ *est* G-cr.

(ii) Γ^0 *est réductif.*

L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) a été démontrée plus haut. Supposons que la condition (ii) soit satisfaite. En utilisant le fait que $(\Gamma : \Gamma^0)$ est premier à p, on démontre facilement que Γ^0 est G-cr $\Rightarrow \Gamma$ est G-cr. On peut donc supposer que Γ est connexe, autrement dit que c'est un sous-groupe réductif de G ; on peut aussi supposer que G est quasi-simple. Le cas où G est de type exceptionnel est traité dans [LS96] (sauf pour $p = 3$ et G de type G_2, mais ce cas n'offre pas de difficultés). Lorsque G est de type A_n, le théorème signifie que toute représentation linéaire de degré $\leqslant p$ d'un groupe réductif est semi-simple, ce qui a été démontré par Jantzen [Ja97]. De même, si G est de type B_n, C_n ou D_n, on est ramené à montrer que toute représentation self-duale d'un groupe réductif est semi-simple si sa dimension est $< 2p$; cela a été démontré récemment par McNinch (non publié : le cas crucial est celui où le groupe réductif est de type A_1 – les autres cas se déduisent de [Mc98]).

Remarque. — La borne $p \geqslant a(G)$ du th. 4.4 est essentiellement optimale lorsque le groupe Γ^0 est de rang 1. Elle peut par contre être améliorée lorsque les facteurs simples de Γ^0 sont de rang > 1, *cf.* [LS96] et [Mc98].

4.3. Le cas non connexe

On se borne au cas où $G^{\mathrm{ad}} = G/C_G$ est un groupe simple. On remplace l'entier $a(G)$ du n° 4.2 par un entier $b(G)$ un peu plus grand :

$b(G) = 2, 3, 5$ si G^{ad} est de type A_1, A_2, B_2 ;

$b(G) = n + 3$ si G^{ad} est de type A_n $(n \geqslant 3)$;

$b(G) = 2n + 3$ si G^{ad} est de type B_n, C_n $(n \geqslant 3)$ ou D_n $(n \geqslant 4)$;

$b(G) = 11, 29, 29, 59, 251$ si G^{ad} est de type G_2, F_4, E_6, E_7, E_8.

THÉORÈME 4.5. — *Supposons que Γ soit un sous-groupe fermé de $G(k)$, avec G^{ad} simple, et $p \geqslant b(G)$. Il y a équivalence entre* :

(i) Γ *est* G-cr.

(ii) $R_u(\Gamma) = 1$.

(Autrement dit, on a le même énoncé que 4.2, pourvu que $p \geqslant b(G)$.)

Ici encore, il suffit de montrer que (ii) $\Rightarrow$ (i). Le cas essentiel est celui où $G = \mathbf{GL}_n$; il est dû à Guralnick, *cf.* [Gu99, th. C]. (La démonstration est loin d'être élémentaire : elle utilise non seulement la classification des groupes finis simples, mais aussi la liste des caractères modulaires irréductibles des groupes sporadiques donnée dans [JLPW95].) Les autres cas s'en déduisent en appliquant le th. 5.4 ci-dessous à des représentations linéaires de G de basse dimension.

Remarques. — 1) Voici quelques exemples de couples (Γ, G) montrant que, *pour les groupes classiques*, la condition $p \geqslant b(G)$ du th. 4.5 ne peut guère être améliorée :

Type A : $\Gamma = \mathcal{S}_p$; $G = \mathbf{SL}_{p-1}$

Types B, C, D : $\Gamma = \mathbf{SL}_2(\mathbf{F}_p)$ ou $\mathbf{PSL}_2(\mathbf{F}_p)$; $G = \mathbf{SO}_{p+2}, \mathbf{Sp}_{p-1}, \mathbf{SO}_{p+1}$.

Supposons $p > 3$. Dans chaque cas, on a $R_u(\Gamma) = 1$, et l'on peut construire un plongement de Γ dans $G(k)$ qui donne une représentation linéaire non semi-simple, ce qui signifie que Γ n'est pas G-cr, d'après 3.2.2. On a $p = b(G)-2, b(G)-4, b(G)-4, b(G)-2$ respectivement.

2) La situation est différente *pour les groupes exceptionnels* ; la borne $p \geqslant b(G)$ peut être grandement améliorée, par exemple en utilisant les méthodes de [LS96]. Ainsi, pour le type G_2, on peut remplacer « $p \geqslant 11$ » par « $p \geqslant 5$ », qui est optimal. J'ignore quelles sont les bornes optimales pour les types F_4, E_6, E_7 et E_8.

5. SATURATION ET REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES

5.1. Exponentielle et saturation

On note $h(G)$ la borne supérieure des nombres de Coxeter des quotients simples de G. (S'il n'y en a aucun, i.e. si G est un tore, on convient que $h(G) = 1$.) Rappelons que, si G est simple, on a $h(G) = \dim(G)/\operatorname{rang}(G) - 1$; les valeurs de h pour les différents types sont :

$A_n : h = n+1$; $B_n, C_n : h = 2n$; $D_n : h = 2n-2$; $G_2 : h = 6$; $F_4, E_6 : h = 12$; $E_7 : h = 18$; $E_8 : h = 30$.

Supposons maintenant que $p \geqslant h(G)$. Soit u un élément unipotent de G. D'après [Te95], on a $u^p = 1$. De plus, si t est un élément de k, on peut définir *de façon canonique* (c'est là un point essentiel) la « t-ième puissance » u^t de u, *cf.* [Se98] (voir aussi [Sei00] qui traite un cas plus général). L'application $t \mapsto u^t$ est un homomorphisme du groupe additif $\mathbf{G}_a$ dans le groupe G. Lorsque $G = \mathbf{GL}_n$, l'hypothèse $p \geqslant h(G)$ signifie que $p \geqslant n$, de sorte que $u = 1 + v$ avec $v^p = 0$, et u^t est donné par le développement binomial : $(1+v)^t = 1 + t \cdot v + \cdots$.

[L'hypothèse « k algébriquement clos » faite au début du § 4 n'intervient pas dans la définition de l'exponentielle u^t. En fait, le cas crucial est celui d'un schéma en groupes semi-simples, déployé et simplement connexe, sur le localisé $\mathbf{Z}_{(p)}$ de $\mathbf{Z}$ en p. Les autres cas s'en déduisent par descente, en utilisant les méthodes de [DG70], *cf.* [Sei00, § 5].]

DÉFINITION 5.1. — *Un sous-groupe* Γ *de* $G(k)$ *est dit saturé s'il est fermé et si l'on a* $u^t \in \Gamma$ *pour tout élément unipotent* u *de* Γ*, et tout* $t \in k$.
[Par exemple, tout sous-groupe parabolique est saturé ; tout centralisateur d'un sous-groupe est saturé.]

On démontre facilement :

PROPOSITION 5.2. — *Si* Γ *est saturé, l'indice de* Γ^0 *dans* Γ *est premier à* p.

Pour tout sous-groupe Γ de $G(k)$, il existe un plus petit sous-groupe saturé le contenant ; on l'appelle le *saturé* de Γ et on le note Γ^{sat}. (Lorsque $G = \mathbf{GL}_n$, on retrouve la notion utilisée dans [No87] et [Se94].)

THÉORÈME 5.3 ([Se98, th. 8]). — *Il y a équivalence entre* :

(1) Γ *est* G-cr.
(2) Γ^{sat} *est* G-cr.
(3) *La composante neutre de* Γ^{sat} *est un groupe réductif.*

(Rappelons que l'on suppose $p \geqslant h(G)$.)

L'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (ii) est claire : les sous-groupes paraboliques et leurs sous-groupes de Levi sont saturés. L'équivalence de (ii) et (iii) résulte du th. 4.4 et de la prop. 5.2 ; noter que le th. 4.4 est applicable car $a(G) \leqslant h(G)$.

5.2. Représentations linéaires : l'invariant $n(V)$

Choisissons un tore maximal T de G, ainsi qu'un sous-groupe de Borel B de G contenant T. Soit $X(T) = \mathrm{Hom}(T, \mathbf{G}_m)$ le groupe des caractères de G, et soit $Y(T) = \mathrm{Hom}(\mathbf{G}_m, T)$ son dual. Notons $R \subset X(T)$ le système de racines de (G, T). Si $a \in R$, notons a^* la racine duale ; c'est un élément de $Y(T)$.

Pour tout $\chi \in X(T)$, on pose

$$n(\chi) = \Sigma \ \langle \chi, a^* \rangle,$$

où a parcourt les éléments > 0 de R (pour la relation d'ordre associée à B).

Si V est un G-module, on définit un *invariant* $n(V)$ de V par la formule :

$$n(V) = \sup n(\chi),$$

où χ parcourt l'ensemble des poids de T dans V, *cf.* [Dy52, n° 12]. C'est un entier $\geqslant 0$. Voici quelques unes de ses propriétés (on en trouvera d'autres dans [Dy52], [Se98] et [IMP03]) :

(5.2.1) Si V a une suite de composition dont les facteurs successifs sont $V_1, \dots, V_r$, on a $n(V) = \sup n(V_i)$.

(5.2.2) Si V est irréductible de plus grand poids λ, on a $n(V) = n(\lambda)$.

(5.2.3) On a $n(V) = 0$ si et seulement si le groupe dérivé de G opère trivialement sur V, i.e. si l'image de $G \to \mathbf{GL}(V)$ est un tore.

(5.2.4) Si V est presque fidèle (au sens du cor. 4.3), on a $n(V) \geqslant h(G) - 1$.

(5.2.5) Si $V = V_1 \otimes V_2$, on a $n(V) = n(V_1) + n(V_2)$.

(5.2.6) On a $n(\mathrm{Lie}\, G) = 2h(G) - 2$.

Remarque. — L'invariant $n(V)$ « se calcule sur $\mathbf{SL}_2$ » au sens suivant :

Soit $f : \mathbf{SL}_2 \to G$ un homomorphisme tel que le composé $\mathbf{G}_m \to \mathbf{SL}_2 \to G$ soit à valeurs dans T, et soit égal dans $Y(T)$ à la somme $\sum a^*$, où a parcourt les racines > 0. Un tel f existe : cela se démontre par réduction à partir de la caractéristique 0.

Grâce à f, le G-module V peut être vu comme un $\mathbf{SL}_2$-module, et son invariant $n(V)$ comme G-module *est le même* que son invariant $n(V)$ comme $\mathbf{SL}_2$-module. [Autre interprétation de $n(V)$: à un facteur 2 près, c'est le degré en la variable « q » de la *dimension quantique* de V.]

L'intérêt de l'invariant $n(V)$ provient du théorème suivant, qui relie la semi-simplicité du Γ-module V à la propriété « G-cr » :

Théorème 5.4. — *Supposons $p > n(V)$. Soit Γ un sous-groupe de $G(k)$.*

(i) *Si Γ est G-*cr*, alors V est Γ-semi-simple* (i.e. semi-simple comme Γ-module)*.*

(ii) *Inversement, si V est Γ-semi-simple, et si V est presque fidèle, alors Γ est G-*cr*.*

(Si l'on regarde V comme un $\mathbf{SL}_2$-module – *cf. Remarque* ci-dessus – l'hypothèse $p > n(V)$ signifie que V est un $\mathbf{SL}_2$-module *restreint* (« restricted ») : ses poids sont $< p$.)

On peut supposer que V est presque fidèle. D'après (5.2.4), on a alors $p \geqslant h(G)$, ce qui permet d'utiliser le th. 5.3. Les détails de la démonstration se trouvent dans [Se98] (voir aussi [IMP03]).

Corollaire 5.5. — *Supposons $p > 2h(G) - 2$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes* :

(cr) *Γ est G-*cr*.*

(ad) *L'algèbre de Lie* $\mathrm{Lie}\, G$ *de G est un Γ-module semi-simple.*

Cela résulte du th. 5.4 et de la formule (5.2.6).

Remarque 5.6. — La condition $p > 2h(G)-2$ est presque optimale pour l'implication (cr) $\Rightarrow$ (ad). En effet, supposons que cette condition ne soit pas satisfaite, et que G soit simple ; on peut alors construire (à deux exceptions près, *cf.* ci-après) un sous-groupe Γ de G, isomorphe à $\mathbf{SL}_2$ ou à $\mathbf{PGL}_2$, qui satisfait à (cr) mais pas à (ad). (Les deux exceptions sont : $p = 3$, G de type B_2, et $p = 5$, G de type G_2.)

Par contre, l'implication (ad) $\Rightarrow$ (cr) est en général valable sous des conditions bien moins restrictives que $p > 2h(G) - 2$. Par exemple, si G est de type E_8, le cor. 3.9 montre que la condition $p > 2h(G) - 2 = 58$ peut être remplacée par $p > 5$.

5.3. Applications

Le th. 5.4 peut être utilisé pour prouver des énoncés où la notion de « G-cr » n'intervient pas explicitement. Par exemple :

Proposition 5.7. — *Soit $\Gamma \subset G(k)$, où G est de type E_8. Soient $V_1, \ldots, V_8$ les huit représentations irréductibles fondamentales de G. Supposons que l'un des Γ-modules V_i soit semi-simple. Alors tous les autres le sont pourvu que $p > 270$.*

(J'ignore si la minoration $p > 270$ est optimale.)

Soit (α_i) une base du système de racines et soit $\sum c_i\alpha_i^*$ la somme des duales des racines positives. Il résulte de (5.2.2) que l'on a $n(V_i) = c_i$ pour tout i. Dans le cas de E_8, cela donne :

$$n(V_i) = 92, 136, 182, 270, 220, 168, 114, 58 \quad \text{pour } i = 1, \dots, 8.$$

D'où le résultat, d'après le th. 5.4.

Voici deux autres applications. La première est l'analogue en caractéristique p du théorème de Chevalley cité au n° 1.1 :

Proposition 5.8 ([Se94]). — *Soient V_i des représentations linéaires semi-simples d'un groupe Γ. Si $p > \Sigma(\dim(V_i) - 1)$, la représentation $\otimes V_i$ est Γ-semi-simple.*

On applique le th. 5.4 avec $G = \prod \mathbf{GL}(V_i)$. L'hypothèse que les V_i sont semi-simples signifie que l'image de Γ dans G est G-cr. D'autre part, il résulte de (5.2.5) que l'invariant $n(V)$ de la G-représentation $\otimes V_i$ est égal à $\sum(\dim(V_i) - 1)$. D'où le résultat.

Autre énoncé du même goût :

Proposition 5.9 ([Se98] et [Mc00]). — *Si V est une représentation linéaire semi-simple d'un groupe Γ, il en est de même de $\wedge^i V$, pourvu que $p > i(\dim(V) - i)$.*

On applique le th. 5.4 avec $G = \mathbf{GL}(V)$. On peut supposer que $0 \leqslant i \leqslant \dim(V)$. On a alors $n(\wedge^i V) = i(\dim(V) - i)$. D'où le résultat.

Remarque. — Dans les deux cas ci-dessus, on peut se proposer de prouver des réciproques. Par exemple, si $\wedge^i V$ est semi-simple, est-il vrai (si $0 < i < \dim(V)$ et si p est assez grand) que V est semi-simple ? Le th. 5.4 dit que « oui » si $p > i(n - i)$ où $n = \dim(V)$. En fait, un argument tannakien élémentaire ([Se97a]) donne un résultat nettement meilleur : il suffit que p ne divise aucun des entiers $n - 2, n - 3, \dots, n - i$.

RÉFÉRENCES

[AS86] M. Aschbacher – « Chevalley groups of type G_2 as the group of a trilinear form », *J. Algebra* **109** (1986), p. 193–259.

[BMR04] M. Bate, B.M.S. Martin & G. Röhrle – « A geometric approach to complete reducibility », preprint, Univ. Birmingham 2004 ; à paraître dans *Invent. math.*

[BT65] A. Borel & J. Tits – « Groupes réductifs », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **27** (1965), p. 55–150.

[BT71] ______, « Éléments unipotents et sous-groupes paraboliques de groupes réductifs I », *Invent. math.* **12** (1971), p. 95–104.

[Br89] K. Brown – *Buildings*, Springer-Verlag, 1989.

[Ch55] C. Chevalley – *Théorie des Groupes de Lie*, vol. III, Hermann, Paris, 1955.

[DG70] M. Demazure & A. Grothendieck – *Structure des schémas en groupes réductifs* (*SGA 3 III*), Lect. Notes in Math., vol. 153, Springer-Verlag, 1970.

[Dy52] E.B. Dynkin – « Sous-groupes maximaux des groupes classiques », *Trudy Moskov. Mat. Obshch.* **1** (1952), p. 39–116 (en russe), trad. anglaise : *Selected Papers*, American Mathematical Society, 2000, p. 37–170.

[Gu99] R.M. Guralnick – « Small representations are completely reducible », *J. Algebra* **220** (1999), p. 531–541.

[IMP03] S. Ilangovan, V.B. Mehta & A.J. Parameswaran – « Semistability and semisimplicity in representations of low height in positive characteristic », in *A Tribute to C.S. Seshadri* (V. Lakshmibai et al., éds.), Hindustani Book Ag., New Delhi, 2003.

[JLPW95] C. Jansen, K. Lux, R. Parker & R. Wilson – *An atlas of Brauer characters*, LMS Monographs, Clarendon Press, Oxford, 1995.

[Ja97] J.C. Jantzen – « Low dimensional representations of reductive groups are semisimple », in *Algebraic Groups and Lie Groups*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, p. 255–266.

[Ke78] G.R. Kempf – « Instability in invariant theory », *Ann. of Math.* **108** (1978), p. 299–316.

[LS96] M.W. Liebeck & G.M. Seitz – *Reductive Subgroups of Exceptional Algebraic Groups*, Mem. Amer. Math. Soc., vol. 580, American Mathematical Society, 1996.

[Ma03a] B.M.S. Martin – « Reductive subgroups of reductive groups in nonzero characteristic », *J. Algebra* **262** (2003), p. 265–286.

[Ma03b] ———, « A normal subgroup of a strongly reductive subgroup is strongly reductive », *J. Algebra* **265** (2003), p. 669–674.

[Mc98] G.J. McNinch – « Dimensional criteria for semisimplicity of representations », *Proc. London Math. Soc.* (*3*) **76** (1998), p. 95–149.

[Mc00] ———, « Semisimplicity of exterior powers of semisimple representations of groups », *J. Algebra* **225** (2000), p. 646–666.

[Mo56] G.D. Mostow – « Fully reducible subgroups of algebraic groups », *Amer. J. Math.* **78** (1956), p. 200–221.

[Mu65] D. Mumford – *Geometric Invariant Theory*, Springer-Verlag, 1965 ; third enlarged edit. (D. Mumford, J. Fogarty, F. Kirwan), 1994.

[Mue97] B. Mühlherr – « Complete reducibility in projective spaces and polar spaces », preprint, Dortmund, 1997.

[No87] M.V. Nori – « On subgroups of $\mathbf{GL}(n, \mathbf{F}_p)$ », *Invent. math.* **88** (1987), p. 257–275.

[Ri88] R.W. Richardson – « Conjugacy classes of n-tuples in Lie algebras and algebraic groups », *Duke Math. J.* **57** (1988), p. 1–35.

[Ron89] M. Ronan – *Lectures on Buildings*, Acad. Press, San Diego, 1989.

[Rou78] G. Rousseau – « Immeubles sphériques et théorie des invariants », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **286** (1978), p. 247–250.

[Sei00] G.M. Seitz – « Unipotent elements, tilting modules, and saturation », *Invent. math.* **141** (2000), p. 467–502.

[Se94] J.-P. Serre – « Sur la semi-simplicité des produits tensoriels de représentations de groupes », *Invent. math.* **116** (1994), p. 513–530, volume dédié à Armand Borel.

[Se97a] ______, « Semisimplicity and tensor products of group representations : converse theorems », *J. Algebra* **194** (1997), p. 496–520, with an Appendix by Walter Feit.

[Se97b] ______, « La notion de complète réductibilité dans les immeubles sphériques et les groupes réductifs », Séminaire au Collège de France, 1997, résumé dans [Ti97], p. 93–98.

[Se98] ______, « The notion of complete reducibility in group theory », in *Moursund Lectures Part II* (*Eugene, 1998*), Notes by W.E. Duckworth, `http://darkwing.uoregon.edu/~math/serre/index.html`.

[So69] L. Solomon – « The Steinberg character of a finite group with BN-pair », in *Theory of Finite Groups*, Benjamin, 1969, p. 213–221.

[Te95] D.M. Testerman – « A_1-type overgroups of elements of order p in semisimple algebraic groups and the associated finite groups », *J. Algebra* **177** (1995), p. 34–76.

[Ti74] J. Tits – *Buildings of spherical type and finite BN-pairs*, Lect. Notes in Math., vol. 386, Springer-Verlag, 1974.

[Ti97] ______, « Résumé des cours de 1996-1997 », in *Annuaire du Collège de France*, vol. 97, 1997, p. 89–102.

[TW02] J. Tits & R.M. Weiss – *Moufang Polygons*, Springer-Verlag, 2002.

[Texte révisé en juin 2004]

Jean-Pierre SERRE

Collège de France
11 place M. Berthelot
F-75231 Paris Cedex 05
E-mail : `serre@dma.ens.fr`