

Astérisque

GÉRARD LAUMON

Faisceaux caractères

Astérisque, tome 177-178 (1989), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 709, p. 231-260

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1988-1989__31__231_0>

© Société mathématique de France, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FAISCEAUX CARACTÈRES

[d'après Lusztig]

par Gérard LAUMON

0. INTRODUCTION

Si k est une clôture algébrique d'un corps fini F_q et si G est un groupe réductif (connexe dans cet exposé) sur k , muni d'une structure rationnelle sur F_q donnée par son endomorphisme de Frobenius $F : G \rightarrow G$, on note G^F le groupe fini des points fixes de F (par exemple $G = GL_{n,k}$, $F((x_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}) = (x_{ij}^q)_{1 \leq i,j \leq n}$ et $G^F = GL_n(F_q)$).

La théorie des faisceaux caractères fait partie d'un vaste programme de Lusztig : dresser la table des caractères (complexes) pour tous les groupes finis de la forme G^F . Les travaux de Deligne et Lusztig sur la conjecture de Macdonald ([De-Lu]) ont fourni des réalisations cohomologiques des représentations des groupes finis G^F . Par contre, ils ne permettent pas en général de calculer explicitement les caractères de ces représentations. C'est une voie totalement différente qu'emprunte Lusztig avec sa théorie des faisceaux caractères. Alors que Deligne et Lusztig construisent des représentations (virtuelles) de G^F en prenant la cohomologie étale de variétés associées au couple (G, F) et sur lesquelles G^F agit, Lusztig construit des fonctions centrales de $g \in G^F$ en prenant la trace de l'action de F sur des espaces de cohomologie étale associés au couple (G, g) (et sur lesquels F agit naturellement). Lusztig obtient ainsi une nouvelle base orthonormale de l'espace des fonctions centrales sur G^F , plus facile à calculer que la base orthonormale des caractères de représentations irréductibles de G^F et reliée à cette dernière par une matrice qui, conjecturalement du moins, est explicitement connue et presque diagonale ([Lu 11], chapter 13).

Les travaux concernant directement la théorie des faisceaux caractères que Lusztig a publiés à ce jour ([Lu 1] à [Lu 10]) représentent plus de 450 pages extrêmement denses, sans compter les quelque 400 pages de son livre ([Lu 11]) qui sont à la base de la théorie. Il est donc totalement irréaliste de vouloir donner ici un rapport exhaustif sur ces travaux. Par ailleurs, Lusztig a lui-même rédigé un excellent article d'exposition sur les faisceaux caractères (sans démonstrations) ([Lu 9]). Aussi, en complément à cet article d'exposition, il me paraît utile de présenter plus en détail un échantillon des techniques utilisées par Lusztig.

Faute de place, je ne parle ni des applications (autres que celle de calculer la table des caractères des G^F) de la théorie des faisceaux caractères (applications qui, jusqu'à présent, sont toutes dues à Lusztig, ([Lu 12] à [Lu 13]), ni des travaux d'autres auteurs concernant les faisceaux caractères ([Mi-Vi] et [Gi]). Faute de place aussi, je n'ai pas inclus dans cet exposé de rappels sur les outils fondamentaux utilisés par Lusztig que sont la cohomologie étale de Grothendieck et Artin, la formule des traces de Grothendieck, la conjecture de Weil sur les poids dans la cohomologie étale prouvée par Deligne et la théorie des faisceaux pervers de Goresky, MacPherson, Deligne, Beilinson, Bernstein et Gabber (cf. [Gr] et [BBD]).

Sauf mention explicite du contraire ou sauf erreur de ma part, tous les énoncés sont dus à Lusztig. D'autre part, pour alléger l'exposition, j'ai reporté les références bibliographiques à la fin des chapitres.

Dans tout cet exposé, k est un corps algébriquement clos, l un nombre premier inversible dans k et $\bar{Q}_l$ une clôture algébrique de Q_l . On utilise librement la théorie des $\bar{Q}_l$ -faisceaux (au sens de la topologie étale) sur les schémas de type fini sur k .

Si H est un groupe algébrique sur k et si $X \subset H$ est un sous-ensemble, on note $N_H(X)$ (resp. $Z_H(X)$) le normalisateur (resp. le centralisateur) de X dans H ; en particulier, $Z_H = Z_H(X)$ est le centre de H . On note H° et $Z_H^\circ(X)$ les composantes neutres de H et $Z_H(X)$ respectivement ($Z_H^\circ(X) = Z_H(X)^\circ$).

1. LES $\bar{Q}_l$ -FAISCEAUX PERVERS $K_T^\mathcal{L}$

1.0. Soient G un groupe réductif connexe sur K et $T \subset G$ un tore maximal. On note $W = N_G(T)/T$ le groupe de Weyl de (G, T) ; pour tout $w \in W$, on désigne par $\dot{w}$ un représentant de w dans $N_G(T)$ et on note encore w l'automorphisme $\text{ad}(\dot{w})|T$ de T .

Pour tout tore S sur k , on note $\mathcal{S}(S)$ l'ensemble des classes d'isomorphie des couples

$$(\mathcal{L}, \iota)$$

où $\mathcal{L}$ est un $\bar{Q}_l$ -faisceau lisse de rang 1 sur S et où $\iota: \bar{Q}_l \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_e$ est une rigidification de $\mathcal{L}$ à l'origine de S , tels qu'il existe un entier $n \geq 1$, inversible dans k , avec $(\mathcal{L}, \iota)^{\otimes n}$ isomorphe au $\bar{Q}_l$ -faisceau constant $\bar{Q}_{l,S}$, muni de la rigidification triviale $\bar{Q}_l \xrightarrow{1} (\bar{Q}_{l,S})_e$. Le produit tensoriel fait de $\mathcal{S}(S)$ un groupe abélien. On a un isomorphisme

$$\mathcal{S}(S) \simeq X^*(S) \otimes (Q'/Z),$$

où $X^*(S)$ est le groupe des caractères algébriques de S et où

$$Q' = \left\{ \frac{m}{n} \in Q \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \geq 1 \text{ et } n \text{ inversible dans } K \right\},$$

dès que l'on a identifié le groupe des racines de l'unité de k , d'ordre inversible dans k , au groupe correspondant pour $\bar{Q}_l$. Dans la suite, on notera simplement $\mathcal{L}$ un élément de $\mathcal{S}(S)$ et $\bar{Q}_l$

l'unité de ce groupe.

W agit sur $\mathcal{S}(T)$ par $(w, \mathcal{L}) \mapsto (w^{-1})^* \mathcal{L}$ et, pour tout $\mathcal{L} \in \mathcal{S}(T)$, on notera $W_{\mathcal{L}}^1$ le fixateur dans W de $\mathcal{L}$. $\mathcal{L} \in \mathcal{S}(T)$ sera dit régulier si $W_{\mathcal{L}}^1 = \{1\}$.

1.1. Définition des $K_T^{\mathcal{L}}$

Soit $G_{\text{rss}} \xrightarrow{j} G$ l'ouvert dense des éléments réguliers semi-simples. On a

$$G_{\text{rss}} = \bigcup_{h \in G} h T_{\text{reg}} h^{-1}$$

où $T_{\text{reg}} \subset T$ est l'ouvert dense défini par

$$T_{\text{reg}} = \{t \in T \mid Z_G^0(t) = T\}.$$

Le schéma G_{rss} admet le revêtement connexe, fini, étale, galoisien, de groupe de Galois W ,

$$\begin{array}{c} \tilde{G}_{\text{rss}} = \{(g, hT) \in G_{\text{rss}} \times (G/T) \mid h^{-1}gh \in T_{\text{reg}}\} \\ \pi_{\text{rss}} \downarrow \\ G_{\text{rss}} \end{array}$$

où

$$\pi_{\text{rss}}(g, hT) = g$$

et où l'action de W sur $\tilde{G}_{\text{rss}}$ est donnée par

$$(g, hT).w = (g, h \dot{w} T).$$

De plus, on a un morphisme

$$\tilde{G}_{\text{rss}} \xrightarrow{\rho_{\text{rss}}} T_{\text{reg}}, \quad (g, hT) \longmapsto h^{-1}gh.$$

Soit $\mathcal{L} \in \mathcal{S}(T)$; on note $\mathcal{L}_{\text{reg}}$ la restriction de $\mathcal{L}$ à l'ouvert dense T_{reg} de T . Alors

$$(\pi_{\text{rss}})_* \rho_{\text{rss}}^* \mathcal{L}_{\text{reg}}$$

est un $\bar{\mathbf{Q}}_l$ -faisceau lisse sur G_{rss} , semi-simple et G -équivariant (pour l'action de G sur G_{rss} par conjugaison), de rang $|W|$. La $\bar{\mathbf{Q}}_l$ -algèbre, $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$, des endomorphismes de ce $\bar{\mathbf{Q}}_l$ -faisceau lisse est isomorphe à la $\bar{\mathbf{Q}}_l$ -algèbre du groupe fini $W_{\mathcal{L}}^1$, tordue par un 2-cocycle de $W_{\mathcal{L}}^1$ à valeurs dans $\bar{\mathbf{Q}}_l^*$; en particulier, ce $\bar{\mathbf{Q}}_l$ -faisceau lisse est irréductible si $\mathcal{L}$ est régulier.

On pose

$$(1.1.1) \quad K_T^{\mathcal{L}} = j!_*(\pi_{\text{rss}})_* \rho_{\text{rss}}^* \mathcal{L}_{\text{reg}}[\dim G]$$

où $j_{!*}$ est le prolongement intermédiaire. Il résulte aussitôt de ce qui précède et des définitions que

PROPOSITION 1.1.2.- $K_T^{\mathcal{L}}$ est un $\overline{\mathbf{Q}}_l$ -faisceau pervers sur G , semi-simple et G -equivariant (pour l'action par conjugaison de G sur lui-même). La $\overline{\mathbf{Q}}_l$ -algèbre des endomorphismes de $K_T^{\mathcal{L}}$ n'est autre que $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$; en particulier, $K_T^{\mathcal{L}}$ est irréductible si $\mathcal{L}$ est régulier. ■

1.2. Une autre description de $K_T^{\mathcal{L}}$

L'opération $j_{!*}$ est très difficile à calculer en général. Cependant, la situation étudiée est très favorable et on va voir maintenant que, modulo un choix supplémentaire, on peut donner une nouvelle expression pour $K_T^{\mathcal{L}}$ ne faisant plus intervenir $j_{!*}$.

Fixons un sous-groupe de Borel $B \subset G$ contenant T et notons U le radical unipotent de B , de sorte que $B = TU$. On a une projection évidente

$$\mathrm{pr}_T : B \longrightarrow B/U = T.$$

Alors, on a un isomorphisme

$$\tilde{G}_{\mathrm{rss}} \xrightarrow{\sim} \{(g, hB) \in G_{\mathrm{rss}} \times (G/B) \mid h^{-1} g h \in B\}$$

défini par $(g, hT) \mapsto (g, hB)$ et on peut prolonger le revêtement π_{rss} en un morphisme

$$\begin{array}{c} \tilde{G} = \{(g, hB) \in G \times (G/B) \mid h^{-1} g h \in B\} \\ \pi \downarrow \\ G \end{array}$$

où

$$\pi(g, hB) = g.$$

Lemme 1.2.1.- i) Le schéma $\tilde{G}$ est quasi-projectif, lisse et connexe sur k , de dimension égale à celle de G .

ii) Le morphisme π est projectif et "petit au sens de Goresky-MacPherson", i.e. tel que

$$\mathrm{codim}_G(\{g \in G \mid \dim \pi^{-1}(g) = r\}) \geq 2r$$

pour tout entier $r \geq 0$ avec égalité si et seulement si $r = 0$.

Preuve. - Pour la partie i), on remarque que la projection

$$\tilde{G} \longrightarrow G/B, (g, hB) \mapsto hB$$

est une fibration de fibre en hB isomorphe à hBh^{-1} .

Comme G/B est projectif sur k , π est projective.

Pour montrer que π est "petite", il suffit de démontrer que le produit fibré

$$Z = \tilde{G} \times_{\pi, G, \pi} \tilde{G}$$

est de dimension au plus égale à celle de G et que toute composante irréductible de Z de dimension égale à celle de G domine G pour la projection canonique $Z \rightarrow G$. Or

$$Z = \{g, h_1 B, h_2 B\} \in G \times (G/B) \times (G/B) \mid g \in h_1 B h_1^{-1} \cap h_2 B h_2^{-1}\}$$

est réunion disjointe des

$$Z_w = \{(g, h_1 B, h_2 B) \in Z \mid h_2^{-1} h_1 \in B \dot{w} B\}$$

pour w parcourant W et, pour chaque $w \in W$, on a une fibration

$$Z_w \rightarrow O_w, (g, h_1 B, h_2 B) \mapsto (h_1 B, h_2 B),$$

où

$$O_w = \{(h_1 B, h_2 B) \in (G/B) \times (G/B) \mid h_2^{-1} h_1 \in B \dot{w} B\},$$

de fibre isomorphe à $h_1 B h_1^{-1} \cap h_2 B h_2^{-1}$ en $(h_1 B, h_2 B)$. De plus, les O_w ($w \in W$) sont les orbites de G agissant diagonalement par translation à droite sur $(G/B) \times (G/B)$. Par suite, chaque O_w est lisse, connexe, de dimension

$$\dim G - \dim(h_1 B h_1^{-1} \cap h_2 B h_2^{-1})$$

pour tout $(h_1 B, h_2 B) \in O_w$, puisque $h_1 B h_1^{-1} \cap h_2 B h_2^{-1}$ est le fixateur de $(h_1 B, h_2 B)$ dans G . Cela montre que chaque Z_w est lisse, connexe, de dimension égale à celle de G .

Il ne reste plus qu'à voir que chaque Z_w domine G . Mais $T \subset \dot{w} B \dot{w}^{-1} \cap B$ et, pour tout $g \in G_{\text{RSS}}$, il existe au moins un $h \in G$ avec $h^{-1} g h \in T \subset \dot{w} B \dot{w}^{-1} \cap B$, i.e. avec

$$(g, h \dot{w} B, h B) \in Z_w.$$

D'où la conclusion. ■

Le morphisme $\rho_{\text{RSS}} : \tilde{G}_{\text{RSS}} \rightarrow T_{\text{reg}}$ se prolonge lui aussi en

$$\rho : \tilde{G} \rightarrow T, (g, h B) \mapsto \text{pr}_T(h^{-1} g h),$$

et il résulte facilement de la caractérisation de j_{1*} , du lemme (1.2.1) et du théorème de dualité que

THÉOREME 1.2.2.- Pour tout choix de B comme ci-dessus, on a un isomorphisme canonique de $\bar{Q}_l$ -faisceaux pervers sur G ,

$$K_T^{\mathcal{L}} \cong R\pi_* \rho^* \mathcal{L}[\dim G],$$

quel que soit $\mathcal{L} \in \mathcal{S}(T)$. ■

COROLLAIRE 1.2.3.- La restriction de $K_T^{\mathcal{L}}$ au fermé de G des éléments unipotents est indépendante de $\mathcal{L} \in \mathcal{S}(T)$. ■

Remarque 1.2.4.- Soit G_{reg} l'ouvert de G des éléments réguliers, i.e. des éléments qui ne sont contenus que dans un nombre fini de sous-groupes de Borel de G . La restriction

$$\pi_{\text{reg}} : \tilde{G}_{\text{reg}} \longrightarrow G_{\text{reg}}$$

de $\pi : \tilde{G} \rightarrow G$ à G_{reg} est un revêtement fini ramifié et comme $\tilde{G}_{\text{reg}}$ est lisse sur k et donc *a fortiori* normal, ce revêtement n'est autre que la normalisation de G_{reg} dans $\tilde{G}_{\text{rss}}$. En particulier, π_{reg} ne dépend pas du choix de B et l'action de W sur $\tilde{G}_{\text{rss}}$ se prolonge à $\tilde{G}_{\text{reg}}$ faisant de π_{reg} un revêtement fini ramifié, galoisien, de groupe de Galois W .

Si $C_{\text{reg}} \subset G_{\text{reg}}$ est la classe de conjugaison des éléments unipotents réguliers de G , π_{reg} est totalement ramifié le long de C_{reg} et on a un isomorphisme canonique

$$K_T^{\mathcal{L}}|_{C_{\text{reg}}} \cong \bar{Q}_{l,C_{\text{reg}}}[\dim G]$$

pour tout $\mathcal{L} \in \mathcal{S}(T)$.

1.3. Structure locale de $K_T^{\mathcal{L}}$

Soient $s \in G$ un élément semi-simple et $\mathcal{L} \in \mathcal{S}(T)$; notons

$$i_s : Z_G^0(s) \hookrightarrow G$$

l'immersion fermée $x \mapsto xs = sx$. On va décrire la structure de $i_s^* K_T^{\mathcal{L}}$ au voisinage de l'élément neutre de $Z_G^0(s)$.

Pour tout $g \in G$ tel que $g^{-1}s g \in T$,

$${}^g T = g T g^{-1}$$

est un tore maximal de $Z_G^0(s)$ et

$${}^g \mathcal{L} = \text{ad}(g^{-1})^* \mathcal{L}$$

est un élément de $\mathcal{S}({}^g T)$. Si l'on remplace $(G, T, \mathcal{L})$ par $(Z_G^0(s), {}^g T, {}^g \mathcal{L})$ dans la construction

(1.1.1), on obtient un $\bar{Q}_l$ -faisceau pervers sur $Z_G^0(s)$, semi-simple et $Z_G^0(s)$ -équivariant, que l'on notera

$${}^g K_T^{\mathcal{L}}.$$

Il est facile de voir que ${}^g K_T^{\mathcal{L}}$ ne dépend que de la double classe

$$o = Z_G^0(s) g T \in Z_G^0(s) \setminus \{g \in G \mid g^{-1}s g \in T\} / T = O$$

et on le notera encore

$${}^o K_T^{\mathcal{L}}.$$

De même, la fibre de ${}^g \mathcal{L}$ en $s \in {}^g T$ pour $g \in o$ ne dépend que de o et on la notera encore

$${}^o \mathcal{L}_s.$$

Enfin, soit $\mathcal{U} \subset Z_G^0(s)$ un voisinage ouvert de $e \in Z_G^0(s)$ ayant les propriétés suivantes :

- a) $\forall x \in Z_G^0(s)$, $x \mathcal{U} x^{-1} = \mathcal{U}$
- b) $\forall x \in Z_G^0(s)$, de décomposition de Jordan $x = x_s \cdot x_u$, on a $x \in \mathcal{U}$ si et seulement si $x_s \in \mathcal{U}$ (en particulier, tout élément unipotent de $Z_G^0(s)$ appartient à $\mathcal{U}$).
- c) soient $x \in \mathcal{U}$, de décomposition de Jordan $x = x_s \cdot x_u$, et $g \in G$ tels que $g^{-1}s x g \in B$ (resp. T), alors on a aussi $g^{-1}s g \in B$ (resp. T) et $g^{-1}x_s g \in B$ (resp. T).

Il n'est pas difficile de montrer l'existence d'un tel $\mathcal{U}$.

PROPOSITION 1.3.1- *La restriction de*

$$i_s^* K_T^{\mathcal{L}} \left[\dim Z_G^0(s) - \dim G \right]$$

à l'ouvert $\mathcal{U} \subset Z_G^0(s)$ est un $\bar{Q}_l$ -faisceau pervers, semi-simple et $Z_G^0(s)$ -équivariant, canoniquement isomorphe à

$$\bigoplus_{o \in O} ({}^o K_T^{\mathcal{L}}|_{\mathcal{U}}) \otimes {}^o \mathcal{L}_s.$$

Preuve (esquisse). Sur $\mathcal{U} \cap \bar{i}_s^{-1}(G_{\text{RSS}})$, la proposition est évidente : les deux complexes ci-dessus sont (à un décalage près) des $\bar{Q}_l$ -faisceaux lisses. Il suffit donc de vérifier que

$$(i_s^* K_T^{\mathcal{L}}|_{\mathcal{U}}) \left[\dim Z_G^0(s) - \dim G \right]$$

est le prolongement intermédiaire de sa restriction à $\mathcal{U} \cap \bar{i}_s^{-1}(G_{\text{RSS}})$, ce qui résulte du théorème 1.2.2 et des propriétés a), b) et c) de $\mathcal{U}$. ■

COROLLAIRE 1.3.2.- Pour tout $u \in Z_G^0(s)$ unipotent, on a un isomorphisme canonique dans $D_c^b(\bar{Q}_I)$

$$\left(K_T^{\mathcal{L}} \right)_{su} \left[\dim Z_G^0(s) - \dim G \right] \cong \bigoplus_{\sigma \in O} \left({}^{\circ} K_T^{\bar{Q}_I} \right)_u \otimes {}^{\circ} \mathcal{L}_s.$$

Preuve. C'est une conséquence directe de 1.3.1 et 1.2.3. ■

1.4. Une troisième description de $K_T^{\mathcal{L}}$ pour $\mathcal{L}$ quasi-régulier

On dira que $\mathcal{L} \in \mathcal{S}(T)$ est quasi-régulier si, pour toute coracine $\check{\alpha} : G_{m,k} \rightarrow T$ de (G, T) , le $\bar{Q}_I$ -faisceau lisse

$$(\check{\alpha})^* \mathcal{L}$$

sur $G_{m,k}$ n'est pas constant. Si $\mathcal{L}$ est régulier, $\mathcal{L}$ est aussi quasi-régulier.

Soit $\underline{w} = (w_0, \dots, w_{r-1})$ une suite finie d'éléments de W telle que

$$(\dot{w}_0 T) \dots (\dot{w}_{r-1} T) = T$$

et soit

$$Y_{\underline{w}} = \{ (g, h_0 B, \dots, h_r B) \in G \times (G/B)^{r+1} \mid h_r^{-1} g h_0 \in B \text{ et } h_i^{-1} h_{i+1} \in B \dot{w}_i B \ (i = 0, \dots, r-1) \}.$$

Le schéma $Y_{\underline{w}}$ est lisse, connexe, de dimension

$$l(\underline{w}) + \dim G$$

où

$$l(\underline{w}) = l(w_0) + \dots + l(w_{r-1})$$

et $l : W \rightarrow \mathbb{N}$ est la fonction longueur et on a des projections

$$\begin{array}{ccc} Y_{\underline{w}} & & \\ \pi_{\underline{w}} \downarrow & \searrow \rho_{\underline{w}} & \\ G & & T \end{array}$$

où

$$\pi_{\underline{w}}(g, h_0 B, \dots, h_r B) = g$$

et

$$\rho_{\underline{w}}(g, h_0 B, \dots, h_r B) = (\dot{w}_0 t_0) \dots (\dot{w}_{r-1} t_{r-1})$$

avec

$$h_i^{-1} h_{i+1} \in U \hat{w}_i t_i U \quad (i = 0, \dots, r-2)$$

$$h_{r-1}^{-1} g h_0 \in U \hat{w}_{r-1} t_{r-1} U$$

(si l'on change h_i en $h_i t_i' u_i'$ avec $t_i' \in T$, $u_i' \in U$ pour $i = 0, \dots, r$, on change $\hat{w}_i t_i$ en $t_{i-1}^{-1} \hat{w}_i t_i t_i'$ pour $i = 0, \dots, r-2$ et $\hat{w}_{r-1} t_{r-1}$ en $t_{r-1}^{-1} \hat{w}_{r-1} t_{r-1} t_0'$, ce qui ne change pas $\rho_{\underline{w}}(g, h_0 B, \dots, h_r B)$). Le morphisme $\pi_{\underline{w}}$ est propre et le morphisme $\rho_{\underline{w}}$ est lisse.

PROPOSITION 1.4.1.- Soit $\mathcal{L} \in \mathcal{S}(T)$ quasi-régulier. Alors

$$K_{\underline{w}}^{\mathcal{L}} = R(\pi_{\underline{w}})_* \rho_{\underline{w}}^* \mathcal{L} [l(\underline{w}) + \dim G]$$

est un $\overline{Q}_l$ -faisceau pervers sur G isomorphe (non canoniquement) à $K_T^{\mathcal{L}}$.

Preuve. On raisonne par récurrence sur $l(\underline{w})$. Si $l(\underline{w}) = 0$, on a $w_0 = \dots = w_{r-1} = 1$ et $(Y_{\underline{w}}, \pi_{\underline{w}}, \rho_{\underline{w}})$ est isomorphe à $(\tilde{G}, \pi, \rho)$, d'où la proposition dans ce cas

Si $l(\underline{w}) > 0$, on suppose donc la proposition démontrée pour toute suite $\underline{w}''$ telle que $l(\underline{w}'') < l(\underline{w})$ et que

$$(\hat{w}_0'' T) \dots (\hat{w}_r'' T) = T.$$

On ne change pas $(Y_{\underline{w}}, \pi_{\underline{w}}, \rho_{\underline{w}})$ (à isomorphisme près) en :

- supprimant un w_i qui est égal à 1,
- remplaçant une sous-suite $(w_i, w_{i+1}, \dots, w_{i+j})$ par $w_i w_{i+1} \dots w_{i+j} \in W$ si

$$l(w_i w_{i+1} \dots w_{i+j}) = l(w_i) + l(w_{i+1}) + \dots + l(w_{i+j}),$$

- remplaçant un w_i par une suite $(w_{i0}, w_{i1}, \dots, w_{ij})$ d'éléments de W telle que

$$w_i = w_{i0} w_{i1} \dots w_{ij}$$

et que

$$l(w_i) = l(w_{i0}) + l(w_{i1}) + \dots + l(w_{ij}).$$

Par suite, on peut supposer que chaque w_i est une réflexion simple dans W (relativement à B) et qu'il existe $i \in \{0, \dots, r-2\}$ tel que

$$w_i = w_{i+1} = s$$

(pour ce dernier point, on remarque qu'il existe nécessairement $i \in \{0, \dots, r-2\}$ tel que

$$l(w_0 \dots w_i) = i + 1$$

$$l(w_0 \dots w_i w_{i+1}) = i - 1$$

puisque $(\dot{w}_0 T) \dots (\dot{w}_{r-1} T) = T$ de sorte que l'on peut remplacer la sous-suite $(w_0, \dots, w_i)$ par une suite $(w'_0, \dots, w'_{i-1}, w_{i+1})$ de réflexions simples avec

$$w'_0 \dots w'_{i-1} w_{i+1} = w_0 \dots w_{i-1} w_i).$$

Considérons alors les suites

$$\underline{w}' = (w_0, \dots, w_{i-1}, s, w_{i+2}, \dots, w_{r-1})$$

et

$$\underline{w}'' = (w_0, \dots, w_{i-1}, w_{i+2}, \dots, w_{r-1});$$

on a

$$l(\underline{w}'') = l(\underline{w}) - 2$$

et

$$(\dot{w}_0 T) \dots (\dot{w}_{i-1} T)(\dot{w}_{i+2} T) \dots (\dot{w}_{r-1} T) = T$$

puisque

$$(\dot{s}T)(\dot{s}T) = T.$$

Comme

$$(B\dot{s}B)(B\dot{s}B) = (B\dot{s}B) \cup B,$$

$\pi_{\underline{w}}$ admet le dévissage suivant : on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} Y'_{\underline{w}} & \xhookrightarrow{j'} & Y_{\underline{w}} & \xhookleftarrow{j''} & Y''_{\underline{w}} \\ p' \downarrow & & \downarrow \pi_{\underline{w}} & & \downarrow p'' \\ Y_{\underline{w}'} & & & & Y_{\underline{w}''} \\ & \searrow \pi_{\underline{w}'} & & \swarrow \pi_{\underline{w}''} & \\ & & G & & \end{array}$$

où $Y''_{\underline{w}}$ est le fermé de $Y_{\underline{w}}$ défini par la condition

$$h_i B = h_{i+2} B,$$

où $Y'_{\underline{w}}$ est l'ouvert complémentaire, où j' et j'' sont les inclusions, où p' est l'oubli de $h_{i+1}B$ ($Y_{\underline{w}'}$ est bien défini, même si

$$(\dot{w}_0 T) \dots (\dot{w}_{i-1} T)(\dot{s}T)(\dot{w}_{i+2} T) \dots (\dot{w}_{r-1} T) \neq T$$

et où p'' est l'oubli de $(h_{i+1}B, h_{i+2}B)$.

Il est facile de vérifier que :

1) pour chaque $y' \in Y_{\underline{w}'}$, le couple

$$(p'^{-1}(y'), (j'^* \rho_{\underline{w}'}^* \mathcal{L}) \mid p'^{-1}(y'))$$

est (non canoniquement) isomorphe au couple

$$(G_{mk}, (\check{\alpha})^* \mathcal{L}),$$

où $\check{\alpha}$ est la coracine associée à la réflexion

$$w_0 \dots w_{i-1} s w_{i-1} \dots w_0;$$

2) pour chaque $y'' \in Y_{\underline{w}''}$, $p''^{-1}(y'')$ est (non canoniquement) isomorphe à A_k^1 ;

3) $\rho_{\underline{w}'} \circ j'' = \rho_{\underline{w}''} \circ p''$.

Comme

$$R\Gamma_c(G_{mk}, (\check{\alpha})^* \mathcal{L}) = 0$$

puisque $(\check{\alpha})^* \mathcal{L}$ est non constant par hypothèse, on a

$$Rp'_! j'^* \rho_{\underline{w}'}^* \mathcal{L} = 0;$$

comme

$$R\Gamma_c(A_k^1, \overline{Q}_l) \cong \overline{Q}_l[2],$$

on a

$$Rp''_! j''^* \rho_{\underline{w}''}^* \mathcal{L} \cong \rho_{\underline{w}''}^* \mathcal{L}[2].$$

On en déduit que

$$R(\pi_{\underline{w}})_* j_!^* j^* \rho_{\underline{w}}^* \mathcal{L} = 0$$

et que

$$R(\pi_{\underline{w}})_* j_*^* j^* \rho_{\underline{w}}^* \mathcal{L} \cong R(\pi_{\underline{w}''})_* \rho_{\underline{w}''}^* \mathcal{L}[-2]$$

d'où un isomorphisme

$$R(\pi_{\underline{w}})_* \rho_{\underline{w}}^* \mathcal{L} \cong R(\pi_{\underline{w}''})_* \rho_{\underline{w}''}^* \mathcal{L}[-2]$$

et la proposition compte tenu de l'hypothèse de récurrence. ■

1.5. Commentaires bibliographiques

Le $\overline{Q}_l$ -faisceau pervers $K_T^{Q_l}$ apparaît pour la première fois dans [Lu 1] § 3, ainsi que l'énoncé 1.2.2 pour $\mathcal{L} = \overline{Q}_l$. Pour $\mathcal{L}$ arbitraire, la référence est [Lu 2] (4.5).

Le morphisme $\pi : \tilde{G} \rightarrow G$ a été introduit par Grothendieck ("résolution simultanée") (cf. [Spr 3] (4.2)). La preuve que nous donnons de la seconde assertion de 1.2.1, ii) est due à Lusztig ([Lu 2] 1.2) ; la variété Z a été introduite par Steinberg ("variété des triples").

La proposition 1.3.1 est un cas particulier de [Lu 4], 8.8.7.

La proposition 1.4.1 est un cas particulier de [Lu 10] 4.6 (voir aussi [Lu 3] 2.9).

2. LES FONCTIONS "TRACES DE FROBENIUS" DES $K_T^{\mathcal{L}}$

2.0. Dans ce numéro, k est une clôture algébrique d'un corps fini F_q et G un groupe réductif connexe sur k muni d'une structure rationnelle sur F_q . On note $F : G \rightarrow G$ l'endomorphisme de Frobenius correspondant. On fixe un tore maximal $T \subset G$ tel que $FT \subset T$. Alors, F agit sur $\mathcal{S}(T)$ par $\mathcal{L} \mapsto F^* \mathcal{L}$ et pour chaque $\mathcal{L} \in \mathcal{S}(T)^F$, on a un et un seul isomorphisme

$$\tau : F^* \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$$

de $\bar{Q}_l$ -faisceaux lisses de rang 1 sur T , rigidifiés à l'origine. La fonction "trace de Frobenius"

$$\chi_{\mathcal{L}, \tau} : T^F \rightarrow \bar{Q}_l^{\times}$$

définie par

$$\chi_{\mathcal{L}, \tau}(t) = \text{tr}(\tau_t : \mathcal{L}_t \rightarrow \mathcal{L}_t)$$

est alors un caractère du tore fini T^F .

On suppose dans la suite que q est assez grand (par rapport au diagramme de Dynkin de G) pour qu'il existe au moins un $\mathcal{L} \in \mathcal{S}(T)^F$ qui soit régulier ($W_{\mathcal{L}}^! = \{1\}$).

2.1. La fonction "trace de Frobenius" de $K_T^{\mathcal{L}}$ pour $\mathcal{L} \in \mathcal{S}(T)^F$

Soit $\mathcal{L} \in \mathcal{S}(T)^F$. Alors, le $\bar{Q}_l$ -faisceau pervers sur G , $K_T^{\mathcal{L}}$, est automatiquement muni d'un isomorphisme

$$F^* K_T^{\mathcal{L}} \xrightarrow{\sim} K_T^{\mathcal{L}}.$$

Cet isomorphisme est construit comme suit : puisque $\mathcal{L} \in \mathcal{S}(T)^F$, on a un isomorphisme canonique

$$\tau : F^* \mathcal{L} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L},$$

dont on note τ_{reg} la restriction à T_{reg} , et l'isomorphisme cherché, que l'on notera encore τ , n'est autre que

$$j_{!*}(\pi_{r_{ss}})_* \rho_{r_{ss}}^* \tau_{\text{reg}}[\dim G] : F^* K_T^{\mathcal{L}} \xrightarrow{\sim} K_T^{\mathcal{L}}.$$

On notera que cet isomorphisme est automatiquement G -équivariant.

Alors, la fonction "trace de Frobenius"

$$(2.1.1) \quad \chi_{K_T^{\mathcal{L}}, \tau} : G^F \rightarrow \bar{Q}_l^{\times}$$

définie par

$$\chi_{K_T^{\mathcal{L}}, \tau}(g) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \text{tr} \left(\mathcal{H}^i(\tau_g) \right),$$

où $\tau_g : (K_T^{\mathcal{L}})_g \rightarrow (K_T^{\mathcal{L}})_g$ est la fibre de τ en g , est une fonction centrale.

Il résulte de 1.2.3 que la restriction de $\chi_{K_T^{\mathcal{L}}}$ aux éléments unipotents de G^F est indépendante de $\mathcal{L} \in \mathcal{S}(T)^F$. On notera cette restriction par

$$(2.1.2) \quad \bar{Q}_T^G : \{u \in G^F \text{ unipotent}\} \rightarrow \bar{Q}_I.$$

D'après 1.2.4, pour tout $u \in G^F$ unipotent régulier, on a

$$(2.1.3) \quad \bar{Q}_T^G(u) = (-1)^{\dim G} = (-1)^{\dim T}$$

($\dim G = \dim T + 2 \dim U$) et, d'après 1.3.2, on a

PROPOSITION 2.1.4.- *Pour tous $s, u \in G^F$ avec s semi-simple, u unipotent et $su = us$, et pour tout $\mathcal{L} \in \mathcal{S}(T)^F$, on a la formule suivante*

$$\chi_{K_T^{\mathcal{L}}}(su) = \frac{1}{|Z_G^0(s)|} \sum_{\substack{x \in G^F \\ x^{-1}sx \in T}} \bar{Q}_{xTx^{-1}}^{Z_G^0(s)}(u) \chi_{\mathcal{L}, \tau}(x^{-1}sx). \blacksquare$$

2.2. Les caractères virtuels R_T^θ de Deligne-Lusztig

Pour tout caractère θ du tore fini T^F à valeurs dans $\bar{Q}_I^*$, Deligne et Lusztig ont défini un caractère virtuel

$$R_T^\theta : G^F \rightarrow \bar{Q}_I.$$

Rappelons leur construction de R_T^θ . Cette construction dépend du choix d'un sous-groupe de Borel $B \subset G$ contenant T mais non nécessairement stable par F . Ayant fixé un tel B , on note U son radical unipotent et on pose

$$X = \{gT^F(U \cap FU) \in G/T^F(U \cap FU) \mid g^{-1}Fg \in FU\};$$

X est un schéma quasi-projectif, lisse, purement de dimension

$$d = \dim U/(U \cap FU),$$

sur lequel G^F opère par translations à gauche et qui admet un revêtement fini, étale, galoisien, de groupe de Galois T^F , G^F -équivariant,

$$\begin{array}{c} \dot{X} = \{g(U \cap FU) \in G/(U \cap FU) \mid g^{-1}Fg \in FU\} \\ \downarrow r \\ X \end{array}$$

où

$$\pi(g(U \cap FU)) = gT^F(U \cap FU)$$

et où T^F opère par translations à droite sur $\dot{X}$. Soit $\mathcal{F}_\theta$ le $\overline{Q}_I$ -faisceau lisse de rang 1 sur X déduit du T^F -torseur $\dot{X}$ sur X par extension du groupe structural via

$$\theta^{-1} : T^F \rightarrow \overline{Q}_I^\times.$$

Les $\overline{Q}_I$ -espaces vectoriels

$$H_c^i(X, \mathcal{F}_\theta) \quad (i \in \mathbb{Z})$$

sont des G^F -modules nuls pour $i < 0$ et $i > 2d$ et on peut former le G^F -module virtuel

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i H_c^i(X, \mathcal{F}_\theta).$$

Par définition, R_T^θ est le caractère de ce G^F -module virtuel et Deligne et Lusztig ont démontré que ce caractère est indépendant du choix de B . De plus, R_T^θ a les propriétés suivantes :

PROPOSITION 2.2.1 (Deligne, Lusztig).- *La restriction de R_T^θ aux éléments unipotents de G^F est indépendante du caractère θ de T^F . ■*

On note

$$(2.2.2) \quad Q_T^G : \{u \in G^F \text{ unipotent}\} \rightarrow \overline{Q}_I$$

la restriction commune des R_T^θ ; Deligne et Lusztig appellent cette fonction la *fonction de Green* de (G, T) .

PROPOSITION 2.2.3 (Deligne, Lusztig).- *Pour tous $s, u \in G^F$, avec s semi-simple, u unipotent et $su = us$, et pour tout caractère $\theta : T^F \rightarrow \overline{Q}_I^\times$, on a la formule suivante*

$$R_T^\theta(su) = \frac{1}{|Z_G^0(s)^F|} \sum_{\substack{x \in G^F \\ x^{-1}sx \in T}} Q_{xTx^{-1}}^{Z_G^0(s)}(u) \theta(x^{-1}sx). \blacksquare$$

PROPOSITION 2.2.4 (Deligne, Lusztig).- *Si $u \in G^F$ est unipotent régulier*

$$Q_T^G(u) = 1. \blacksquare$$

PROPOSITION 2.2.5 (Deligne, Lusztig, Haastert).- Soit $\theta : T^F \rightarrow \overline{\mathbf{Q}}_l^\times$ un caractère tel que
 $\theta \circ w \neq \theta, \quad \forall w \in W^F - \{1\}$

(un tel θ sera dit en position générale). Alors

- i) $H_c^i(X, \mathcal{F}_\theta) = 0$ pour tout entier $i \neq d$;
- ii) le G^F -module $H_c^d(X, \mathcal{F}_\theta)$ est irréductible ;
- iii) pour tout entier $r \geq 1$ tel que $F^r B = B$ et donc tel que F^r agisse sur $(X, \mathcal{F}_\theta)$, F^r induit sur $H_c^d(X, \mathcal{F}_\theta)$ une homothétie de rapport $\zeta q^{rd/2}$ où $q^{1/2}$ est une racine carrée de q dans $\overline{\mathbf{Q}}_l$ et ζ une racine de l'unité dans $\overline{\mathbf{Q}}_l$. ■

2.3. Comparaison des $\chi_{K_T^{\mathcal{L}, \tau}}$ et des R_T^θ

THÉORÈME 2.3.1.- Pour tout $u \in G^F$ unipotent, on a

$$\tilde{Q}_T^G(u) = (-1)^{\dim T} Q_T^G(u).$$

COROLLAIRE 2.3.2.- Pour tout $\mathcal{L} \in \mathcal{S}(T)^F$, on a

$$\chi_{K_T^{\mathcal{L}, \tau}} = (-1)^{\dim T} R_T^\theta$$

où

$$\theta = \chi_{\mathcal{L}, \tau} : T^F \rightarrow \overline{\mathbf{Q}}_l^\times.$$

Preuve du corollaire. C'est une conséquence immédiate de 2.1.4, 2.2.3 et 2.3.1. ■

2.4. Le lemme clé

La preuve de 2.3.1 est basée sur le

Lemme 2.4.1. Soit $\mathcal{L} \in \mathcal{S}(T)^F$ que l'on suppose régulier. Alors, il existe une constante $\lambda \in \overline{\mathbf{Q}}_l^\times$ telle que

$$\chi_{K_T^{\mathcal{L}, \tau}} = \lambda R_T^\theta,$$

où

$$\theta = \chi_{\mathcal{L}, \tau} : T^F \rightarrow \overline{\mathbf{Q}}_l^\times.$$

La preuve sera donnée en 2.5 et 2.6. Admettons provisoirement 2.4.1 et déduisons-en 2.3.1. Pour cela, fixons un $\mathcal{L} \in \mathcal{S}(T)^F$ qui soit régulier (il en existe par hypothèse sur q). Pour tout $g \in G^F$, on a donc

$$\chi_{K_T^{\mathcal{L}, \tau}}(g) = \lambda R_T^\theta(g),$$

et, pour tout $u \in G^F$ unipotent, on a

$$\tilde{Q}_T^G(u) = \chi_{K_T^{\mathcal{L}, \tau}}(u) = \lambda R_T^\theta(u) = \lambda Q_T^G(u).$$

Il ne reste plus qu'à démontrer que $\lambda = (-1)^{\dim T}$, ce que l'on fait en prenant $u \in G^F$ unipotent régulier (cf. 2.1.3 et 2.2.4).

2.5. Une formule explicite pour R_T^θ pour θ en position générale

Soit $\theta : T^F \rightarrow \bar{\mathbb{Q}}_l^\times$ un caractère en position générale et soit $B \subset G$ un sous-groupe de Borel contenant T . Le G^F -module $H_c^d(X, \mathcal{F}_{\theta^{-1}})$ est irréductible et $R_T^{\theta^{-1}}$ est le caractère du G^F -module virtuel

$$(-1)^d H_c^d(X, \mathcal{F}_{\theta^{-1}}) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i H_c^i(X, \mathcal{F}_{\theta^{-1}})$$

(cf. 2.2.5 i) et ii)). D'après 2.2.5 iii), on peut trouver un entier $r \geq 1$ tel que

- a) $F^r B = B$ (et donc F^r agit sur $(X, \mathcal{F}_{\theta^{-1}})$);
- b) F^r induit sur $H_c^d(X, \mathcal{F}_{\theta^{-1}})$ l'homothétie de rapport $q^{rd/2}$ (on a fixé $q^{1/2}$ dans $\bar{\mathbb{Q}}_l$).

Lemme 2.5.1.- Pour tout entier r comme ci-dessus et tout $g \in G^F$, on a la formule suivante

$$R_T^\theta(g) = q^{-rd/2} \sum_{hT^F(U \cap FU) \in Z} \theta \left(\text{pr}_T((F^r h)^{-1} gh) \right)$$

où

$$Z = \{ hT^F(U \cap FU) \in G/T^F(U \cap FU) \mid h^{-1} Fh \in FU \text{ et } (F^r h)^{-1} gh \in T^F(U \cap FU) \}$$

et où

$$\text{pr}_T : T^F(U \cap FU) \rightarrow T^F$$

est la projection sur le premier facteur.

Preuve. D'après [De-Lu] 4.2 et la remarque suivant 4.1.1, on a $R_T^\theta(g) = R_T^{\theta^{-1}}(g^{-1})$. Comme F^r et g^{-1} commutent en tant qu'automorphismes de $H_c^d(X, \mathcal{F}_{\theta^{-1}})$, on a

$$R_T^{\theta^{-1}}(g^{-1}) = q^{-rd/2} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \text{tr} \left(g^{-1} F^r, H_c^i(X, \mathcal{F}_{\theta^{-1}}) \right).$$

Mais $g^{-1} F^r$ est l'endomorphisme de Frobenius pour une certaine structure rationnelle sur $\mathbf{F}_{q^r}$ du couple $(X, \mathcal{F}_{\theta^{-1}})$. Par suite, on peut lui appliquer la formule des traces de Grothendieck et le lemme est démontré. ■

2.6. Fin de la preuve de 2.4.1.

On fixe un sous-groupe de Borel $B \subset G$ contenant T et un élément $\gamma \in G$ tel que

$$B_0 = \gamma^{-1} B \gamma$$

et

$$T_0 = \gamma^{-1} T \gamma \subset B_0$$

soient stables par F . On note W_0 le groupe de Weyl $N_G(T_0)/T_0$ et on pose

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{w}_0 = \gamma^{-1}(F\gamma) \in N_G(T_0) \\ w_0 = \dot{w}_0 T_0 \in W_0. \end{array} \right.$$

On a un $\mathcal{L} \in \mathcal{S}(T)^F$ régulier. On note $\theta = \chi_{\mathcal{L}, \tau} : T^F \rightarrow \bar{\mathbf{Q}}_l^\times$ sa fonction "trace de Frobenius" et $\mathcal{L}_0 \in \mathcal{S}(T_0)$ l'image réciproque de $\mathcal{L}$ par $\text{ad}(\gamma) : T_0 \xrightarrow{\sim} T$. Si

$$F_0 : T_0 \longrightarrow T_0$$

est l'endomorphisme défini par

$$F_0(t_0) = \text{ad}(\dot{w}_0) F(t_0),$$

on a

$$\mathcal{L}_0 \in \mathcal{S}(T_0)^{F_0}.$$

On choisit un entier $r \geq 1$ tel que

- a) $F^r \gamma = \gamma$ et donc $F^r B = B$ et donc F^r agit sur $(X, \mathcal{F}_{\theta^{-1}})$,
- b) F^r induit sur $H_c^d(X, \mathcal{F}_{\theta^{-1}})$ l'homothétie de rapport $q^{rd/2}$ (on a fixé $q^{1/2}$ dans $\bar{\mathbf{Q}}_l$).

On a alors

- c) $F^r \dot{w}_0 = \dot{w}_0$,
- d) $\dot{w}_0(F \dot{w}_0) \dots (F^{r-1} \dot{w}_0) = e$ et donc

$$(\dot{w}_0 T_0)(F \dot{w}_0 T_0) \dots ((F^{r-1} \dot{w}_0) T_0) = T_0.$$

Par suite, si

$$\underline{w} = (w_0, Fw_0, \dots, F^{r-1}w_0) \in W^r,$$

on peut former (cf. 1.4)

$$K_{\underline{w}}^{\mathcal{L}_0} = R(\pi_{\underline{w}})_* \rho_{\underline{w}}^* \mathcal{L}_0 [l(\underline{w}) + \dim G]$$

et on peut munir cet objet de $D_c^b(G, \bar{\mathbf{Q}}_l)$ d'un isomorphisme

$$\tau_0 : F^* K_{\underline{w}}^{\mathcal{L}_0} \xrightarrow{\sim} K_{\underline{w}}^{\mathcal{L}_0}$$

de la façon suivante : on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 G & \xleftarrow{\pi_{\underline{w}}} & Y_{\underline{w}} & \xrightarrow{\rho_{\underline{w}}} & T_0 & \xrightarrow{\widetilde{\text{ad}}(\gamma)} & T \\
 \downarrow F & & \downarrow \Phi & & \downarrow F_0 & & \downarrow F \\
 G & \xleftarrow{\pi_{\underline{w}}} & Y_{\underline{w}} & \xrightarrow{\rho_{\underline{w}}} & T_0 & \xrightarrow{\sim \text{ad}(\gamma)} & T
 \end{array}$$

où

$$\Phi(g, h_0 B_0, h_1 B, \dots, h_r B_0) = \left(Fg, F(g^{-1}h_{r-1})B_0, (Fh_0)B_0, \dots, (Fh_{r-1})B_0 \right)$$

et on peut poser

$$\tau_0 = R(\pi_{\underline{w}})_* \rho_{\underline{w}}^* \text{ad}(\gamma)^* \tau[l(\underline{w}) + \dim G] .$$

Lemme 2.6.1. Il existe une constante $\mu \in \overline{\mathbb{Q}}_l^\times$ telle que

$$\chi_{K_T^\mathcal{L}, \tau} = \mu \cdot \chi_{K_{\underline{w}}^{\mathcal{L}_0}, \tau} .$$

Preuve. Il suffit de montrer que $K_T^\mathcal{L}$ et $K_{\underline{w}}^{\mathcal{L}_0}$ sont deux $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -faisceaux pervers irréductibles isomorphes car tout automorphisme d'un $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -faisceau pervers irréductible est nécessairement une homothétie (et τ et τ_0 ne peuvent différer que par un scalaire $\mu \in \overline{\mathbb{Q}}_l^\times$). Or

$$K_T^\mathcal{L} \cong \text{ad}(\gamma)^* K_T^\mathcal{L} \cong K_{T_0}^{\mathcal{L}_0}$$

est un $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -faisceau pervers irréductible car $\mathcal{L}$ est régulier (cf. 1.1.2) et

$$K_{\underline{w}}^{\mathcal{L}_0} \cong K_{T_0}^{\mathcal{L}_0}$$

car $\mathcal{L}_0$ est quasi-régulier (cf. 1.4.1), d'où le lemme. ■

Il ne reste plus qu'à comparer $\chi_{K_{\underline{w}}^{\mathcal{L}_0}, \tau_0}$ et R_T^θ . Compte tenu de 2.5.1, il revient au même de montrer que :

Lemme 2.6.2. Pour tout $g \in G^F$, on a la formule suivante

$$\chi_{K_{\underline{w}}^{\mathcal{L}_0}, \tau_0}(g) = (-1)^{l(\underline{w}) + \dim G} \sum_{hT^F(U \cap FU) \in Z} \theta \left(\text{pr}_T \left((F^F h)^{-1} gh \right) \right)$$

où Z a été défini en 2.5.1.

Preuve. Fixons $g \in G^F$ et notons Φ_g la restriction de Φ à la fibre $Y_{\underline{w},g}$ de $\pi_{\underline{w}}$ en g . Il est clair que Φ_g est l'endomorphisme de Frobenius pour une certaine structure rationnelle sur F_q de $Y_{\underline{w},g}$. On peut donc appliquer la formule des traces de Grothendieck pour calculer $\chi_{K_T, \tau_0}^{\epsilon_0}(g)$.

Or, on a des isomorphismes

$$Z \xrightarrow{\sim} Z' \xrightarrow{\sim} Z'_0 \xrightarrow{\sim} Z''_0 \xrightarrow{\sim} (Y_{\underline{w},g})^{\Phi_g}$$

$$hT^F(U \cap FU) \mapsto hT^F U \mapsto h\gamma_{T_0}^{F_0} U_0 \mapsto h\gamma B_0 \mapsto (g, h\gamma B_0, \dots, F^F(h\gamma) B_0)$$

où

$$Z' = \{hT^F U \in G/T^F U \mid h^{-1}(Fh) \in U(Fu) \text{ et } (F^F h)^{-1} g h \in T^F U\}$$

$$Z'_0 = \{h_0 T_0^{F_0} U_0 \in G/T_0^{F_0} U_0 \mid h_0^{-1}(Fh_0) \in U_0 \hat{w}_0 U_0 \text{ et } (F^F h_0)^{-1} g h_0 \in T_0^{F_0} U_0\}$$

et

$$Z''_0 = \{h_0 B_0 \in G/B_0 \mid h_0^{-1}(Fh_0) \in B_0 \hat{w}_0 B_0 \text{ et } (F^F h_0)^{-1} g h_0 \in B_0\}.$$

En outre, on vérifie que

$$\text{ad}(\gamma) \rho_{\underline{w}}(g, h\gamma B_0, \dots, F^F(h\gamma) B_0) = \text{pr}_T((F^F h)^{-1} g h).$$

d'où le lemme. ■

2.7. Commentaires bibliographiques

Pour tout ce qui concerne la fonction "trace de Frobenius", voir [Gr].

La fonction $\tilde{Q}_T^G$ est introduite dans [Lu 4] (8.3) et 2.1.4 est un cas particulier de [Lu 4] 8.5.

Les caractères R_T^θ sont introduits dans [De-Lu] (1.20) et l'indépendance de R_T^θ du choix de B est prouvée dans [De-Lu] (4.3).

La proposition 2.2.3 n'est autre que [De-Lu] (4.2) et 2.2.1 est un cas particulier de 2.2.3.

La proposition 2.2.4 n'est autre que [De-Lu] (9.16).

La proposition 2.2.5 est une combinaison de [De-Lu] (9.7), (9.9), (7.4), [Ha] (3.2) et [Lu 11] (2.8), (2.20), (3.8) i) (voir aussi [Lu 10] (6.1)).

Le théorème 2.3.1 est un cas particulier de [Lu 10] (1.14) et la preuve que nous donnons est extraite de [Lu 10] (8.15).

3. GÉNÉRALISATION : LES $\bar{Q}_T$ -FAISCEAUX PERVERS $K(L, \Sigma_L, \mathcal{E}_L)$

3.0. Le corps algébriquement clos k est de nouveau arbitraire et G est toujours un groupe réductif connexe sur k .

Pour tout sous-groupe parabolique P de G , on note U_P son radical unipotent ; si L est un facteur de Levi de P , P est donc le produit semi-direct de L et de U_P .

3.1. Paires cuspidales

On considère les paires $(\Sigma, \mathcal{E})$ où $\Sigma \subset G$ est l'image inverse d'une classe de conjugaison dans G/Z_G° par la projection canonique $G \rightarrow Z_G^\circ$ et où $\mathcal{E}$ est une classe d'isomorphie de $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -faisceau lisse sur Σ , irréductible, G -équivariant (pour l'action de G sur Σ par conjugaison) et tel que la restriction de $\mathcal{E}$ à $Z_G^\circ \times \Sigma$ par le morphisme produit $Z_G^\circ \times \Sigma \rightarrow \Sigma$ soit de la forme $L \boxtimes \mathcal{E}$ pour $L \in \mathcal{S}(Z_G^\circ)$.

Lemme 3.1.1 (Springer, Spaltenstein, Lusztig). Soit $\Sigma \subset G$ comme ci-dessus. Alors, pour tout sous-groupe parabolique P de G , tout facteur de Levi L de P , toute classe de conjugaison C_L de L et tout $l \in C_L$, on a l'inégalité

$$\dim(S \cap l U_P) \leq \frac{1}{2} \left(\dim(S/Z_G^\circ) - \dim C_L \right). \blacksquare$$

DÉFINITION 3.1.2.- Une paire $(\Sigma, \mathcal{E})$ comme ci-dessus est dite *cuspidale* si, pour tout sous-groupe parabolique propre P de G , pour tout facteur de Levi L de P , toute classe de conjugaison C_L de L et tout $l \in C_L$, on a

$$H_c^{\dim(S/Z_G^\circ) - \dim C_L}(S \cap l U_P, \mathcal{E}) = 0$$

(d'après 3.1.1, on a de toute façon

$$H_c^i(\Sigma \cap l U_P, \mathcal{E}) = 0$$

pour tout entier $i > \dim(\Sigma/Z_G^\circ) - \dim C_L$).

PROPOSITION 3.1.3.- Soit $(\Sigma, \mathcal{E})$ une paire cuspidale pour G . Alors Σ est isolée, i.e. que pour un (et donc pour tout) $g \in \Sigma$, de décomposition de Jordan $g = su = us$ (s semi-simple, u unipotent), on a $Z_G^\circ(Z_G^\circ(s)) = Z_G^\circ$.

Preuve. Soit $g \in \Sigma$. Si Σ n'est pas isolée, $Z_G^\circ(g)$ est contenu dans un facteur de Levi d'un sous-groupe parabolique propre P de G .

Alors, l'application $U_P \rightarrow g U_P$, $v \mapsto v g v^{-1}$ est bijective par un argument bien connu. En particulier, $g U_P \subset \Sigma$ et la restriction de $\mathcal{E}$ à $g U_P$ est constante, d'où

$$H_c^{2 \dim(g U_P)}(g U_P, \mathcal{E}) \neq 0.$$

Mais cela contredit la cuspidalité de $(\Sigma, \mathcal{E})$ puisque

$$\begin{aligned}\dim(g U_p) &= \dim U_p = \frac{1}{2} (\dim G - \dim L) \\ &= \frac{1}{2} \left(\dim \left(S/Z_G^0 \right) - \dim C_L \right),\end{aligned}$$

où C_L est la classe de conjugaison de g dans L (on a $Z_G^0(g) = Z_L^0(g)$). ■

Remarque 3.1.4. De la finitude du nombre des classes de conjugaison unipotentes on peut déduire la finitude du nombre des Σ isolées. En particulier, si G est semi-simple, le nombre des paires cuspidales $(\Sigma, \mathcal{E})$ pour G est fini : Σ est une classe de conjugaison isolée et, si $g \in \Sigma$, $\mathcal{E}$ est donné par une classe d'isomorphie de représentation irréductible sur $\bar{\mathbb{Q}}_l$ du groupe fini $A_G(g) = Z_G(g)/Z_G^0(g)$.

3.2. Les $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -faisceaux pervers $K(L, \Sigma_L, \mathcal{E}_L)$

Fixons un sous-groupe réductif L de G qui est un facteur de Levi d'un sous-groupe parabolique (non précisé pour l'instant) de G et une paire cuspidale $(\Sigma_L, \mathcal{E}_L)$ pour L .

On pose

$$\Sigma_{L, \text{reg}} = \{g \in \Sigma_L \mid Z_G^0(g) \subset L\};$$

c'est un ouvert dense de Σ_L . Alors

$$G(L, \Sigma_L)^0 = \bigcup_{h \in G} h \Sigma_{L, \text{reg}} h^{-1}$$

est une partie localement fermée de G , irréductible, lisse sur k , de dimension

$$\dim G - \dim L + \dim \Sigma_L.$$

De plus, on a un "diagramme d'induction"

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G}(L, \Sigma_L)^0 = \{(g, h) \in G \times G \mid h^{-1} g h \in \Sigma_{L, \text{reg}}\} & & \\ \alpha^0 \downarrow & \searrow \hat{\rho}^0 & \\ \tilde{G}(L, \Sigma_L)^0 = \{(g, hL) \in G \times (G/L) \mid h^{-1} g h \in \Sigma_{L, \text{reg}}\} & & \Sigma_{L, \text{reg}} \\ \pi^0 \downarrow & & \\ G(L, \Sigma_L)^0 & & \end{array}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\rho}^0(g, h) = h^{-1} g h \\ \alpha^0(g, h) = (g, hL) \\ \pi^0(g, hL) = g \end{array} \right.$$

Le morphisme π^0 est un revêtement fini, étale, galoisien, de groupe de Galois

$$W(L, \Sigma_L) = \{nL \in N_G(L)/L \mid n\Sigma_L n^{-1} = \Sigma_L\}$$

et le morphisme α^0 est un L -torseur de manière évidente.

Le $\bar{\mathbf{Q}}_I$ -faisceau lisse sur $\tilde{G}(L, \Sigma_L)^0$,

$$(\dot{p}^0)^* \mathcal{E}_{L, \text{reg}},$$

où $\mathcal{E}_{L, \text{reg}}$ est la restriction de $\mathcal{E}_L$ à l'ouvert $\Sigma_{L, \text{reg}}$ de Σ_L , est irréductible et L -équivariant. Par suite, ce $\bar{\mathbf{Q}}_I$ -faisceau lisse se descend en un $\bar{\mathbf{Q}}_I$ -faisceau lisse, irréductible, $\tilde{\mathcal{E}}_L^0$, sur $\tilde{G}(L, \Sigma_L)^0$. On peut alors former le $\bar{\mathbf{Q}}_I$ -faisceau lisse, semi-simple

$$(\pi^0)_* \tilde{\mathcal{E}}_L^0$$

sur $G(L, \Sigma_L)^0$; il est clairement G -équivariant (pour l'action de G sur $G(L, \Sigma_L)^0$ par conjugaison) et sa $\bar{\mathbf{Q}}_I$ -algèbre des endomorphismes, notée $\mathcal{A}(L, \Sigma_L, \mathcal{E}_L)$, est isomorphe à la $\bar{\mathbf{Q}}_I$ -algèbre du groupe fini

$$W(L, \Sigma_L, \mathcal{E}_L) = \left\{ nL \in W(L, \Sigma_L) \mid (\text{ad}(n)\Sigma_L)^* \mathcal{E}_L = \mathcal{E}_L \right\},$$

tordue par un certain 2-cocycle de $W(L, \Sigma_L, \mathcal{E}_L)$ à valeurs dans $\bar{\mathbf{Q}}_I^\times$.

Si $j : G(L, \Sigma_L)^0 \hookrightarrow G$ est l'inclusion, on pose

$$(3.2.1) \quad K(L, \Sigma_L, \mathcal{E}_L) = j_{!*}(\pi^0)_* \tilde{\mathcal{E}}_L^0 \left[\dim G(L, \Sigma_L)^0 \right];$$

c'est un $\bar{\mathbf{Q}}_I$ -faisceau pervers sur G , semi-simple et G -équivariant, supporté par l'adhérence $G(L, \Sigma_L)$ de $G(L, \Sigma_L)^0$ dans G , et sa $\bar{\mathbf{Q}}_I$ -algèbre des endomorphismes s'identifie naturellement à $\mathcal{A}(L, \Sigma_L, \mathcal{E}_L)$.

Pour $L = T$ un tore maximal, $\Sigma_L = T$ et $\mathcal{E}_L = \bar{\mathbf{Q}}_{I, T}$, on a $G(L, \Sigma_L)^0 = G_{\text{rss}}$, $\pi^0 = \pi_{\text{rss}}$ et donc

$$K(L, \Sigma_L, \mathcal{E}_L) = K_T^{\bar{\mathbf{Q}}_I}$$

avec les notations de 1.1.

3.3. Une autre description de $K(L, \Sigma_L, \mathcal{E}_L)$

Si l'on choisit un sous-groupe parabolique P de G admettant L comme facteur de Levi, on peut considérer le morphisme

$$\begin{array}{c} \tilde{G}(P, \bar{\Sigma}_L) = \{(g, hP) \in G \times (G/P) \mid h^{-1}g h \in \bar{\Sigma}_L U_P\} \\ \pi \downarrow \\ G \end{array}$$

où $\bar{\Sigma}_L$ est l'adhérence de Σ_L dans L et où

$$\pi(g, hP) = g.$$

Le groupe algébrique $Z_L^\circ \times L$ agit sur L par

$$(z, l) \cdot l' = z l l' l^{-1}$$

et $\bar{\Sigma}_L$ est réunion d'un nombre fini d'orbites, dont une ouverte dense Σ_L , pour cette action. On note $(\bar{\Sigma}_L^{(i)})_{i \in I}$ ces orbites et $i_0 \in I$ l'indice correspondant à Σ_L . Pour chaque $i \in I$,

$$\tilde{G}(P, \bar{\Sigma}_L^{(i)}) = \{(g, hP) \in G \times (G/P) \mid h^{-1}g h \in \bar{\Sigma}_L^{(i)} U_P\}$$

est un schéma irréductible, lisse sur k , de dimension

$$\dim G - \dim L + \dim \bar{\Sigma}_L^{(i)}$$

et localement fermé dans $\tilde{G}(P, \bar{\Sigma}_L)$; de plus $\tilde{G}(P, \bar{\Sigma}_L)$ est la réunion disjointe des $\tilde{G}(P, \bar{\Sigma}_L^{(i)})$ ($i \in I$) (ensemblément).

Lemme 3.3.1. i) Le morphisme π est propre, d'image $G(L, \Sigma_L) \subset G$ et le morphisme

$$\tilde{G}(L, \Sigma_L)^0 \hookrightarrow \tilde{G}(P, \bar{\Sigma}_L), (g, hL) \mapsto (g, hP),$$

est un isomorphisme de $\tilde{G}(L, \Sigma_L)^0$ sur l'image inverse par π de $G(L, \Sigma_L)^0$ (en particulier cette image inverse n'est autre que

$$\tilde{G}(P, \Sigma_L)^0 = \{(g, hP) \in G \times (G/P) \mid h^{-1}g h \in \Sigma_{L, \text{reg}} U_P\}.$$

ii) Pour chaque $i \in I$, on a

$$\dim(Z_i) \leq \dim \tilde{G}(P, \bar{\Sigma}_L^{(i)})$$

où on a posé

$$Z_i = \tilde{G}\left(P, \bar{\Sigma}_L^{(i)}\right) \times_{\pi, G, \pi} \tilde{G}\left(P, \bar{\Sigma}_L^{(i)}\right);$$

de plus, chaque composante irréductible de Z_{i_0} de dimension égale à $\dim \tilde{G}(P, \Sigma^{(i_0)})$ domine $G(L, \Sigma_L) \subset G$ par la projection canonique $Z_{i_0} \rightarrow G$. ■

La preuve de ce lemme est similaire à celle de 1.2.1 mais beaucoup plus complexe. L'hypothèse de cuspidalité de la paire $(\Sigma_L, \mathcal{E}_L)$ n'intervient dans ce lemme que par sa conséquence : Σ_L est isolée.

Si l'on identifie $\tilde{G}(P, \Sigma_L)^0$ à $\tilde{G}(L, \Sigma_L)^0$, on voit que l'on dispose sur $\tilde{G}(P, \Sigma_L)^0$ d'un $\bar{\mathbf{Q}}_l$ -faisceau lisse irréductible $\tilde{\mathcal{E}}_L^0$. En fait, utilisant le L -torseur

$$\begin{array}{c} \dot{\tilde{G}}(P, \Sigma_L) = \left\{ (g, h U_P) \in G \times (G/U_P) \mid h^{-1} g h \in \Sigma_L U_P \right\} \\ \alpha \downarrow \\ \tilde{G}(P, \Sigma_L) = \tilde{G}\left(P, \bar{\Sigma}_L^{(i)}\right) \end{array}$$

et la projection

$$\rho : \dot{\tilde{G}}(P, \Sigma_L) \rightarrow \Sigma_L$$

où

$$\alpha(g, h U_P) = (g, h P)$$

$$\rho(g, h U_P) = \left(\text{pr}_L(h^{-1} g h) \right)$$

($\text{pr}_L : P \rightarrow P/U_P = L$ est la projection canonique), il est facile d'étendre $\tilde{\mathcal{E}}_L^0$ en un $\bar{\mathbf{Q}}_l$ -faisceau lisse irréductible $\tilde{\mathcal{E}}_L$ sur $\tilde{G}(P, \Sigma_L)$. On pose alors

$$(3.3.2) \quad \tilde{K}(P, \Sigma_L, \mathcal{E}_L) = \tilde{j}_{!*} \tilde{\mathcal{E}}_L[\dim \tilde{G}(P, \Sigma_L)]$$

où $\tilde{j} : \tilde{G}(P, \Sigma_L) \hookrightarrow \tilde{G}(P, \bar{\Sigma}_L)$ est l'inclusion.

Il résulte facilement de la caractérisation du prolongement intermédiaire, de 3.3.1 et du théorème de dualité que

THÉORÈME 3.3.3. *Pour tout choix de P comme ci-dessus, on a un isomorphisme canonique de $\bar{\mathbf{Q}}_l$ -faisceaux pervers sur G ,*

$$K(L, \Sigma_L, \mathcal{E}_L) \cong R \pi_* \tilde{K}(P, \Sigma_L, \mathcal{E}_L)$$

pour toute paire cuspidale $(\Sigma_L, \mathcal{E}_L)$ pour L . ■

Remarque 3.3.4. En fait, le même énoncé avec la même démonstration vaut pour toute paire $(\Sigma_L, \mathcal{E}_L)$ comme en 3.1 avec Σ_L isolée.

3.4. Correspondance de Springer généralisée

Notons $\mathcal{N}_G$ l'ensemble des paires $(C, \mathcal{F})$ où C est une classe de conjugaison unipotente de G et où $\mathcal{F}$ est une classe d'isomorphie de $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -faisceau lisse sur C , irréductible et G -équivalent (pour l'action de G sur C par conjugaison). $\mathcal{N}_G$ est encore l'ensemble des classes de G -conjugaison de paires (u, χ) où u est un élément unipotent de G et χ une classe d'isomorphie de représentation irréductible sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$ du groupe fini $A_G(u) = Z_G(u)/Z_G(u)^0$.

Notons d'autre part $\mathcal{M}_G$ l'ensemble des classes de G -conjugaison de triples $(L, \Sigma_L, \mathcal{E}_L)$ où $L \subset G$ est un sous-groupe réductif qui est un facteur de Levi d'un sous-groupe parabolique (non précisé) de G et où $(\Sigma_L, \mathcal{E}_L)$ est une paire cuspidale *unipotente*, i.e. de la forme

$$\left(Z_L^0 \cdot C_L, \overline{\mathbb{Q}}_{l, Z_L^0} \boxtimes \mathcal{F}_L \right)$$

où C_L est une classe de conjugaison unipotente dans L et où $\mathcal{F}_L$ est une classe d'isomorphie de $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -faisceau lisse sur C_L , irréductible et L -équivalent (pour l'action de L sur C_L par conjugaison).

Lemme 3.4.1 (Bohro, MacPherson, Lusztig). *Pour chaque $(L, \Sigma_L, \mathcal{E}_L) \in \mathcal{M}_G$, la restriction de $K(L, \Sigma_L, \mathcal{E}_L)[- \dim Z_L^0]$ au fermé*

$$G(L, \Sigma_L)_{\text{unip}} \subset G(L, \Sigma_L)$$

des éléments unipotents de $G(L, \Sigma_L)$ est aussi un $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -faisceau pervers sur $G(L, \Sigma_L)_{\text{unip}}$, semi-simple (et G -équivalent).

Preuve (esquisse). On fixe un sous-groupe parabolique P de G admettant L comme facteur de Levi. Compte tenu de 3.3.3 et du théorème de dualité, on est ramené à démontrer que, avec les notations de 3.3.1, on a

$$\dim Z_{i, \text{unip}} \leq \dim \left(\tilde{G} \left(P, \overline{\Sigma}_L^{(i)} \right) \right)_{\text{unip}}$$

pour tout $i \in I$, où $(\)_{\text{unip}}$ désigne la restriction à $G(L, \Sigma_L)_{\text{unip}}$. ■

Si $\mathcal{A}(L, \Sigma_L, \mathcal{E}_L)^\wedge$ désigne l'ensemble des classes d'isomorphie de $\mathcal{A}(L, \Sigma_L, \mathcal{E}_L)$ -modules simples, on a une décomposition canonique

$$(3.4.2) \quad K(L, \Sigma_L, \mathcal{E}_L) = \bigoplus_{\rho \in \mathcal{A}(L, \Sigma_L, \mathcal{E}_L)^\wedge} \rho \otimes K(L, \Sigma_L, \mathcal{E}_L)_\rho,$$

où on a posé

$$K(L, \Sigma_L, \mathcal{E}_L)_\rho = \text{Hom}_{\mathcal{A}(L, \Sigma_L, \mathcal{E}_L)} \left(\rho, K(L, \Sigma_L, \mathcal{E}_L) \right)$$

pour tout $(L, \Sigma_L, \mathcal{E}_L) \in \mathcal{M}_G$.

THÉORÈME 3.4.3.- i) Pour chaque $(L, \Sigma_L, \mathcal{E}_L) \in \mathcal{M}_G$ et chaque $\rho \in \mathcal{A}(L, \Sigma_L, \mathcal{E}_L)^\wedge$, la restriction de

$$K(L, \Sigma_L, \mathcal{E}_L)_\rho \left[-\dim Z_L^0 \right]$$

à $G(L, \Sigma_L)_{\text{unip}}$ est un $\overline{\mathbf{Q}}_l$ -faisceau pervers irréductible (et G -équivariant) et donc de la forme

$$j_{C!} \star \mathcal{F}[\dim C]$$

pour une unique paire $(C, \mathcal{F}) \in \mathcal{N}_G$ avec $C \subset G(L, \Sigma_L)_{\text{unip}}$ (on a noté $j_C : C \hookrightarrow G(L, \Sigma_L)_{\text{unip}}$ l'inclusion); on notera $S(L, \Sigma_L, \mathcal{E}_L, \rho)$ cette paire $(C, \mathcal{F}) \in \mathcal{N}_G$.

ii) L'application

$$S : \bigsqcup_{(L, \Sigma_L, \mathcal{E}_L) \in \mathcal{M}_G} \mathcal{A}(L, \Sigma_L, \mathcal{E}_L)^\wedge \rightarrow \mathcal{N}_G$$

définie en i) est une bijection. ■

La bijection S est appelée *correspondance de Springer généralisée*. Pour $L = T$ un tore maximal, on a nécessairement $\Sigma_L = \overline{\mathbf{Q}}_{l, T}$; alors $\mathcal{A}(L, \Sigma_L, \mathcal{E}_L) = \overline{\mathbf{Q}}_l[W]$ où W est le groupe de Weyl de (G, T) et la restriction de S à $\overline{\mathbf{Q}}_l[W]^\wedge$, qui est maintenant une injection de $\overline{\mathbf{Q}}_l[W]^\wedge$ dans $\mathcal{N}_G$, coïncide (à une normalisation près) avec l'injection définie par Springer.

Le théorème 3.4.3 est renforcé par :

THÉORÈME 3.4.4.- Soit $(L, \Sigma_L, \mathcal{E}_L) \in \mathcal{M}_G$.

i) Le groupe fini $N_G(L)/L$ est un groupe de Coxeter et

$$W(L, \Sigma_L, \mathcal{E}_L) = W(L, \Sigma_L) = N_G(L)/L.$$

ii) $\mathcal{A}(L, \Sigma_L, \mathcal{E}_L)$ est canoniquement isomorphe à la $\overline{\mathbf{Q}}_l$ -algèbre du groupe fini $W(L, \Sigma_L, \mathcal{E}_L) = N_G(L)/L$ (non tordue). Cet isomorphisme est normalisé de la façon suivante : si on note 1 (resp. sgn) le caractère trivial (resp. signature) du groupe de Coxeter $N_G(L)/L$, C_1 (resp. C_{sgn}) est l'unique G -orbite unipotente telle que $C_1 \subset C_L \cup_P$ soit dense dans $C_L \cup_P$ pour tout parabolique P admettant L comme facteur de Levi (resp. telle que C_{sgn} contienne C_L). ■

La preuve de 3.4.3 et 3.4.4 est trop longue et trop complexe pour être reproduite ici.

3.5. Liste des paires cuspidales unipotentes

Une des principales applications de la correspondance de Springer généralisée est le calcul du nombre N_G^0 des paires cuspidales unipotentes

$$(\Sigma, \mathcal{E}) = \left(Z_G^0 C, \overline{Q}_{i, Z_G^0} \boxtimes \mathcal{F} \right)$$

pour G . Des réductions faciles ramènent le calcul de N_G^0 pour G arbitraire au cas où G est presque simple et simplement connexe (de sorte que $(\Sigma, \mathcal{E}) = (C, \mathcal{F})$). Alors par récurrence sur le rang semi-simple de G , on obtient :

THÉORÈME 3.5.1.- Soit G un groupe presque simple et simplement connexe sur k . Notons p la caractéristique de k , φ l'indicateur d'Euler, χ_Δ et $\chi_\square$ les fonctions caractéristiques des nombres triangulaires et des carrés respectivement, i.e. les fonctions de l'entier $n \geq 1$ définies par

$$\chi_\Delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = \frac{j(j+1)}{2} \text{ pour un entier } j \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\chi_\square(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = j^2 \text{ pour un entier } j \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} . \end{cases}$$

Alors :

(A) si $G = \mathrm{SL}_{n,k}$, on a

$$N_G^0 = \begin{cases} \varphi(n) & \text{si } (n,p) = 1 \text{ ou } p = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(B ou D) si $G = \mathrm{Spin}_{n,k}$ et $p \neq 2$, on a

$$N_G^0 = \chi_\Delta(n) + \chi_\square(n);$$

(C) si $G = \mathrm{Sp}_{2n,k}$ et $p \neq 2$, on a

$$N_G^0 = \chi_\Delta(n);$$

(E₆) si G est de type E_6 et $p \neq 2, 3$, on a

$$N_G^0 = 2;$$

(E₇) si G est de type E_7 et $p \neq 2, 3$, on a

$$N_G^0 = 1;$$

(E₈) si G est de type E_8 et $p \neq 2, 3, 5$, on a

$$N_G^0 = 1;$$

(F₄) si G est de type F_4 et $p \neq 2, 3$, on a

$$N_G^0 = 1;$$

(G_2) si G est de type G_2 et $p \neq 2, 3$, on a

$$N_G^0 = 1. \blacksquare$$

Remarques 3.5.2. Il est aussi possible de calculer N_G^0 pour les mauvaises caractéristiques p quel que soit le type, de décrire explicitement les paires unipotentes cuspidales et de décrire explicitement la correspondance de Springer généralisée.

3.6. Commentaires bibliographiques

La notion de paire cuspidale est introduite dans [Lu 2] § 2. On trouvera une preuve de 3.1.1 dans [Lu 2] (1.2). La proposition 3.1.3 n'est autre que [Lu 2] (2.7).

Les $\overline{Q}_f$ -faisceaux pervers $K(L, \Sigma_L, \mathcal{E}_L)$ sont définis dans [Lu 2] (4.1), alors que les $G(L, \Sigma_L)$ sont introduits dans [Lu 2] (3.1). Le théorème 3.3.3 et sa démonstration sont reproduits de [Lu 2] (4.5.).

Le lemme 3.4.1 n'est autre que [Lu 2] (6.6.1) (pour $a = a_0$ avec les notations de *loc. cit.*) (voir aussi [Bo-Ma]). Quant aux théorèmes 3.4.3 et 3.4.4, ils sont extraits de [Lu 2] (6.5) et (9.2), (9.5).

Le théorème 3.5.1 est une version affaiblie des résultats de [Lu 2] § 10, 11, 12, 13, 14 et 15. On attire aussi l'attention du lecteur sur [Lu-Sp] et [Spa] pour une description explicite de la correspondance de Springer généralisée.

Pour la correspondance de Springer elle-même, on renvoie à [Spr 1], [Spr 3] et [Lu 1].

BIBLIOGRAPHIE

Travaux de Lusztig sur les faisceaux caractères

- [Lu 1] G. LUSZTIG - *Green polynomials and singularities of unipotent classes*, Advances in Math. 42 (1981), pp. 169-178.
- [Lu 2] G. LUSZTIG - *Intersection cohomology complexes on a reductive group*, Inventiones Math. 75 (1984), pp. 205-272.
- [Lu 3] G. LUSZTIG - *Character sheaves I*, Advances in Math. 56 (1985), pp. 193-237.
- [Lu 4] G. LUSZTIG - *Character sheaves II*, Advances in Math. 57 (1985), pp. 226-265.
- [Lu 5] G. LUSZTIG - *Character sheaves III*, Advances in Math. 57 (1985), pp. 266-315.
- [Lu 6] G. LUSZTIG - *Character sheaves IV*, Advances in Math. 59 (1986), pp. 1-63.
- [Lu 7] G. LUSZTIG - *Character sheaves V*, Advances in Math. 61 (1986), pp. 103-155.
- [Lu 8] G. LUSZTIG - *On the character values of finite Chevalley groups at unipotent elements*, Journal of Algebra 104 (1986), pp. 146-194.
- [Lu 9] G. LUSZTIG - *Introduction to character sheaves*, Proceedings of Symposia in Pure Math. 47 (1987), pp. 165-179.
- [Lu 10] G. LUSZTIG - *Green functions and character sheaves*, preprint (1988).

Autres travaux de Lusztig liés au contenu de cet exposé

- [De-Lu] P. DELIGNE and G. LUSZTIG - *Representations of reductive groups over finite fields*, Annals of Math. 103 (1976), pp. 103-161.
- [Lu 11] G. LUSZTIG - *Characters of reductive groups over a finite field*, Annals of Math. Studies, Princeton University Press (1984).
- [Lu-Sp] G. LUSZTIG and N. SPALTENSTEIN - *On the generalized Springer correspondence for classical groups*, Advanced Studies in Pure Math. 6 (1985) pp. 289-316.

Applications dues à Lusztig de sa théorie des faisceaux caractères

- [Lu 12] G. LUSZTIG - *Fourier transforms on a semi-simple Lie algebra over F_q* in "Algebraic groups - Utrecht 1986", Lecture Notes in Math. 1271, Springer-Verlag (1987), pp. 177-188.
- [Lu 13] G. LUSZTIG - *Cuspidal local systems and graded Hecke algebras*, I, Publications Math. de l'IHES 67 (1988), pp. 145-202.
- [Lu 14] G. LUSZTIG - *Cells in affine Weyl groups*, IV, preprint.

Autres références

- [BBD] A.A. BEILINSON, J. BERNSTEIN et P. DELIGNE - *Faisceaux pervers* in "Analyse et topologie sur les espaces singuliers (I)", Astérisque 100 (1982).
- [Bo-Ma] W. BOHRO and R. MACPHERSON - *Partial resolutions of nilpotent varieties* in "Analyse et topologie sur les espaces singuliers (II-III)", Astérisque 101-102 (1983), pp. 23-74.
- [Ca] R.W. CARTER - *Finite groups of Lie type, conjugacy classes and complex characters*, Wiley (1985).
- [Gi] V. GINZBURG - *Admissible modules on a symmetric space*, preprint, Moscou (1988).
- [Gr] A. GROTHENDIECK - *Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions L*, Séminaire Bourbaki 279, Benjamin (1966).
- [Ha] B. HAASTERT - *Die quasiaffinität der Deligne-Lusztig Varietäten*, Journal of Algebra 102 (1986), pp. 186-193.
- [Ma-Sp] J.G. MARS and T.A. SPRINGER - *Character sheaves*, preprint, Utrecht (1988).
- [Mi-Vi] I. MIRKOVIC and K. VILONEN - *Characteristic varieties of character sheaves*, Inventiones Math. 93 (1988), pp. 405-418.
- [Spa] N. SPALTENSTEIN - *On the generalized Springer correspondence for exceptional groups*, Advanced Studies in Pure Math. 6 (1985), pp. 317-338.
- [Spr 1] T.A. SPRINGER - *Trigonometric sums, Green functions of finite groups and representations of Weyl groups*, Inventiones Math. 36 (1976), pp. 173-207.
- [Spr 2] T.A. SPRINGER - *Linear algebraic groups*, Birkhäuser (1981).

- [Spr 3] T.A. SPRINGER - *Quelques applications de la cohomologie d'intersection*, Séminaire Bourbaki, exposé n° 589, Astérisque 92-93 (1982), pp. 249-273.

REMERCIEMENTS

Je remercie J.-L. Waldspurger pour son aide durant la préparation de cet exposé.

Gérard LAUMON
Université Paris-Sud
Département de Mathématiques
URA D.0752 du CNRS
Bâtiment 425
F-91405 ORSAY CEDEX