

Astérisque

JEAN CERF

Suppression des singularités de codimension plus grande que 1 dans les familles de fonctions différentiables réelles

Astérisque, tome 121-122 (1985), Séminaire Bourbaki, exp. n° 627, p. 247-261

http://www.numdam.org/item?id=SB_1983-1984__26__247_0

© Société mathématique de France, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUPPRESSION DES SINGULARITÉS DE CODIMENSION
PLUS GRANDE QUE 1 DANS LES FAMILLES DE FONCTIONS
DIFFÉRENTIABLES RÉELLES

[d'après Kiyoshi Igusa]

par Jean CERF

Introduction.

L'étude des groupes d'homotopie des groupes de difféomorphismes des variétés compactes conduit aussitôt à introduire, pour toute variété M (compacte, C^∞) le groupe $\mathcal{C}(M)$ des "concordances" ou "pseudo-isotopies" de M . $\mathcal{C}$ est par définition le sous-groupe de $\text{Diff}(M \times [0, 1])$ formé des difféomorphismes laissant fixes $M \times \{0\}$ et $\partial M \times [0, 1]$. Des relations entre $\pi_i(\mathcal{C}(M))$ et la K -théorie algébrique sont connues ou conjecturées (cf. par exemple l'exposé de Loday [8]). Mais la méthode dite "fonctionnelle", introduite dans [2] pour montrer que $\mathcal{C}(M)$ est connexe lorsque M est simplement connexe et de dimension assez grande, et par laquelle Hatcher et Wagoner, Volodine et Igusa (références dans [8]) ont réussi à calculer le π_0 et le π_1 de $\mathcal{C}(M)$ en termes de K -groupes, semblait, dans le cas des groupes d'homotopie supérieurs, devoir se heurter à d'inextricables difficultés liées aux singularités de grande codimension. $\mathcal{C}$ est cet obstacle que K. Igusa a surmonté dans [5].

La méthode fonctionnelle est fondée sur deux remarques. La première, c'est que $\mathcal{C}(M)$ a le type d'homotopie de l'espace $\mathcal{E}(M)$ des fonctions $M \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ qui

- (1) coïncident sur le bord avec la 2e projection ;
- (2) n'ont aucune singularité.

La seconde remarque est que l'espace $\mathcal{F}(M)$ défini par la seule condition (1) est contractile.

Donc, pour tout i : $\pi_i(\mathcal{C}) \simeq \pi_i(\mathcal{E}) \simeq \pi_{i+1}(\mathcal{F}, \mathcal{E})$.

La preuve de $\pi_0(\mathcal{C}(M)) = 0$ (pour $\pi_1(M) = 1$ et $\dim M \leq 5$) consiste par exemple à montrer que tout lacet relatif (f_t) de $\mathcal{F} \bmod \mathcal{E}$ peut être poussé dans $\mathcal{E}$ (avec extrémités fixes) ; en d'autres termes : on peut supprimer par une suite de déformations toutes les singularités des f_t .

K. Igusa démontre dans [5] le résultat suivant :

THÉORÈME. Soit M une variété compacte. Soit $\mathcal{H}(M)$ l'espace des fonctions $M \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ vérifiant la condition (1) ci-dessus et

(2') f n'a pas de singularité de codimension ≥ 2 . [En d'autres termes, les singularités de f sont soit de codimension zéro, i.e. du type de Morse, soit de codimension un, i.e. du type naissance-mort].

Alors, l'application naturelle :

$$\pi_k(\mathcal{H}(M), \mathcal{E}(M)) \rightarrow \pi_{k-1}(\mathcal{E}(M))$$

est surjective dès que $k \leq \dim M + 1$.

Il résulte de ce théorème que tout élément de $\pi_{k-1}(\mathcal{C}(M))$ peut être représenté par une famille à k paramètres de fonctions réelles n'ayant pas de singularité de codimension ≥ 2 . Igusa a commencé à développer les conséquences de ce fait dans [6].

La méthode utilisée par Igusa dans [5] est la suivante. Il généralise un peu le problème en considérant une variété compacte N de dimension $(m+1)$, sur laquelle il définit les espaces $\mathcal{F}$ et $\mathcal{H}$ analogues à ceux définis ci-dessus (mais pas l'espace $\mathcal{E}$, qui serait vide sauf dans le cas particulier où $N = M \times [0, 1]$). Par la méthode de la chirurgie sur les strates de Thom-Boardman, il démontre le résultat suivant (voir au §4 l'énoncé précis du théorème principal) : pour $k \leq m+1$, l'obstruction à pousser dans $\mathcal{H}$ un générateur de $\pi_k(\mathcal{F}, \mathcal{H})$ se trouve dans le π_k relatif des espaces de sections des espaces de jets correspondant respectivement à $\mathcal{F}$ et $\mathcal{H}$. Il est facile ensuite de vérifier la nullité de cette obstruction dans le cas particulier où $N = M \times [0, 1]$.

Au §1, on rappelle la définition et les principales propriétés de la stratification de Thom-Boardman des espaces de jets (dans le cas des fonctions numériques réelles).

Au §2, on donne deux lemmes de déformation sur lesquels est fondée la méthode de chirurgie sur les strates de Thom-Boardman.

Au §3, on montre comment supprimer par chirurgie une sphère de singularités ayant toutes le même germe : c'est une version de la "hole punching construction" d'Igusa.

Enfin, au §4 on donne une esquisse de la démonstration du théorème principal, et on déduit de ce théorème le corollaire relatif aux pseudo-isotopies.

§1. La stratification de Thom-Boardman (cas des fonctions numériques réelles).

Dans [11], Thom stratifie le lieu singulier d'une application différentiable "générique" $f : V \rightarrow W$ d'une variété dans une autre. Il définit d'abord $\Sigma^i(f)$ comme

l'ensemble des points de V où le corang de f est i . Pour un ouvert dense de l'espace des applications de V dans W , $\Sigma^i(f)$ est une sous-variété de V . On peut alors définir $\Sigma^{i,j}(f)$ en ne considérant que les restrictions de f à $\Sigma^i(f)$; ce sera une sous-variété pour un ouvert dense de fonctions contenu dans le précédent, et ainsi de suite. L'idée qu'il existe une stratification au niveau des espaces de jets telle que $\Sigma^i(f)$, $\Sigma^{i,j}(f)$, etc., en soient l'image réciproque pour f "générique" est explicite dans le cours de Thom à Bonn rédigé par H. Levine [7]. La définition générale des sous-espaces $\Sigma^{i_1, \dots, i_k}$ des espaces de jets, la démonstration du fait que ce sont des sous-variétés et le calcul de leur codimension sont dus à Boardman [1]. On va suivre la présentation de Mather [9] dont le point de vue s'inspire en partie de celui de Morin dans sa thèse. On se place dans le cas réel qui est celui qu'on utilisera dans les paragraphes suivants.

On rappelle que l'espace des k -jets $J^k(n)$ ($k = 1, 2, \dots, \infty$) est par définition le quotient de l'espace des germes d'applications $C^\infty : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ par l'idéal des germes $(k+1)$ -plats. Soit $A_n = \mathbb{R}[[x_1, \dots, x_n]]$ l'algèbre des séries formelles à n variables sur $\mathbb{R}$. $J^\infty(n)$ s'identifie à l'idéal maximal $\mathfrak{M}_n$ de A_n et $J^k(n)$ à $\mathfrak{M}_n / \mathfrak{M}_n^{k+1}$. On note π_k la projection de $J^\infty(n)$ sur $J^k(n)$ et $\pi_{k,\ell}$ (pour $\ell \geq k$) la projection de $J^\ell(n)$ sur $J^k(n)$.

Les dérivations de A_n sont les applications linéaires $D : A_n \rightarrow A_n$ qui sont de la forme :

$$u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + u_n \frac{\partial}{\partial x_n} \quad (u_1, \dots, u_n \in A_n) \quad .$$

Soit $\mathcal{J}$ un idéal de A_n , s un entier > 0 . On appelle extension jacobienne d'ordre s de $\mathcal{J}$ et on note $\Delta_s \mathcal{J}$ l'idéal $\mathcal{J} + \mathcal{J}'_s$, où $\mathcal{J}'_s$ est l'idéal engendré par tous les déterminants $|D_i f_j|_{\substack{i=1, \dots, s \\ j=1, \dots, s}}$ où les D_i sont des dérivations de A_n et les f_j des éléments de $\mathcal{J}$.

Soit $\mathcal{J}$ un idéal de A_n supposé propre (i.e. $\mathcal{J} \neq A_n$). On appelle rang de $\mathcal{J}$ la dimension de $(\mathcal{J} + \mathfrak{M}_n^2) / \mathfrak{M}_n^2$; en d'autres termes, c'est la dimension du sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^n)^*$ engendré par les parties linéaires d'un système (quelconque) de générateurs de $\mathcal{J}$.

On constate aussitôt que si $\mathcal{J}$ est de rang r , seules sont propres les extensions jacobienes $\Delta_s(\mathcal{J})$ telles que $s > r$.

L'opérateur δ . Soit $\mathcal{J}$ un idéal propre de A_n . Par définition :

$$\delta \mathcal{J} = \Delta_{r+1} \mathcal{J}, \quad \text{avec } r = \text{rang } \mathcal{J} \quad .$$

D'après la remarque qui précède, $\delta \mathcal{J}$ est encore un idéal propre; on note

$$s(\delta \mathcal{I}) = \delta^2 \mathcal{I}, \text{ etc, et } \mathcal{I} = \delta^0 \mathcal{I}.$$

On appelle symbole de Boardman de $\mathcal{I}$ et on note $I(\mathcal{I})$ la suite infinie non croissante d'entiers $(i_1, \dots, i_j, \dots)$ où :

$$i_j = n - \text{rang } \delta^{j-1} \mathcal{I} \quad (1 \leq j < \infty).$$

Il est clair que $I(\delta \mathcal{I})$ est le "shift" $(i_2, \dots, i_{j-1}, \dots)$ de $I(\mathcal{I})$.

Considérons maintenant $\mathcal{I}$ (idéal propre de A_n) comme idéal de $J^\infty(n)$. Le symbole du saturé de $\mathcal{I}$ pour la projection $\pi_k : J^\infty(n) \rightarrow J^k(n)$ s'obtient en remplaçant $i_{k+1}, i_{k+2}, \dots$ par zéro.

Soit $\mathcal{I}'$ un idéal de $J^k(n)$; le symbole de Boardman de $\mathcal{I}'$ est par définition celui de $\pi_k^{-1} \mathcal{I}'$ (ou de tout idéal $\mathcal{I}$ de $J^\infty(n)$ tel que $\pi_k \mathcal{I} = \mathcal{I}'$) tronqué au-delà de i_k ; c'est donc une suite (non croissante) $i_1, \dots, i_k$. Si $\mathcal{I}''$ est un idéal de $J^\ell(n)$ ($\ell \geq k$) tel que $\pi_{k,\ell} \mathcal{I}'' = \mathcal{I}'$, alors $I(\mathcal{I}')$ est aussi $I(\mathcal{I}'')$ tronqué au-delà de i_k .

Autre manière (équivalente) de définir le symbole d'un idéal $\mathcal{I}'$ de $J^k(n)$: on constate que pour tout idéal $\mathcal{I}$ de $J^\infty(n)$, saturé pour π_k , $\delta \mathcal{I}$ est saturé pour π_{k-1} , et on pose :

$$\delta \mathcal{I}' = \pi_{k-1} s(\pi_k^{-1} \mathcal{I}').$$

La suite $\mathcal{I}'$, $\delta \mathcal{I}'$, ... s'arrête à $\delta^{k-1} \mathcal{I}'$; le symbole est la suite $i_1, \dots, i_k$, où

$$i_j = n - \text{rang } \delta^{j-1} \mathcal{I}', \quad 1 \leq j \leq k.$$

Symbole d'un jet. Strates de Thom-Boardman dans $J^k(n)$ et dans $J^\infty(n)$.

Soit $z \in J^k(n)$; le symbole de Boardman de z est par définition celui de l'idéal $\mathcal{I}(z)$ de $J^k(n)$ engendré par z ; c'est une suite non croissante de k entiers. Inversement, pour toute telle suite $I = (i_1, \dots, i_k)$ la strate Σ^I de $J^k(n)$ est par définition l'ensemble des z dont le symbole est I . Ainsi $J^k(n)$ est réunion disjointe des Σ^I . Si $z \in J^k(n)$ est non singulier, on a : $i_1 = i_2 = \dots = i_k = n-1$. Ce cas est sans intérêt ; on suppose désormais z singulier ; dans ce cas, $i_1 = n$. Inversement, pour toute suite I non croissante d'entiers ≥ 0 telle que $i_1 = n$, Σ^I est non vide, comme le montre l'exemple :

$$x_1^2 + \dots + x_{n-i_2}^2 + x_{n-i_2+1}^3 + \dots + x_{n-i_3}^3 + \dots + x_{n-i_{k-1}+1}^k + \dots + x_{n-i_k}^k.$$

Exercice. $\pm x_1^2 \pm \dots \pm x_n^2 \in \Sigma^{n,0}$; $\pm x_1^2 \pm \dots \pm x_{n-1}^2 + x_n^k \in \Sigma^{n,1,\dots,1,0}$;
 $x_1^2 + x_1^2 x_2 + x_2^3 \in \Sigma^{2,1,0}$; $x_1^2 + x_1 x_2^2 \in \Sigma^{2,1,1}$. $\square$

Soit Σ^I une strate de $J^k(n)$ et soit $\ell > k$; alors, $\pi_{k,\ell}^{-1}(\Sigma^I)$ est réunion de toutes les strates $\Sigma^{I'}$ telles que I soit le tronqué de I' ; il y a une seule telle

strate et par conséquent $\Sigma^{I'} = \pi_{k,e}^{-1}(\Sigma^I)$ si et seulement si $i_k = 0$. Dans ce dernier cas, on dit que Σ^I est une strate complète.

Un jet singulier $z \in J^\infty(n)$ est dit de Thom-Boardman si son symbole n'a qu'un nombre fini de termes $\neq 0$. L'ensemble de ces jets est la réunion des images réciproques des strates complètes des $J^k(n)$, k fini ≥ 2 . Soit Σ^I une telle strate (i.e. $I = (i_1, \dots, i_k)$, $n - i_1 = i_k = 0$), on note $\pi_k^{-1}(\Sigma^I) = \Sigma_\infty^I$. Il est clair que $\Sigma_\infty^I = \Sigma_\infty^{I,0} = \dots$. Si $i_{k-1} \neq 0$, on dit que k est le degré de la strate Σ_∞^I .

Quelques propriétés de la stratification de Thom-Boardman.

1) Soit k fini ≥ 2 ; I, I' désignent des suites de Boardman de longueur k , et $>$ l'ordre lexicographique sur l'ensemble de ces suites :

- a) $\bigcup_{I' > I} \Sigma^{I'}$ est fermé dans $J^k(n)$;
- b) Σ^I est fermé dans l'ouvert $J^k(n) - \bigcup_{I' > I} \Sigma^{I'}$;
- c) Σ^I est une sous-variété lisse (et sans bord) de $J^k(n)$.

Les points a) et b) sont immédiats mais très importants : ils permettent dans la suite de supprimer des singularités par récurrence sur l'ordre lexicographique décroissant de leurs symboles, et ceci en dépit du fait que la stratification de Thom-Boardman ne satisfait pas à l'axiome de dimension. (Un exemple dû essentiellement à Whitney montre qu'au voisinage d'un point $z \in \Sigma^I$ peuvent se trouver des points d'une strate $\Sigma^{I'}$ de codimension dans $J^k(n)$ plus grande que celle de Σ^I ; cf. [1], p. 48.)

Le point c) (dû à Boardman) est loin d'être évident ; on trouvera en appendice à ce paragraphe un bref aperçu de sa démonstration suivant Mather [9].

2) Relèvement d'une strate incomplète.

Soit Σ^I une strate de $J^k(n)$. Pour tout $z_0 \in \Sigma^I$, l'idéal $\delta^k(z_0)$ est engendré par $\Phi_1(z_0), \dots, \Phi_q(z_0)$, où $\Phi_1, \dots, \Phi_q$ sont des opérateurs différentiels. Si z appartient à une strate $\Sigma^{I'}$, avec $I' < I$ (pour l'ordre lexicographique), l'un au moins des $\Phi_j(z)$ est inversible. Donc, d'après 1.a) ci-dessus, des équations locales de Σ^I au voisinage de z_0 sont :

$$(\Phi_1(z), \dots, \Phi_q(z))(0) = 0.$$

Supposons Σ^I non complète (i.e. $i_k \neq 0$). La strate $\Sigma^{I,0}$ est définie dans $J^{k+1}(n)$ par :

$$\pi_{k,k+1}(z') \in \Sigma^I ;$$

et

$$\text{rang} \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial x_{i_1}}(z') \right)_{\substack{j=1, \dots, q \\ i=1, \dots, n}}(0) = n.$$

Or cette dernière condition exprime que $\frac{\partial z^1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z^1}{\partial x_n}$ engendrent dans $J^k(n)$ un n-plan transverse à Σ^I en $\pi_{k,k+1}(z')$.

De ceci résulte en particulier que $\Sigma^{I,0}$ est ouvert dans $\pi_{k,k+1}^{-1}(\Sigma^I)$, et que la codimension de $\Sigma^{I,0}$ dans $J^{k+1}(n)$ est égale à celle de Σ^I dans $J^k(n)$.

Une autre conséquence est la suivante : soit toujours $z' \in \Sigma^{I,0}$ et $z = \pi_{k,k+1}(z')$. Alors, pour tout germe f tel que $j_0^{k+1}f = z'$, l'application $x \mapsto j_x^{k+1}f$ est transverse à $\Sigma^{I,0}$ en z' , et cette transversalité provient de celle de $x \mapsto j_x^k f$ à Σ^I en z .

Posons : codimension $\Sigma^I = n + d$, et soient $q_1, \dots, q_d$ des polynômes de degré k complétant $\frac{\partial z^1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z^1}{\partial x_n}$ en une base de l'espace transverse à Σ^I en z . Alors, pour tout f tel que $j_0^{k+1}f = z'$, posons pour $t \in \mathbb{R}^d$:

$$f_t = f + t_1 q_1 + \dots + t_d q_d.$$

L'application $(x, t) \mapsto j_x^{k+1} f_t$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d$ dans $J^{k+1}(n)$ est alors transversale à $\Sigma^{I,0}$ en z' pour $(x, t) = (0, 0)$ (l'espace transverse est engendré en totalité). On dit que $(q_1, \dots, q_d)$ est un déploiement de z' relatif à Σ^I .

3) Dans $J^k(n)$, Σ^I est stable pour l'action du groupe (noté $L^k(n)$) des k -jets inversibles $(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$.

Ceci permet de définir, pour toute n -variété N , et pour tout symbole de Boardman I , la strate Σ^I de l'espace $J^k(N, \mathbb{R})$ (espace des k -jets des fonctions $N \rightarrow \mathbb{R}$) comme réunion des strates définies sur chaque fibre par identification de celle-ci à $J^k(n)$. (On rappelle que $J^k(N, \mathbb{R})$ est un fibré de base N , de fibre $J^k(n)$.)

Toutes les propriétés de 1) et 2) ci-dessus sont conservées ainsi que la codimension de Σ^I .

4) Mise d'une famille de fonctions sous forme transversale à la stratification de Thom-Boardman.

Soit $f : N \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ une famille à k paramètres de fonctions sur la n -variété N . On munit l'espace $J^\infty(N \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ de la stratification image réciproque de celle de Thom-Boardman par la projection $p : J^\infty(N \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R}) \rightarrow J^\infty(N, \mathbb{R})$. Par le théorème de transversalité de Thom, on peut déformer f (la déformation étant arbitrairement petite) d'abord de façon que $j^\infty f$ évite l'ensemble résiduel (de codimension infinie) des jets dont la projection sur $J^\infty(N, \mathbb{R})$ n'est pas de Thom-Boardman, puis de façon à rendre $j^\infty f$ transversal à toutes les strates $p^{-1}(\Sigma_\infty^I)$. Pour toutes celles dont la codimension est plus grande que $n + k$, cela consiste à les éviter ; pour celles, en nombre fini, dont la codimension est $\leq n + k$, il existe un entier s tel qu'elles

proviennent toutes de strates complètes de $J^S(N, \mathbb{R})$. Soit Σ^I une telle strate, les résultats du 2) ci-dessus permettent de préciser comment se fait l'intersection de $j^S f(N \times \mathbb{R}^k)$ avec Σ^I . Soit ν_I la codimension de Σ^I dans $J^S(N \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R})$; pour tout $z \in \Sigma^I$, la dimension du déploiement de z relatif à Σ^I est $d = \nu_I - n$, et il existe au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^k$ des coordonnées locales $(u, v) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{k-d}$ telles que, pour toute valeur de v , l'application $(x, u) \mapsto j_x^S f(x, u, v)$ soit transversale à Σ^I en $(0, 0)$. L'image réciproque de Σ^I par j_x^S est une sous-variété de dimension $k-d$ de $N \times \mathbb{R}^k$.

Appendice. La lissité de Σ^I selon Mather.

Pour $0 \leq i \leq n$, on note $\mathcal{J}_{i,n}$ l'idéal de $J^k(n)$ engendré par $x_1, \dots, x_{n-i}$; et pour tout symbole de Boardman $I = (i_1, \dots, i_k)$, on pose :

$$\mathcal{J}_{I,n} = \mathcal{J}_{i_1,n} + \mathcal{J}_{i_2,n}^2 + \dots + \mathcal{J}_{i_k,n}^k.$$

On vérifie que le symbole de Boardman de l'idéal $\mathcal{J}_{I,n}$ n'est autre que I .

Dans ce qui suit, on suppose $k \geq 2$ et $i_1 = n$. Pour tout idéal $\mathcal{J}$ de $J^k(n)$, on pose :

$$\beta \mathcal{J} = \mathcal{J} + (\delta \mathcal{J})^2 + \dots + (\delta^{k-1} \mathcal{J})^k.$$

On vérifie les trois propriétés suivantes de l'opérateur β :

- i) $\delta \beta = \beta \delta$ et $\beta^2 = \beta$;
- ii) Pour tout idéal $\mathcal{J} \subset J^k(n)$, $\beta \mathcal{J}$ a même symbole que $\mathcal{J}$;
- iii) $\beta \mathcal{J} = \mathcal{J}$ si et seulement si $\mathcal{J}$ est équivalent à $\mathcal{J}_{I,n}$ par l'action du groupe $L^k(n)$ (cf. 3) ci-dessus).

Pour tout $z \in \Sigma^I$, posons $\beta(\mathcal{J}(z)) = B(z)$. Notons U l'orbite de $\mathcal{J}_{I,n}$ pour l'action de $L^k(n)$ dans la grassmannienne des sous-espaces vectoriels de $J^k(n)$ de même dimension que $\mathcal{J}_{I,n}$. Le groupe $L^k(n)$ opère dans Σ^I et dans U de façon compatible avec B . De i), ii) et iii) ci-dessus découle le 1) de la proposition suivante, le 2) étant conséquence immédiate du 1) :

PROPOSITION. 1) $B(\Sigma^I) = U$.

2) B est une fibration localement triviale.

3) La fibre V de B située au-dessus de $\mathcal{J}_{I,n}$ est un ouvert de Zariski du sous-espace vectoriel de $J^k(n)$ formé des z tels que $\mathcal{J}(z) \subset \mathcal{J}_{I,n}$. $\square$

Le fait que Σ^I soit lisse résulte immédiatement de la proposition ; car U est lisse comme orbite de $L^k(n)$; et V est lisse d'après 3).

En outre, Mather retrouve facilement à l'aide de cette décomposition la formule de Boardman donnant la codimension de Σ^I . Soit μ_I la codimension de $\mathcal{J}_{I,n}$ dans

$J^k(n)$; on voit facilement que $\text{cod } V = \mu_1$. Il reste à calculer $\dim U$ et le résultat final est :

$$\text{cod } \Sigma^I = \mu_1 - (i_1 - i_2) \mu_{\sigma I} \dots - (i_{k-1} - i_k) \mu_{\sigma^{k-1} I} , \text{ où } \sigma \text{ désigne}$$

le "shift". (On rappelle que $i_1 = n$) . Enfin, μ_1 se calcule facilement : $\mu_1 + 1$ est le nombre des suites non croissantes $(i'_1, \dots, i'_k)$ telles que $i_j \geq i'_j \geq 0$ pour $j = 1, \dots, k$.

§2. Deux lemmes de déformation préliminaires à la chirurgie sur les strates de Thom-Boardman.

La chirurgie sur les strates de Thom-Boardman a été utilisée avant Igusa par Gromov et Eliashberg ([3] [4]) et du Plessis [9] dans le cas d'applications $V \rightarrow W$ (le but est une variété quelconque, il n'y a pas de paramètre). L'introduction de paramètres a amené Igusa à formuler deux lemmes de déformation qui me semblent être également à la base du cas sans paramètre. Ces difficultés n'apparaissent pas dans [2] car les strates de très petite codimension se confondent avec des orbites du groupe des difféomorphismes, ce qui rend les lemmes de déformation immédiats.

Premier lemme de déformation.

Soit Σ^I une strate complète de $J^k(n)$; soit d la dimension du déploiement correspondant ; soient f et g deux fonctions $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose :

- 1) que $j_0^k f_t = j_0^k g_t$ pour tout $t \in \mathbb{R}^d$;
- 2) que l'application $(x, t) \mapsto j_x^k f_t$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d$ dans $J^k(n)$ est transversale à Σ^I en $(0, 0)$ (d'après 1) il en est alors de même pour g).

Il existe une déformation (f^λ) de f ($\lambda \in [0, 1]$) telle que :

- le support de (f^λ) soit un voisinage arbitrairement petit de $(0, 0)$;
- f^1 coïncide avec g au voisinage de $(0, 0)$;
- au cours de la déformation, la condition 2) soit conservée, et qu'il n'apparaisse aucune singularité nouvelle de symbole $I^1 \geq I$ (pour l'ordre lexicographique).

Si en outre le couple (f, g) dépend différemment d'un paramètre $u \in K$ (K compact d'une variété différentiable), on peut choisir f^λ dépendant différemment de u .

Indications sur une démonstration. La méthode suivante paraît plus simple que celle, un peu calculatoire, d'Igusa. Appelons déformation mod Σ une déformation telle que (f^λ) ci-dessus. Il est clair que pour tout voisinage A de $(0, 0)$ dans $\mathbb{R}^n$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_A$ de f dans l'espace des fonctions vérifiant 1), tel que toute $g \in \mathcal{V}_A$

puisse être déformée mod Σ , avec support de la déformation dans A , en une fonction ayant même germe que f en $(0,0)$. Tout revient à montrer que cette propriété a lieu uniformément, autrement dit qu'il existe un ν indépendant de A , si petit que soit celui-ci : car la relation entre fonctions "être déformable l'une dans l'autre mod Σ , avec support de la déformation arbitrairement petit" est une relation d'équivalence. Or, un calcul simple montre que cette relation d'équivalence est ouverte ; donc, deux fonctions ayant même k -jet à l'origine sont équivalentes au sens ci-dessus.

Application du lemme. Soit f vérifiant la condition 1) du lemme. La condition 2) est vérifiée en particulier par la fonction :

$$g_t(x) = j_0^k f_t(x) + \sum_1^n x_i^{k+1},$$

dans laquelle $j_0^k f_t$ est identifié au développement limité à l'ordre k de f_t à l'origine.

L'intérêt de ce cas particulier provient du fait que la singularité de g_0 à l'origine est de codimension finie et par conséquent isolée. [On sait en effet que la codimension de la singularité présentée à l'origine par un polynôme est au plus égale à celle de sa composante de plus haut degré.

On rappelle qu'on appelle codimension d'un germe g la codimension de son idéal "jacobien" : celui engendré par $\frac{\partial g}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n}$. En fait, la codimension d'un germe g ne dépend que de son jet infini, la définition étant analogue à partir de celui-ci : codimension dans $J^\infty(n)$ de l'idéal engendré par $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$; elle est en général différente de la codimension de la strate de z lorsque z est de Thom-Boardman. C'est une conséquence immédiate du lemme de Nakayama que si g est de codimension k , alors son idéal jacobien contient tous les germes de k -jet nul, donc en particulier ceux de $x_1^{k+1}, \dots, x_n^{k+1}$; on en déduit aussitôt que la singularité de g à l'origine est isolée.]

Second lemme de déformation.

Soit f une fonction $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant la condition 2) du lemme précédent, et en plus :

3) il existe une famille $g = (g_t)$ de polynômes en x de degré borné ℓ , telle que f coïncide avec g au voisinage de 0 , et que g_0 ait une singularité isolée à l'origine.

Alors, pour tout chemin (g_t^λ) de polynômes de degré ℓ , tel que :

$$j_0^k g_0^\lambda \in \Sigma^I \text{ pour tout } \lambda \in [0,1],$$

et que la singularité de g_0^λ à l'origine soit uniformément isolée pour $\lambda \in [0,1]$, il existe une déformation (f^λ) de f à support dans un voisinage arbitrairement petit de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d$, coïncidant avec (g^λ) sur un voisinage plus petit,

et telle qu'il n'apparaisse aucune singularité nouvelle de symbole $I' \geq I$ au cours de la déformation.

En outre comme pour le lemme 1, tout ceci reste vrai avec un paramètre variant dans un compact d'une variété. $\square$

Commentaire. Le premier lemme permet (après transversalisation sur la stratification de Thom-Boardman) de ramener toute famille (f_t) à vérifier la condition 3) du second lemme. Malheureusement, celui-ci ne permet de relever que les seules déformations de l'espace des jets qui vérifient l'uniforme isolement des singularités. Igusa a surmonté cette difficulté en construisant par des procédés métriques un raffinement de la stratification de Thom-Boardman tel que cette condition d'uniforme isolement soit vraie sur chaque strate. En toute rigueur, c'est ce raffinement de la stratification de Thom-Boardman qu'il faudrait utiliser dans les deux paragraphes suivants.

§3. Suppression d'une sphère de singularités de même germe.

Soit $(f_t)_{t \in \mathbb{R}^k}$ une famille de fonctions : $D^n \rightarrow \mathbb{R}$. Dans l'espace des paramètres, on considère la sphère standard $S^i \subset \mathbb{R}^{i+1} \subset \mathbb{R}^k$ pour $0 \leq i \leq k-1$; on note T le voisinage tubulaire standard de rayon $\frac{1}{2}$ de S^i dans $\mathbb{R}^k$ défini comme image du plongement $\psi : S^i \times D_{\frac{1}{2}}^{k-i} \rightarrow \mathbb{R}^k$ donné par la formule :

$$\psi(u, v) = ((1-v_1)u_1, \dots, (1-v_1)u_{i+1}, v_2, \dots, v_{k-i}) .$$

On suppose que tous les f_t , pour $t \in S^i$, ont le même germe en 0; on fait même l'hypothèse plus forte :

(1) $f_{\psi(u,v)}(x)$ est indépendant de $u \in S^i$ pour tout $x \in D_{\epsilon}^n$ ($\epsilon > 0$ assez petit).

Sur la singularité en 0 commune à tous les f_t pour $t \in S^i$, on fait l'hypothèse :

(2) f_t (pour $t \in S^i$) a en 0 une singularité de codimension finie ≥ 2 (donc appartenant à une strate de Thom-Boardman complète, $I > (n, 1, 0)$) .

On suppose en plus :

(3) La famille (f_t) est transversale à la stratification de Thom-Boardman.

Soit $\Sigma^I(f)$ l'ensemble des $(x, t) \in D^n \times \mathbb{R}^k$ tels que $f_t(x)$ soit une singularité appartenant à Σ^I . Vu nos hypothèses, $\Sigma^I(f)$ est une sous-variété de $D^n \times \mathbb{R}^k$ de dimension inférieure ou égale à $k-2$; d'autre part, $0 \times S^i$ est une sous-variété de $\Sigma^I(f)$ (ce qui entraîne $i \leq k-2$) .

PROPOSITION. Sous les hypothèses (1), (2), (3) ci-dessus, et si en plus $k \leq n$, on peut déformer la famille (f_t) , le support de la déformation étant dans un voisinage

arbitrairement petit de $0 \times D^{i+1}$, de façon que $\Sigma^I(f)$ change par chirurgie le long de $0 \times S^i$, et qu'il n'apparaisse aucune singularité de symbole $I' > I$ au cours de la déformation.

Principe de la démonstration. Soit h une fonction $D^n \rightarrow \mathbb{R}$ ayant en 0 une Σ^I -singularité. On dira que h est en 0 une perturbation mod Σ^I s'il existe un plongement φ de $D^{n-1} \times [0, 1]$ sur un voisinage W de 0 dans l'intérieur de D^n tel que :

(1) Les feuilletages définis par h et par la fonction "cote" sur W (c'est-à-dire la transportée par φ de la 2e projection) coïncident au voisinage de ∂W ;

(2) Soit h' la fonction sans singularité sur W , égale à h sur le complémentaire de W , ainsi définie. Il existe une déformation h^λ à support dans W , joignant h' à h de façon que (sauf la singularité de h en 0) toutes les singularités de h^λ soient de symbole moins élevé que I .

Si en plus le chemin h^λ est transversal en son extrémité à Σ^I , on peut le prolonger un peu sans qu'il apparaisse de nouvelle singularité de symbole $\geq I$; on dit que le chemin ainsi obtenu est un chemin de perturbation transversal à Σ^I en h .

Supposons que la singularité de h en 0 soit isolée, et soit W un voisinage de 0 difféomorphe à $D^{n-1} \times [0, 1]$, assez petit pour que 0 soit la seule singularité de $h|_W$. On peut déformer h en une fonction h' coïncidant au voisinage de ∂W avec la fonction cote sur W . Cette déformation peut se faire avec support dans un voisinage arbitrairement petit de ∂W , et de façon à n'introduire que des singularités des types Morse et naissance-mort. La fonction h' est en 0 une perturbation, le support de la déformation pouvant être W , et les seules singularités introduites sont de l'un ou l'autre des 2 types ci-dessus ; c'est donc une perturbation mod Σ^I dès que $I > (n, 1, 0)$.

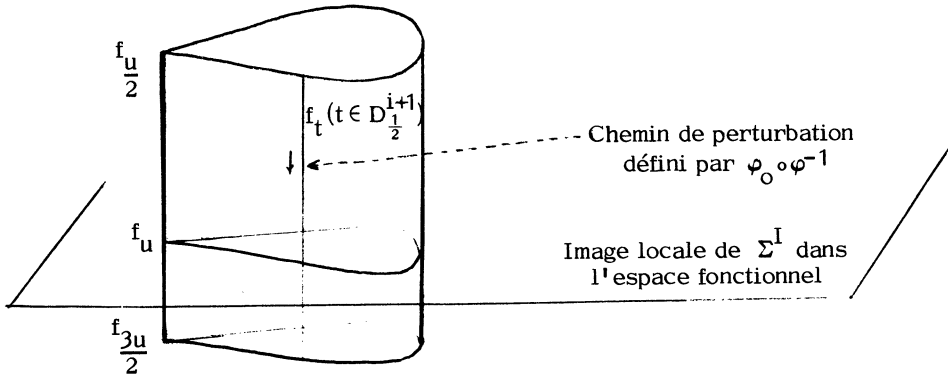
Revenons à la famille (f_t) de la proposition. Utilisant ce qui précède, on la déforme d'abord au voisinage de $0 \times S^i$ de façon que pour tout $u \in S^i$ le chemin

$$[0, 1] \ni \lambda \longmapsto f_{(\frac{1}{2} - \lambda)u}$$

qui correspond à la fibre de $T \cap \mathbb{R}^{i+1}$ passant par u , tout en restant indépendant de u , soit désormais un chemin de perturbation transversal à Σ^I en f_u , associé à un certain plongement $\varphi: D^{n-1} \times [0, 1]$ adapté à $f_{u/2}$. En particulier, le collier $0 \times (T \cap \mathbb{R}^{i+1})$ est transversal à $\Sigma^I(f)$ le long de $0 \times S^i$, et le bord intérieur de ce collier (c'est-à-dire $0 \times \partial D_{\frac{1}{2}}^{i+1}$) ne rencontre pas $\Sigma(f)$ (réunion de tous les $\Sigma^{I'}(f)$) ; en d'autres termes, pour tout $t \in \partial D_{\frac{1}{2}}^{i+1}$, 0 est non singulier pour f_t . A priori, ce n'est pas le cas pour $t \in D_{\frac{1}{2}}^{i+1}$. Mais on a supposé $i+1 < k \leq n$, donc

$(i+1) + k < k+n$; or, k est la dimension de $\Sigma(f)$. On peut donc disjointre $0 \times D_{\frac{1}{2}}^{i+1}$ de $\Sigma(f)$ par une déformation arbitrairement petite, qui peut se réaliser par une famille de petites isotopies. On cherche alors à construire une famille (φ_t) , $t \in D_{\frac{1}{2}}^{i+1}$, de plongements $D^{n-1} \times [0,1] \rightarrow D^n$, telle que $\varphi_t = \varphi$ pour $t \in \partial D_{\frac{1}{2}}^{i+1}$, et que chaque φ_t soit adapté à la fonction f_t . Les théorèmes classiques sur l'homotopie des espaces de plongements des disques montrent que la seule obstruction à construire la famille (φ_t) provient du fibré de Stiefel $V_{n-1}(\mathbb{R}^n) \rightarrow S^{n-1}$: c'est celle que l'on rencontre pour relever un $(i+1)$ -lacet de la base en un $(i+1)$ -lacet de ce fibré, elle se trouve donc dans le noyau de l'application $\pi_1(SO(n-1)) \rightarrow \pi_1(SO(n))$.

L'obstruction est donc nulle a priori dans tous les cas, sauf dans le cas $i = n-2$, que je laisse de côté (il n'intervient que pour supprimer les singularités de codimension 2 lorsque $k = n$). Une fois construite la famille (φ_t) , on définit à l'aide des $\varphi_t \circ \varphi^{-1}$ une famille de chemins de perturbation transversaux à Σ^I , d'origine tous les f_t , $t \in D_{\frac{1}{2}}^{i+1}$, et prolongeant celle donnée sur le bord. On fait alors dans l'espace fonctionnel la déformation schématisée ci-dessous ; elle réalise la chirurgie désirée.



§4. Le théorème principal et son corollaire relatif aux pseudo-isotopies.

THÉORÈME PRINCIPAL. Soit N une variété compacte de classe C^∞ , de dimension n , et soit $g : N \rightarrow [0,1]$ une application de classe C^∞ sans singularité au voisinage de ∂N .

Soit $\mathcal{H}(N,g)$ l'espace des fonctions $f : N \rightarrow [0,1]$ de classe C^∞ telles que :

- (a) f coïncide avec g au voisinage de ∂N ;
- (b) f n'a que des singularités des types Morse et naissance-mort.

Soit $J^S(N)$ le fibré des s -jets des applications de classe $C^\infty : N \rightarrow \mathbb{R}$, et soit $H^S(N)$ le sous-fibré de $J^S(N)$ formé des jets qui sont soit non singuliers, soit

singuliers de l'un des types Morse ou naissance-mort. Soit $\Gamma^\infty(H^S(N), g)$ l'espace des sections de classe $C^\infty : N \rightarrow H^S(N)$ qui coïncident au voisinage de ∂N avec celle définie par le s-jet de g .

L'application canonique $j^S : \mathcal{H}(N, g) \longrightarrow \Gamma^\infty(H^S(N), g)$ est n -connexe dès que $s \geq 3$.

Principe de la démonstration. Comme dans l'introduction, on définit l'espace $\mathcal{J}(N, g)$ par la seule condition (a) ci-dessus. On considère le "carré" commutatif $\mathcal{S}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}(N, g) & \longrightarrow & \Gamma^\infty(H^S(N), g) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{J}(N, g) & \longrightarrow & \Gamma^\infty(J^S(N), g) \end{array} .$$

Les deux espaces de la ligne du bas sont contractiles, de sorte que la n -connexité de la ligne du haut équivaut à la $(n+1)$ -connexité du carré, ce qui signifie ceci :

"Pour tout k tel que $1 \leq k \leq n$, l'espace des applications pointées du carré

$$\begin{array}{ccc} S^{k-1} & \longrightarrow & D^k \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_+^k & \longrightarrow & D_+^{k+1} \end{array}$$

dans le carré $\mathcal{S}$ est connexe".

Soit donc $f : (S_+^k, S^{k-1}) \rightarrow (\mathcal{J}, \mathcal{H})$ telle que $j^S \circ f$ soit la restriction d'une application

$$\sigma : (D_+^{k+1}, D^k) \longrightarrow (\Gamma(J^S), \Gamma(H^S)) .$$

Comme au §3, on définit $\Sigma^I(f)$ comme l'ensemble des $(x, t) \in N \times S_+^k$ tels que $j^S f_t \cdot x \in \Sigma^I$. On définit de même $\Sigma^I(\sigma)$ comme l'ensemble des $(x, t) \in N \times D_+^{k+1}$ tels que $\sigma_t \cdot x \in \Sigma^I$.

Le type d'homotopie de $\Gamma^\infty(H^S)$ étant indépendant de s dès que $s \geq 3$, on choisit s assez grand pour que, après transversalisation sur la stratification de Thom-Boardman, il existe un nombre fini de symboles I' , tous complets, tels que la réunion des $\Sigma^{I'}(\sigma)$ soit l'ensemble des (x, t) tels que $\sigma_t \cdot x$ soit singulier (cf. §1, propriété 4). Soit I le plus élevé de ces symboles (pour l'ordre lexicographique) ; $\Sigma^I(\sigma)$ est une variété compacte de bord $\Sigma^I(f)$. On munit $\Sigma^I(\sigma)$ d'une fonction de Morse h nulle sur le bord, et l'on fait une récurrence sur le nombre de points critiques de cette fonction. Soit ξ le point critique le plus bas de h , soit $i+1$ son indice. Sa nappe descendante est un disque D^{i+1} de $\Sigma^I(\sigma)$ dont le bord S^{i+1} est dans $\Sigma^I(f)$. Du fait que S^{i+1} borde un disque dans $\Sigma^I(\sigma)$ résulte que son image dans Σ^I est homotope à zéro sur Σ^I . Les lemmes de déformation du §2 permettent alors de se ramener à la situation du §3, et donc d'effectuer la chirurgie de $\Sigma^I(f)$ suivant S^{i+1} (pourvu que $I > (n, 1, 0)$) qui supprime le point critique ξ de h .

Le corollaire relatif aux pseudo-isotopies.

On suppose maintenant que $N = M \times [0, 1]$ et on prend pour g la 2e projection. On prend les notations simplifiées $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{F}$, H^3 , J^3 ; comme dans l'introduction, on note $\mathcal{E}$ la partie de $\mathfrak{M}$ formée des fonctions sans singularité et on note E^3 l'espace de jets correspondant. On doit montrer (cf. introduction) que, pour tout $k \leq n$, dans le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \pi_{k-1}(\mathcal{E}) & \longrightarrow & \pi_{k-1}\Gamma^\infty(E^3) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_{k-1}(\mathfrak{M}) & \longrightarrow & \pi_{k-1}\Gamma^\infty(H^3) \end{array},$$

la flèche de gauche est zéro ; or la flèche du bas est une injection d'après le théorème principal ; on conclut à l'aide du

LEMME. L'application $\Gamma^\infty(E^3) \rightarrow \Gamma^\infty(H^3)$ est homotopiquement triviale.

Démonstration. En effet, entre la fibre de E^3 , identifiée à l'espace des polynômes de degré ≤ 3 à n variables sans terme constant, réguliers à l'origine, et celle de H^3 , on peut placer un espace contractile (invariant de surcroît) : celui des polynômes ayant à l'origine, soit un point régulier, soit un point singulier de Morse d'indice zéro.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.M. BOARDMAN, Singularities of differentiable maps, Publ. Math. IHES 33 (1967), 21-57.
- [2] J. CERF, La stratification naturelle des espaces de fonctions différentiables réelles et le théorème de la pseudo-isotopie, Publ. Math. IHES 39 (1971), 6-173.
- [3] J.A.M. ELIASHBERG, Surgery of singularities of smooth mappings, Math. USSR Izvestija, vol. 6 (1972), n° 6, 1302-1326.
- [4] M.L. GROMOV & J.A.M. ELIASHBERG, Removal of singularities of smooth mappings, Math. USSR Izvestija, vol. 5 (1971), n° 3, 615-639.
- [5] K. IGUSA, Higher singularities of smooth functions are unnecessary, Annals of Math. 119 (1984), 1-58.
- [6] K. IGUSA, On the homotopy type of the space of Morse functions, Topology, vol. 23(1984), n° 2, 245-256.
- [7] H.I. LEVINE, Singularities of differentiable mappings, Proceedings Liverpool I, Lecture notes in Math. n° 192, 1-89.

- [8] J.-L. LODAY, Homotopie des espaces de concordances (d'après F. Waldhausen)
Séminaire Bourbaki n° 516 (1977-78), Lecture Notes in Math. n° 710.
- [9] J. MATHER, On Thom-Boardman singularities, in Dynamical Systems,
Academic Press 1972, 233-248.
- [10] A. du PLESSIS, Maps without certain singularities, Comment. Math. Helv.
50 (1975), 363-382.
- [11] R. THOM, Ensembles et morphismes stratifiés, Bull. Amer. Math. Soc. 75
(1969), 240-284.

Jean CERF
L.P. 13 du C.N.R.S.
Université Paris-Sud
Mathématiques, bâtiment 425
91405 ORSAY cedex