

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

GEORGES MALTSINIOTIS

Le théorème de Brill-Noether

Séminaire N. Bourbaki, 1981, exp. n° 571, p. 157-175

http://www.numdam.org/item?id=SB_1980-1981__23__157_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

LE THÉORÈME DE BRILL-NOETHER
[d'après P. Griffiths, J. Harris, G. Kempf,
S. Kleiman et D. Laksov]
par Georges MALTSINIOTIS

Introduction

Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque, C une courbe projective, lisse, connexe, de genre g sur k , D un diviseur de degré d de C . Un problème classique est de déterminer

$$h^0(D) = \dim(H^0(O_C(D))) = \dim(L(D))$$

où $O_C(D)$ est le faisceau inversible associé au diviseur D et

$$L(D) = \{f : f \text{ fonction méromorphe sur } C \text{ tel que } D + \text{div}(f) \geq 0\}$$

ou la dimension $r(D)$ de l'espace projectif $|D|$ des diviseurs positifs linéairement équivalents à D . Vu que $|D| \simeq \mathbb{P}(L(D))$ on a $r(D) = h^0(D) - 1$. Il est clair que si $d < 0$, $h^0(D) = 0$; on s'intéresse donc au cas $d \geq 0$ et on remarque que dans le cas particulier où $d = 0$, $h^0(D) = 1$ si D est linéairement équivalent au diviseur 0 et $h^0(D) = 0$ sinon.

Les premiers renseignements sur $h^0(D)$ sont donnés par la formule de Riemann-Roch :

$$h^0(D) = d - g + 1 + h^0(K - D)$$

où K est un diviseur canonique sur C . On rappelle que $h^0(K) = g$ et que le degré de K est égal à $2g - 2$. Si $d > 2g - 2$ on obtient donc que :

$$h^0(D) = d - g + 1.$$

Ces renseignements nous permettent d'élucider entièrement le problème si $g = 0, 1$:

$$\text{Si } g = 0 \quad h^0(D) = \sup\{0, d + 1\}$$

$$\text{Si } g = 1 \text{ et } d \neq 0 \quad h^0(D) = \sup\{0, d\}.$$

On suppose donc désormais que $g \geq 2$ et que $0 \leq d \leq 2g - 2$.

Si $0 \leq d \leq g - 1$, l'image du module $C^{(d)}$ des diviseurs positifs de degré d

de C dans la jacobienne J de C étant un fermé distinct de J , si la classe de D dans J est "générale" $h^0(D) = 0$. De même si $g-1 \leq d \leq 2g-2$ la formule de Riemann-Roch implique que si la classe de D dans J est "générale" (donc aussi celle de $K-D$ dont le degré est compris entre 0 et $g-1$) alors $h^0(D) = d - g + 1$. Donc dans les deux cas :

$$h^0(D) = \sup\{0, d - g + 1\}.$$

On dit qu'un diviseur D est spécial si

$$h^0(D) > \sup\{0, d - g + 1\}$$

(cette inégalité implique que $0 \leq d \leq 2g-2$) ou, ce qui est équivalent, si $h^0(D) \neq 0$ et $h^0(K-D) \neq 0$. En particulier si le diviseur D est spécial il existe un diviseur positif linéairement équivalent à D . Si on s'intéresse donc aux classes de diviseurs spéciaux on peut se limiter à l'étude des classes de diviseurs spéciaux positifs. Si D est positif dire qu'il est spécial équivaut à dire que $h^0(K-D) \neq 0$ ou encore qu'il est majoré par un diviseur canonique.

On se pose la question de savoir quelles sont les classes de diviseurs spéciaux qui existent sur C et "combien il y en a". Plus précisément si pour d , $0 \leq d \leq 2g-2$ et r , $\sup\{0, d - g + 1\} \leq r$, on pose

$$C_d^r = \{D \in C^{(d)} : h^0(D) > r\} = \{D \in C^{(d)} : r(D) \geq r\}$$

et on note W_d^r l'image de C_d^r dans la jacobienne, on se pose la question de savoir quand est-ce que W_d^r est non vide et quelle est, dans ce cas, sa dimension. (On remarque que la formule de Riemann-Roch montre immédiatement que l'automorphisme de la jacobienne qui associe à la classe d'un diviseur D la classe du diviseur $K-D$ induit un isomorphisme de W_d^r sur $W_{2g-2-d}^{r-d+g-1}$).

On a une réponse immédiate à ces questions dans le cas où $r = \sup\{0, d - g + 1\}$ (dans quel cas W_d^r est l'ensemble des classes de tous les diviseurs spéciaux de degré d). En effet dans ce cas si $0 \leq d \leq g-1$, $W_d^r = W_d^0$ est l'ensemble des classes de tous les diviseurs positifs de degré d donc est irréductible de dimension d et si $g-1 \leq d \leq 2g-2$, $W_d^r = W_d^{d-g+1}$ est isomorphe à W_{2g-2-d}^0 donc irréductible de dimension $2g-2-d$. Donc si $r = \sup\{0, d - g + 1\}$ W_d^r est irréductible et

$$\dim W_d^r = \inf\{d, 2g-2-d\}.$$

Dans le cas général le théorème de Clifford donne une réponse partielle à la première question :

$$\text{si } r > d/2 \text{ alors } W_d^r = \emptyset$$

qui est dans un sens la meilleure car si C est une courbe hyperelliptique, et $0 \leq d \leq 2g-2$, $\sup\{0, d - g + 1\} \leq r \leq d/2$ alors $W_d^r \neq \emptyset$. D'autre part une généralisation facile du théorème de Clifford montre que si $0 \leq d \leq 2g-2$ et

$\sup\{0, d-g+1\} \leq r \leq d/2$, alors $\dim W_d^r \leq d-2r$, l'égalité étant atteinte pour une courbe hyperelliptique ce qui donne une réponse partielle à la deuxième question, et résout entièrement le problème pour $g = 2$.

Mais pour $g \geq 3$ les courbes hyperelliptiques sont "exceptionnelles" et on peut se poser les mêmes questions en supposant la courbe C "générale". Brill et Noether [5] ont affirmé que si C est une courbe générale de genre g , $g \geq 2$, alors W_d^r est non vide si et seulement si $g - (r+1)(g-d+r) \geq 0$ et qu'alors

$$\dim W_d^r = g - (r+1)(g-d+r)$$

(conjecture de Brill-Noether). En fait, leur démonstration semble prouver seulement que (sans supposer que la courbe soit générale) toute composante irréductible de W_d^r est de dimension supérieure ou égale à $g - (r+1)(g-d+r)$ (ce qui ne prouve pas que W_d^r est non vide si $g - (r+1)(g-d+r) \geq 0$).

Actuellement la conjecture de Brill-Noether a été entièrement démontrée grâce aux travaux de Kleiman-Laksov, Kempf et Griffiths-Harris et on dispose du théorème suivant :

THÉORÈME.— Soient C une courbe projective, lisse, connexe, de genre g , $g \geq 2$, sur un corps algébriquement clos k , d et r deux entiers tels que $0 \leq d \leq 2g-2$ et $\sup\{0, d-g+1\} \leq r$. Alors

(i) Si $r > d/2$, W_d^r est vide. Si $r \leq d/2$, toute composante irréductible de W_d^r a une dimension supérieure ou égale à $g - (r+1)(g-d+r)$ et inférieure ou égale à $d-2r$, pour $r = \sup\{0, d-g+1\}$, W_d^r est irréductible et de dimension $g - (r+1)(g-d+r) = d-2r = \inf\{d, 2g-2-d\}$ et pour $d/2 \geq r > \sup\{0, d-g+1\}$, W_d^r a une composante irréductible de dimension $d-2r$ si et seulement si C est hyperelliptique.

(ii) Si $g - (r+1)(g-d+r) \geq 0$, W_d^r est non vide.

(iii) Il existe un ouvert dense U de M_g (module des courbes de genre g) tel que si l'image de C dans M_g est dans U alors :

a) $\dim W_d^r = \sup\{-1, g - (r+1)(g-d+r)\}$;

b) si $g - (r+1)(g-d+r) \geq 0$ la classe fondamentale w_d^r de W_d^r dans la cohomologie de la jacobienne de C est donnée par la formule :

$$(1) \quad w_d^r = \prod_{i=0}^r \frac{i!}{(g-d+r+i)!} \theta^{(r+1)(g-d+r)}$$

où θ est la classe du diviseur thêta (θ est la classe fondamentale de W_{g-1}^0).

La partie (i) du théorème est déjà essentiellement démontrée dans la littérature classique mais une présentation moderne et rigoureuse est donnée par H. Martens [20]. La partie (ii) est restée longtemps conjecturale. Elle a été démontrée pour $r = \sup\{0, d-g+1\} + 1$ et $k = \mathbb{C}$ par T. Meiss en 1960 [27] et Gunning en 1971 [10] par des méthodes différentes. Le cas général a été démontré indépendamment par Kempf et Kleiman-Laksov en 1971 [11], [14], [15] ⁽¹⁾. Ils démontrent que si

(1) Fulton et Lazarsfeld ont récemment démontré ce même résultat par une méthode différente.

$g - (r+1)(g-d+r) \geq 0$ alors la classe de cohomologie $\prod_{i=0}^r \frac{i!}{(g-d+r+i)!} \theta^{(r+1)(g-d+r)}$ est "portée" par W_d^r ce qui implique que W_d^r est non vide, et que si $\dim W_d^r = g - (r+1)(g-d+r)$ alors on a l'égalité (1) du théorème.

La partie (iii) a) a été démontrée pour $r = \sup\{0, d-g+1\} + 1$ et $k = \mathbb{C}$ par R. Lax [18], en 1974, qui s'appuie sur les travaux de Meis [27], pour $r = \sup\{0, d-g+1\} + 1$ et k quelconque par H. Martens [21] en 1968 et Laksov [16] en 1975 et récemment pour $r = \sup\{0, d-g+1\} + 2$ par Arbarello et Cornalba [1]. Dans le cas général le pas crucial a été fait par Kleiman [13] qui développant une idée de Severi [30] utilise une méthode de dégénération de Castelnuovo [6] pour ramener (iii) a) à la conjecture suivante :

Conjecture (Castelnuovo-Severi-Kleiman).— Soient d, g, ℓ trois entiers tels que $d \geq 1, g \geq 0, 0 \leq \ell < d, C$ une courbe rationnelle normale de degré d dans $\mathbb{P}^d$ qui n'est contenue dans aucun hyperplan de $\mathbb{P}^d$. Alors l'ensemble des sous-espaces projectifs de dimension ℓ de $\mathbb{P}^d$ qui rencontrent g cordes données de C en "position générale" est un fermé de la grassmannienne de dimension inférieure ou égale à

$$\sup\{-1, (\ell+1)(d-\ell) - g(d-\ell-1)\}.$$

Cette conjecture a été démontrée par Griffiths-Harris [9], en 1979, et la conjecture de Brill-Noether (partie (iii) a) du théorème) est ainsi entièrement démontrée. Ils exposent également une méthode plus géométrique que celle de Kleiman pour ramener la conjecture de Brill-Noether à celle de Castelnuovo-Severi-Kleiman. Enfin ils affirment que pour une courbe "générale", W_d^r n'a pas de composantes multiples (du moins en caractéristique zéro) pour sa structure naturelle de schéma, affirmation qu'ils déduisent d'une forme plus fine de la conjecture de Castelnuovo-Severi-Kleiman. Les détails de cette démonstration ne m'étant pas entièrement clairs, je ne parlerais pas de ce point. En fait actuellement on sait démontrer que pour une courbe "générale", W_d^r est réduit [1] et [8].

Une conjecture liée à celle de Brill-Noether est la conjecture de Petri [28] :

Si C est "générale" et si D désigne un diviseur quelconque et K un diviseur canonique alors le "cup" produit

$$\mu_0 : H^0(C, \mathcal{O}_C(D)) \otimes H^0(C, \mathcal{O}_C(K-D)) \longrightarrow H^0(C, \mathcal{O}_C(K))$$

est injectif.

On remarque que si D n'est pas un diviseur spécial, ou si D est un diviseur spécial tel que $r(D) = \sup\{0, d(D) - g + 1\}$ l'injectivité de μ_0 est évidente (sans hypothèse sur C). Dans le cas général on démontre que si l'image de D dans la jacobienne est un point de $W_d^r - W_d^{r+1}$, l'espace tangent de Zariski de W_d^r en ce point est égal à $(\text{Im}(\mu_0))^\perp$. Par conséquent la conjecture de Petri est équivalente à la conjonction de la conjecture de Brill-Noether et de l'assertion (conjecture de Mayer) :

Si C est "générale" W_d^{r+1} est formé de l'ensemble des points singuliers de W_d^r .

La conjecture de Mayer a été démontrée pour $r = \sup\{0, d-g+1\} + 1$ par Martens [21], et Arbarello et Cornalba [1] ont démontré directement la conjecture de Petri pour $r(D) = \sup\{0, d(D)-g+1\} + 2$ (c'est ainsi qu'ils ont démontré Brill-Noether dans ce cas). D. Gieseker [8] vient de démontrer la conjecture de Petri dans le cas général en utilisant les méthodes de Griffiths-Harris.

Au § 1 on expose quelques préliminaires, au § 2 on donne une démonstration complète de la conjecture de Castelnuovo-Severi-Kleiman, au § 3 on résume de façon informelle les propriétés des courbes de Castelnuovo et au § 4 on expose brièvement l'idée de la méthode de Griffiths-Harris pour ramener la conjecture de Brill-Noether à celle de Castelnuovo-Severi-Kleiman.

§ 1. Préliminaires

Soient n un entier, $n \geq 1$, C une courbe irréductible dans $\mathbb{P}^n$ (un schéma fermé, irréductible de $\mathbb{P}^n$ de dimension 1) qui n'est contenue (ensemblis-tement) dans aucun hyperplan de $\mathbb{P}^n$.

On rappelle que le groupe des cycles 1-codimensionnels de C est le groupe libre commutatif $Z^1(C)$, engendré par l'ensemble des points fermés de C , $Z^1(C) = \mathbb{Z}^{(I)}$ où $I = C - \{\eta\}$, η étant le point générique de C , qui est muni naturellement d'une relation d'ordre partiel et qu'on appellera simplement groupe des cycles de C . Si

$$Z = \sum_{p \in C - \{\eta\}} n_p \cdot p$$

est un cycle de C , pour tout point fermé p de C on note $m_p(Z)$ l'entier n_p et on pose

$$d(Z) = \sum_{p \in C - \{\eta\}} m_p(Z)$$

Si C est lisse on rappelle que $Z^1(C)$ s'identifie canoniquement au groupe ordonné de diviseurs de C .

Si H est un hyperplan de $\mathbb{P}^n$, on note $C.H$ le cycle

$$Z = \sum_{p \in C - \{\eta\}} n_p \cdot p$$

de C , où pour tout point fermé p de C , n_p est la multiplicité d'intersection de H avec C en p . Si Λ est un sous-espace projectif de $\mathbb{P}^n$ différent de $\mathbb{P}^n$ on note $C.\Lambda$ le cycle de C défini par

$$C.\Lambda = \inf_{\substack{H \text{ hyperplan de } \mathbb{P}^n \\ \Lambda \subset H}} C.H$$

Réciproquement si Z est un cycle de C on pose

$$\bar{Z} = \bigcap_{\substack{H \text{ hyperplan de } \mathbb{P}^n \\ C.H \geq Z}} H$$

On remarque immédiatement qu'on a $Z \leq C.\bar{Z}$ (si $\bar{Z} \neq \mathbb{P}^d$) et $\overline{C.\Lambda} \subset \Lambda$.

PROPOSITION 1.1.— Soient C une courbe projective, lisse, connexe sur k , D un diviseur très ample de C , $\varphi_D : C \hookrightarrow \mathbb{P}^n = |D|^*$ ($n = h^0(D) - 1$) le plongement correspondant et D' un diviseur positif de C . Alors (en identifiant C à son image par φ_D dans $\mathbb{P}^n$) on a $\dim(\overline{D'}) = n - h^0(D - D') = h^0(D) - h^0(D - D') - 1$ et $C.\overline{D'} = D' + D''$ où D'' est le diviseur de points fixes de $|D - D'|$ (D'' est la borne inférieure de $|D - D'|$ dans l'ensemble ordonné de diviseurs).

La démonstration (immédiate) de cette proposition est laissée au lecteur.

COROLLAIRE 1.2 (formule de Riemann-Roch géométrique).— Si C est de genre g , $g \geq 3$, non hyperelliptique et $D = K$ est un diviseur canonique alors

$$h^0(D') = d(D') - \dim(\overline{D'}) .$$

Démonstration.— Il résulte de la proposition que dans ce cas

$\dim(\overline{D'}) = g - 1 - h^0(K - D')$ et le corollaire est une conséquence de la formule de Riemann-Roch.

COROLLAIRE 1.3.— Si C est de genre 0 et D de degré d ($d \geq 1$) alors $n = d$ et

- (i) si $d(D') \leq d$ on a $\dim(\overline{D'}) = d(D') - 1$ et $C.\overline{D'} = D'$
- (ii) si $d(D') > d$ on a $\overline{D'} = \mathbb{P}^d$.

§ 2. Démonstration de la conjecture de Castelnuovo-Severi-Kleiman

Dans ce paragraphe C désigne une courbe projective, lisse, connexe de genre 0, D un diviseur positif de C , de degré d , $d \geq 1$, (qui est très ample), $\varphi_D : C \rightarrow \mathbb{P}^d = |D|^*$ le plongement correspondant. On identifie C à son image par φ_D . On se fixe un entier k , $0 \leq k \leq d$, et on désigne par G la grassmannienne $G(k, d)$ des sous-espaces projectifs de dimension k de $\mathbb{P}^d$. On se fixe un point fermé p de C . Pour tout i , $0 \leq i \leq d$, on pose $V_i = \overline{(i+1)p}$, alors $\dim(V_i) = i$ (corollaire 1.3) et $V = (V_i)_{0 \leq i \leq d}$ est un drapeau dans $\mathbb{P}^d$ (le drapeau osculateur de C en p). Pour tout indice de Schubert

$$a = (a_0, a_1, \dots, a_k), \quad d - k \geq a_0 \geq a_1 \geq \dots \geq a_k \geq 0$$

on désigne par $\sigma_a(p)$ le cycle de Schubert $\sigma_a(V)$ dans G :

$$\sigma_a(p) = \{\Lambda \in G : \forall i, 0 \leq i \leq k, \dim(\Lambda \cap \overline{(d - k + i - a_i + 1)p}) \geq i\} .$$

On pose par convention $a_{-1} = d - k$. Pour tout couple de points fermés q et r (non nécessairement distincts) de C on désigne par $\tau(\overline{q+r})$ le cycle de Schubert $\sigma_{d-k-1, 0, \dots, 0}(V')$ dans G , où $V' = (V'_i)_{0 \leq i \leq d}$ est un drapeau quelconque dans $\mathbb{P}^d$ tel que V'_1 soit la droite $\overline{q+r}$ (corollaire 1.3) :

$$\tau(\overline{q+r}) = \{\Lambda \in G : \Lambda \cap \overline{q+r} \neq \emptyset\} .$$

Lemme 2.1.— Soient q et r deux points fermés (non nécessairement distincts) de C , distincts de p . Alors

(i) Si $\sigma_a(p) \cap \tau(\overline{q+r}) \neq \emptyset$, on a $a_k = 0$ ou $a_k = 1$.

(ii) Pour tout Λ , $\Lambda \in \sigma_a(p) \cap \tau(\overline{q+r})$ et tout i , $-1 \leq i \leq k-1$, on a

$$\dim(\Lambda \cap \overline{(d-k+i-a_i+1)p+q+r}) \geq i+1.$$

Démonstration.— Remarquons d'abord que pour tout d' , $0 \leq d' \leq d-1$, $\overline{q+r} \cap \overline{d'p} = \emptyset$. En effet, pour cela, il suffit de démontrer que $\overline{q+r} \cap \overline{(d-1)p} = \emptyset$. Or, s'il existait s appartenant à $\overline{q+r} \cap \overline{(d-1)p}$ on aurait $s \neq q$ (car $q \neq p$ implique que $q \notin \overline{(d-1)p}$ (corollaire 1.3)) et par conséquent $\overline{q+r}$ serait la droite qui joint q et s et comme $s \in \overline{(d-1)p+q}$ et $q \in \overline{(d-1)p+q}$ on aurait $\overline{q+r} \subset \overline{(d-1)p+q}$ ce qui est absurde (car $r \neq p$ implique $\overline{q+r} \not\subset \overline{(d-1)p+q}$ (corollaire 1.3)).

Cela établi, soit i , $-1 \leq i \leq k$, et supposons d'abord que

$$(1) \quad d - k + i - a_i + 1 \leq d - 1.$$

Alors ce qui précède montre que $\overline{q+r} \cap \overline{(d-k+i-a_i+1)p} = \emptyset$. Par conséquent si $\Lambda \in \sigma_a(p) \cap \tau(\overline{q+r})$ ce qui implique en particulier que $\Lambda \cap \overline{q+r} \neq \emptyset$, il existe η tel que $\eta \in \Lambda \cap \overline{q+r}$ et $\eta \notin \Lambda \cap \overline{(d-k+i-a_i+1)p}$ donc $\dim(\Lambda \cap \overline{(d-k+i-a_i+1)p+q+r}) \geq \dim(\Lambda \cap \overline{(d-k+i-a_i+1)p}) + 1 \geq i+1$ (car $\Lambda \in \sigma_a(p)$). Cela démontre l'assertion (ii) dans la cas où l'inégalité (1) est vérifiée et montre que pour $i = k$ l'inégalité (1) est impossible si $\sigma_a(p) \cap \tau(\overline{q+r}) \neq \emptyset$; donc dans ce cas $d-k+k-a_k+1 > d-1$ c'est-à-dire $a_k < 2$ ce qui démontre l'assertion (i).

Reste à démontrer (ii) pour i , $-1 \leq i \leq k-1$, tel que $d-k+i-a_i+1 > d-1$. Mais alors $\overline{(d-k+i-a_i+1)p+q+r} = \mathbb{P}^d$ (corollaire 1.3) donc $\dim(\Lambda \cap \overline{(d-k+i-a_i+1)p+q+r}) = k \geq i+1$ ce qui démontre le lemme.

Notation 2.2.— Pour tout point fermé q de C et tout i_0 , $-1 \leq i_0 < k$, on pose :

$$W_{i_0}(q) = \left\{ \Lambda \in G : \begin{array}{ll} \dim(\Lambda \cap \overline{(d-k+i-a_i+2)p}) \geq i+1 & -1 \leq i < i_0 \\ \dim(\Lambda \cap \overline{(d-k+i_0-a_{i_0}+2)p+q}) \geq i_0+1 & \\ \dim(\Lambda \cap \overline{(d-k+i-a_i+1)p+q}) \geq i+1 & i_0 < i < k \end{array} \right\}$$

Remarque 2.3.— On remarque que pour tout i_0 , $-1 \leq i_0 < k$, tel que $a_{i_0+1} < a_{i_0}$ on a $W_{i_0}(p) = \sigma_{a_{-1}, a_0, \dots, a_{i_0-1}, \dots, a_{k-1}}(p)$.

Lemme 2.4.— Soient q un point fermé de C et i_0 , $-1 \leq i_0 < k-1$, et supposons que $a_{i_0+1} = a_{i_0}$. Alors $W_{i_0}(q) \subset W_{i_0+1}(q)$.

Démonstration.— Soit $\Lambda \in W_{i_0}(q)$ et démontrons que $\Lambda \in W_{i_0+1}(q)$. Il suffit de démontrer que :

$$(1) \quad \dim(\Lambda \cap \overline{(d-k+i_0-a_{i_0}+2)p}) \geq i_0+1$$

et

$$(2) \quad \dim(\Lambda \cap \overline{(d-k+i_0+1-a_{i_0+1}+2)p+q}) \geq i_0 + 1 + 1$$

Or par l'hypothèse $\Lambda \in W_{i_0}(q)$ comme $i_0 + 1 < k$ on a

$$(3) \quad \dim(\Lambda \cap \overline{(d-k+i_0+1-a_{i_0+1}+1)p+q}) \geq i_0 + 1 + 1$$

On remarque que (2) est une conséquence immédiate de (3). D'autre part comme $a_{i_0+1} = a_i$, (3) implique que

$$\dim(\Lambda \cap \overline{(d-k+i_0-a_{i_0}+2)p+q}) \geq i_0 + 2$$

ce qui implique (1) (corollaire 1.3).

Lemme 2.5.— Soient q un point fermé de C différent de p et $\Lambda \in \sigma_a(p)$ tel que :

$$\dim(\Lambda \cap \overline{(d-k+i-a_i+2)p+q}) \geq i + 1 \quad -1 \leq i < k$$

Alors :

- (i) Si $a_k > 0$, $\Lambda \in \sigma_{a_{-1}, a_0, \dots, a_{k-1}}(p) = \sigma_{d-k, a_0, \dots, a_{k-1}}(p)$.
- (ii) Si $a_k = 0$, $\Lambda \in \bigcup_{\substack{-1 \leq i < k \\ a_{i+1} < a_i}} W_i(q) \cup \sigma_{a_{-1}, a_0, \dots, a_{k-1}}(p)$.

Démonstration.— Soit $I = \{i \in [-1, k] : \dim(\Lambda \cap \overline{(d-k+i-a_i+2)p}) \leq i\}$. L'ensemble I n'est pas vide car $k \in I$. Soit i_0 le plus petit élément de I . On a

$$(1) \quad \dim(\Lambda \cap \overline{(d-k+i-a_i+2)p}) \geq i + 1 \quad -1 \leq i < i_0.$$

Si $i_0 = k$ on en déduit que $\Lambda \in \sigma_{a_{-1}, a_0, \dots, a_{k-1}}(p)$.

On peut donc supposer que $i_0 \in [-1, k-1]$.

Par hypothèse on a alors

$$(2) \quad \dim(\Lambda \cap \overline{(d-k+i_0-a_{i_0}+2)p+q}) \geq i_0 + 1$$

et par définition de i_0 on a

$$(3) \quad \dim(\Lambda \cap \overline{(d-k+i_0-a_{i_0}+2)p}) \leq i_0.$$

On remarque d'abord que comme $i_0 < k$, l'inégalité (3) implique que $\overline{(d-k+i_0-a_{i_0}+2)p} \subsetneq \mathbb{P}^d$ donc (corollaire 1.3)

$$(4) \quad d - k + i_0 - a_{i_0} + 2 \leq d$$

et en particulier $\dim \overline{(d-k+i_0-a_{i_0}+2)p} = d - k + i_0 - a_{i_0} + 1$ (corollaire 1.3) et par conséquent (3) implique que $d - k + i_0 - a_{i_0} + 1 + k - d \leq i_0$ donc

$$(5) \quad a_{i_0} \geq 1.$$

D'autre part les inégalités (2) et (3) impliquent que

$$(\Lambda \cap \overline{(d-k+i_0-a_{i_0}+2)p+q}) - (\Lambda \cap \overline{(d-k+i_0-a_{i_0}+2)p}) \neq \emptyset.$$

Soit donc t tel que

$$(6) \quad t \in \Lambda, \quad t \in \overline{(d-k+i_0-a_{i_0}+2)p+q} \quad \text{et} \quad t \notin \overline{(d-k+i_0-a_{i_0}+2)p}$$

On remarque que tout sous-espace projectif de $\mathbb{P}^d$ qui contient $\overline{(d-k+i_0-a_{i_0}+2)p}$ et t , contient $\overline{(d-k+i_0-a_{i_0}+2)p+q}$ et en particulier q (corollaire 1.3).

On en déduit que

$$(7) \quad t \notin \overline{d'p} \quad 0 \leq d' \leq d.$$

En effet il suffit de démontrer que $t \notin \overline{dp}$. Or l'inégalité (4) implique que $\overline{(d-k+i_0-a_{i_0}+2)p} \subset \overline{dp}$ donc si t appartenait à $\overline{dp}$, q appartiendrait aussi à $\overline{dp}$ ce qui est contraire à l'hypothèse $q \neq p$ (corollaire 1.3).

On déduit de (6) et (7) que $\Lambda \notin \overline{dp}$ et l'hypothèse $\Lambda \in \sigma_a(p)$ implique que $\Lambda \in \overline{(d-a_k+1)p}$. On en déduit que

$$(8) \quad a_k = 0$$

ce qui démontre (i).

Soit i tel que $i_0 < i < k$. Alors $d-k+i-a_i+1 \leq d$ donc (7) implique que $t \notin \overline{(d-k+i-a_i+1)p}$. Or $i_0 < i$ implique que $d-k+i-a_i+1 \geq d-k+i_0-a_{i_0}+2$ donc (6) implique que $t \in \overline{(d-k+i-a_i+1)p+q}$. On déduit que

$$\dim(\Lambda \cap \overline{(d-k+i-a_i+1)p+q}) \geq \dim(\Lambda \cap \overline{(d-k+i-a_i+1)p}) + 1$$

et comme l'hypothèse $\Lambda \in \sigma_a(p)$ implique que

$$\dim(\Lambda \cap \overline{(d-k+i-a_i+1)p}) \geq i$$

on déduit que

$$(9) \quad \dim(\Lambda \cap \overline{(d-k+i-a_i+1)p+q}) \geq i+1 \quad i_0 < i < k.$$

Alors (1), (2) et (9) impliquent que $\Lambda \in W_{i_0}(q)$. Si $i_0 = k-1$, (5) et (8) impliquent que $\Lambda \in \bigcup_{\substack{-1 \leq i < k \\ a_{i+1} < a_i}} W_i(q)$. Si $i_0 < k-1$ vu que (3) implique que

$\Lambda \notin W_{i_0+1}$, le lemme 2.4 implique que $a_{i_0+1} \neq a_{i_0}$ donc on a aussi $\Lambda \in \bigcup_{\substack{-1 \leq i < k \\ a_{i+1} < a_i}} W_i(q)$

ce qui démontre la partie (ii).

THÉOREME 2.6.— Soit g un entier, $g \geq 0$, et supposons $k < d$. Alors il existe un ouvert non vide U de C^{2g} (donc dense) tel que pour tout point fermé

$(q_1, r_1, \dots, q_g, r_g)$ de U on ait

$$\dim(\sigma_a(p) \cap \tau(\overline{q_1+r_1}) \cap \dots \cap \tau(\overline{q_g+r_g})) \leq \sup\{-1, (k+1)(d-k) - \sum_{i=0}^k a_i - g(d-k-1)\}.$$

Démonstration.— On remarque d'abord que si l'intersection

$\sigma_a(p) \cap \tau(\overline{q_1+r_1}) \cap \dots \cap \tau(\overline{q_g+r_g})$ est non vide, la dimension de chacune de ses composantes irréductibles est supérieure ou égale à

$$\dim(G) - \text{codim}(\sigma_a(p)) - \sum_{i=1}^g \text{codim} \tau(\overline{q_i+r_i}) = (k+1)(d-k) - \sum_{i=0}^k a_i - g(d-k-1).$$

D'autre part on constate facilement que l'ensemble

$$\{(\Lambda, q_1, r_1, \dots, q_g, r_g) \in G \times C^{2g} : \Lambda \in \sigma_a(p) \cap \tau(\overline{q_1+r_1}) \cap \dots \cap \tau(\overline{q_g+r_g})\}$$

est l'ensemble des points fermés d'un sous-schéma fermé T de $G \times C^{2g}$ dont la fibre au dessus d'un point fermé $(q_1, r_1, \dots, q_g, r_g)$ de C^{2g} est

$\sigma_a(p) \cap \tau(\overline{q_1+r_1}) \cap \dots \cap \tau(\overline{q_g+r_g})$. Le morphisme de projection $T \rightarrow C^{2g}$ étant

propre, le théorème sera établi si on démontre qu'il existe un point fermé $(q_1, r_1, \dots, q_g, r_g)$ de C^{2g} vérifiant les conditions du théorème.

Nous allons démontrer le théorème par récurrence sur g . Pour $g = 0$ le théorème est trivial et pour $g > 0$ si $a_k > 1$ il est une conséquence immédiate du lemme 2.1. Supposons donc le théorème établi pour g et démontrons le pour $g + 1$ en supposant que $a_k = 0$ ou $a_k = 1$. L'intersection d'une famille finie d'ouverts non vides de C^{2g} étant non vide, l'hypothèse de récurrence implique qu'il existe un point fermé $(q_1, r_1, \dots, q_g, r_g)$ de C^{2g} tel que si l'on pose $\tau = \tau(\overline{q_1 + r_1}) \cap \dots \cap \tau(\overline{q_g + r_g})$, pour tout indice de Schubert

$$b = (b_0, b_1, \dots, b_k) \quad d - k \geq b_0 \geq b_1 \geq \dots \geq b_k \geq 0$$

on ait

$$\dim(\sigma_b(p) \cap \tau) \leq \sup\{-1, (k+1)(d-k) - \sum_{i=0}^k b_i - g(d-k-1)\}.$$

Considérons l'ensemble

$$\{(\Lambda, q, r) \in G \times (C - \{p\}) \times (C - \{p\}) : \Lambda \in \sigma_a(p) \cap \tau(\overline{q+r})\}.$$

Il est facile de constater qu'il est l'ensemble des points fermés d'un sous-schéma fermé Σ de $G \times (C - \{p\}) \times (C - \{p\})$ dont la fibre $\Sigma(q, r)$ au dessus d'un point fermé (q, r) de $(C - \{p\}) \times (C - \{p\})$ est $\sigma_a(p) \cap \tau(\overline{q+r})$. Soit $\bar{\Sigma}$ l'adhérence schématique de Σ dans $G \times (C - \{p\}) \times C$ et $\pi : \bar{\Sigma} \rightarrow (C - \{p\}) \times C$ la projection. Pour tout point fermé (q, r) de $C - \{p\} \times C$ on désigne par $\bar{\Sigma}(q, r)$ la fibre de $\bar{\Sigma}$ au dessus de (q, r) ($\bar{\Sigma}(q, r) = \pi^{-1}(q, r)$) et si $r \neq p$ on a $\bar{\Sigma}(q, r) = \Sigma(q, r)$. On pose $\Sigma' = \pi^{-1}((C - \{p\}) \times \{p\})$; Σ' est un sous-schéma fermé de $G \times (C - \{p\})$. Soit $\bar{\Sigma}'$ l'adhérence schématique de Σ' dans $G \times C$, et $\pi' : \bar{\Sigma}' \rightarrow C$ la projection. Pour tout point fermé q de C (resp. de $C - \{p\}$) on note $\bar{\Sigma}'(q)$ (resp. $\Sigma'(q)$) la fibre de $\bar{\Sigma}'$ (resp. Σ') au dessus de q ; si $q \neq p$ on a $\bar{\Sigma}'(q) = \Sigma'(q) = \bar{\Sigma}(q, p)$.

Or si (Λ, q, r) est un point fermé de Σ , $\Lambda \in \sigma_a(p) \cap \tau(\overline{q+r})$ et le lemme 2.1 implique que

$$\dim(\Lambda \cap \overline{(d-k+i-a_i+1)p+q+r}) \geq i+1 \quad -1 \leq i \leq k-1.$$

Comme il s'agit des conditions fermées on déduit que si (Λ, q) est un point fermé de Σ' (c'est-à-dire si (Λ, q, p) est un point fermé de $\bar{\Sigma}$) alors $\Lambda \in \sigma_a(p)$ et

$$\dim(\Lambda \cap \overline{(d-k+i-a_i+2)p+q}) \geq i+1 \quad -1 \leq i \leq k-1.$$

Alors le lemme 2.5 implique que :

- (i) Si $a_k = 1$ alors $\Lambda \in \sigma_{a-1, a_0, \dots, a_{k-1}}(p)$.
- (ii) Si $a_k = 0$ alors $\Lambda \in \bigcup_{\substack{-1 \leq i < k \\ a_{i+1} < a_i}} W_i(q) \cup \sigma_{a-1, a_0, \dots, a_{k-1}}(p)$.

Comme il s'agit de nouveau des conditions fermées on déduit que si Λ est un point fermé de $\bar{\Sigma}'(p)$ alors :

- (i) Si $a_k = 1$ alors $\Lambda \in \sigma_{a_{-1}, a_0, \dots, a_{k-1}}(p)$
- (ii) Si $a_k = 0$ alors $\Lambda \in \bigcup_{\substack{-1 \leq i < k \\ a_{i+1} < a_i}} W_i(p) \cup \sigma_{a_{-1}, a_0, \dots, a_{k-1}}(p) =$
 $= \bigcup_{\substack{-1 \leq i < k \\ a_{i+1} < a_i}} \sigma_{a_{-1}, a_0, \dots, a_{i-1}, \dots, a_{k-1}}(p) \cup \sigma_{a_{-1}, a_0, \dots, a_{k-1}}(p)$ (remarque 2.3)

Or $a_k = 0$ et $k < d$ impliquent que

$$\sigma_{a_{-1}, a_0, \dots, a_{k-1}}(p) \subset \bigcup_{\substack{-1 \leq i < k \\ a_{i+1} < a_i}} \sigma_{a_{-1}, a_0, \dots, a_{i-1}, \dots, a_{k-1}}(p)$$

On a donc les inclusions ensemblistes :

- (i) Si $a_k = 1$ alors $\bar{\Sigma}'(p) \subset \sigma_{a_{-1}, a_0, \dots, a_{k-1}}(p)$.
- (ii) Si $a_k = 0$ alors $\bar{\Sigma}'(p) \subset \bigcup_{\substack{-1 \leq i < k \\ a_{i+1} < a_i}} \sigma_{a_{-1}, a_0, \dots, a_{i-1}, \dots, a_{k-1}}(p)$.

On en déduit que si $a_k = 1$

$$\dim(\bar{\Sigma}'(p) \cap \tau) \leq \dim(\sigma_{a_{-1}, a_0, \dots, a_{k-1}}(p) \cap \tau)$$

et par l'hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned} \dim(\sigma_{a_{-1}, a_0, \dots, a_{k-1}}(p) \cap \tau) &\leq \sup\{-1, (k+1)(d-k) - \sum_{i=-1}^{k-1} a_i - g(d-k-1)\} = \\ &= \sup\{-1, (k+1)(d-k) - \sum_{i=0}^k a_i - (g+1)(d-k-1)\} . \end{aligned}$$

De même si $a_k = 0$

$$\dim(\bar{\Sigma}'(p) \cap \tau) \leq \sup_{\substack{-1 \leq i < k \\ a_{i+1} < a_i}} \dim(\sigma_{a_{-1}, a_0, \dots, a_{i-1}, \dots, a_{k-1}}(p) \cap \tau)$$

et par l'hypothèse de récurrence pour tout i , $-1 \leq i < k$, tel que $a_{i+1} < a_i$

$$\begin{aligned} \dim(\sigma_{a_{-1}, a_0, \dots, a_{i-1}, \dots, a_{k-1}}(p) \cap \tau) &\leq \sup\{-1, (k+1)(d-k) - (\sum_{i=-1}^{k-1} a_i - 1) - g(d-k-1)\} = \\ &= \sup\{-1, (k+1)(d-k) - \sum_{i=0}^k a_i - (g+1)(d-k-1)\} \end{aligned}$$

Dans les deux cas on a donc

$$\dim(\bar{\Sigma}'(p) \cap \tau) \leq \sup\{-1, (k+1)(d-k) - \sum_{i=0}^k a_i - (g+1)(d-k-1)\} .$$

Le morphisme de projection $\bar{\Sigma}' \cap (\tau \times C) \rightarrow C$ étant un morphisme propre et pour tout point fermé q de C la fibre au dessus de q étant égale à $\bar{\Sigma}'(q) \cap \tau$ qui est égale à $\bar{\Sigma}(q, p) \cap \tau$ si $q \neq p$, on déduit qu'il existe un point fermé q de $C - \{p\}$ tel que

$$\dim(\bar{\Sigma}(q, p) \cap \tau) \leq \sup\{-1, (k+1)(d-k) - \sum_{i=0}^k a_i - (g+1)(d-k-1)\} .$$

De même le morphisme de projection $\bar{\Sigma} \cap (\tau \times (C - \{p\}) \times C) \rightarrow (C - \{p\}) \times C$ étant propre et pour tout point fermé (q, r) de $(C - \{p\}) \times C$ la fibre au dessus de

(q, r) étant égale à $\overline{\Sigma}(q, r) \cap \tau$ qui est égale à $\sigma_a(p) \cap \tau(\overline{q+r}) \cap \tau$ si $r \neq p$, on déduit qu'il existe un point fermé (q, r) de $(C - \{p\}) \times (C - \{p\})$ tel que

$$\dim(\sigma_a(p) \cap \tau(\overline{q+r}) \cap \tau) \leq \sup\{-1, (k+1)(d-k) - \sum_{i=0}^k a_i - (g+1)(d-k-1)\}$$

ce qui démontre le théorème.

§ 3. Courbes de Castelnuovo

Dans ce paragraphe on donnera un aperçu de la théorie des courbes canoniques de Castelnuovo.

Une courbe de Castelnuovo de genre arithmétique g , est obtenue en identifiant g paires de points fermés de $\mathbb{P}^1$. Plus précisément pour tout point fermé $t = (p_1, q_1, \dots, p_g, q_g)$ de $(\mathbb{P}^1)^{2g}$ tel que l'ensemble $\{p_1, q_1, \dots, p_g, q_g\}$ soit formé de $2g$ points deux à deux distincts (ce qui revient à dire que t appartient à l'ouvert $(\mathbb{P}^1)^{2g} - \Delta$ de $(\mathbb{P}^1)^{2g}$ où Δ est la réunion de toutes les diagonales partielles de $(\mathbb{P}^1)^{2g}$) on définit une relation d'équivalence R_t sur $\mathbb{P}^1$ par

$$(pR_t q) \Leftrightarrow [(p=q) \text{ ou } (\exists \alpha, 1 \leq \alpha \leq g : (p=p_\alpha \text{ et } q=q_\alpha) \text{ ou } (p=q_\alpha \text{ et } q=p_\alpha))],$$

on munit l'ensemble quotient C_t de la topologie quotient et on définit un faisceau $\mathcal{O}_{C_t}$ en posant pour tout ouvert U de C_t

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_{C_t}) = \{f \in \Gamma(\pi^{-1}(U), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) : \forall \alpha, 1 \leq \alpha \leq g : (p_\alpha \in \pi^{-1}(U) \Rightarrow f(p_\alpha) = f(q_\alpha))\}$$

où $\pi : \mathbb{P}^1 \rightarrow C_t$ désigne la surjection canonique. Pour cette structure, C_t est une courbe projective, à g point doubles ordinaires comme seules singularités, dont le normalisé est $\mathbb{P}^1$, appelée courbe de Castelnuovo, et $\pi : \mathbb{P}^1 \rightarrow C_t$ est une normalisation de C_t .

On définit le faisceau des différentiels abéliens Ω sur C_t en posant pour tout ouvert U de C_t

$$\Gamma(U, \Omega) = \{\omega : \omega \text{ est une 1-forme méromorphe sur } \pi^{-1}(U) \text{ qui a au plus des pôles simples sur } \pi^{-1}(U) \cap \{p_1, q_1, \dots, p_g, q_g\} \text{ et telle que pour tout } \alpha, 1 \leq \alpha \leq g, \text{ tel que } p_\alpha \in \pi^{-1}(U) \text{ on ait } \text{Res}_{p_\alpha}(\omega) + \text{Res}_{q_\alpha}(\omega) = 0\}.$$

Le faisceau Ω est un $\mathcal{O}_{C_t}$ -module inversible tel que $h^0(\Omega) = g$ et il est très ample sauf s'il existe une involution u de $\mathbb{P}^1$ (un automorphisme tel que $u^2 = \text{id}_{\mathbb{P}^1}$) telle que pour tout $\alpha, 1 \leq \alpha \leq g, u(p_\alpha) = q_\alpha$, auquel cas on dit que C_t est hyperelliptique. Autrement dit, si G désigne le groupe des involutions de $\mathbb{P}^1$,

$$\Phi : G \times (\mathbb{P}^1)^g \longrightarrow (\mathbb{P}^1)^{2g}$$

le morphisme défini par

$$\Phi(u, p_1, \dots, p_g) = (p_1, u(p_1), \dots, p_g, u(p_g))$$

et Z l'image de Φ , alors C_t est hyperelliptique si et seulement si t appartient à Z . Or Z est un fermé de $(\mathbb{P}^1)^{2g}$, Φ est injectif pour $g \geq 2$ et

$\dim(G) = 2$, donc pour $g \geq 2$, $\dim(Z) = g + 2$ ce qui prouve que pour $g \geq 3$, Z est un fermé d'intérieur vide de $(\mathbb{P}^1)^{2g}$ (pour $g \geq 3$ une courbe de Castelnuovo "générale" est non-hyperelliptique). Si C_t est une courbe de Castelnuovo non hyperelliptique on appelle plongement canonique de C_t dans $\mathbb{P}^{g-1}$ l'immersion fermée $\varphi_\Omega : C_t \hookrightarrow \mathbb{P}^{g-1}$ définie par Ω . En termes de coordonnées, si x est une coordonnée affine de $\mathbb{P}^1$ telle que pour tout α , $1 \leq \alpha \leq g$, $\lambda_\alpha = x(p_\alpha)$ et $\lambda'_\alpha = x(q_\alpha)$ soient finis et si on pose $\omega_\alpha = \frac{dx}{(x - \lambda_\alpha)(x - \lambda'_\alpha)}$ alors $(\omega_\alpha)_{1 \leq \alpha \leq g}$ est une base de $H^0(C_t, \Omega)$ et si C_t n'est pas hyperelliptique le plongement canonique φ_Ω est donné par $\varphi_\Omega(x) = (\omega_1(x), \dots, \omega_g(x))$.

Soit D un diviseur de C_t . On note, comme dans le cas de courbes normales, $|D|$ l'espace projectif des diviseurs positifs de C_t linéairement équivalents à D , $d(D)$ le degré de D et $r(D)$ la dimension de $|D|$ et on a une formule de Riemann-Roch géométrique :

PROPOSITION 3.1.— Soient $C_t \hookrightarrow \mathbb{P}^{g-1}$ une courbe de Castelnuovo de genre arithmétique $g \geq 3$, non hyperelliptique canoniquement plongée dans $\mathbb{P}^{g-1}$ et D un diviseur positif de C_t de degré d dont le support ne rencontre pas les points doubles de C_t . Alors on a

$$\dim(\overline{D}) = d - 1 - r(D)$$

Pour terminer notre discussion de courbes de Castelnuovo nous allons étudier les diviseurs spéciaux de ces courbes.

Pour tout couple d'entiers d et r , tels que $0 \leq d \leq 2g - 2$ et $\sup\{0, d - g + 1\} \leq r$, on note J_d^r l'ensemble des classes (dans la jacobienne généralisée de C_t) de diviseurs positifs de degré d , dont le support ne rencontre pas les points doubles de C_t , tels que $r(D) \geq r$. L'ensemble J_d^r est une partie localement fermée de la jacobienne (généralisée) de C_t .

Pour étudier les séries linéaires $|D|$ où D est un diviseur positif de degré d , $d > 0$, de C_t dont le support ne rencontre pas les points doubles de C_t on considère la normalisation $\pi : \mathbb{P}^1 \rightarrow C_t$ et on suppose $\mathbb{P}^1$ plongé dans $\mathbb{P}^d$ par l'immersion fermée correspondant à un diviseur de degré d de $\mathbb{P}^1$. Alors $\tilde{D} = \pi^{-1}(D)$ est un diviseur positif de degré d de $\mathbb{P}^1$ et $\tilde{\tilde{D}}$ est un hyperplan de $\mathbb{P}^d$ tel que $(\mathbb{P}^1, \tilde{\tilde{D}}) = \tilde{D}$. Comme le support de D ne rencontre pas les points doubles de C_t , le support de $\tilde{D}$ ne rencontre pas l'ensemble $\{p_1, q_1, \dots, p_g, q_g\}$ et pour tout α , $1 \leq \alpha \leq g$, $\tilde{\tilde{D}} \cap \overline{p_\alpha + q_\alpha} = \{r_\alpha\}$ où $r_\alpha \neq p_\alpha$ et $r_\alpha \neq q_\alpha$. Si D' est un diviseur positif de C_t linéairement équivalent à D il existe une fonction méromorphe f sur C_t telle que $D' = D + \text{div}(f)$. La fonction méromorphe f est régulière aux points doubles de C_t et $\tilde{f} = f \circ \pi$ est une fonction méromorphe sur $\mathbb{P}^1$ qui n'a pas de pôles aux points de l'ensemble $\{p_1, q_1, \dots, p_g, q_g\}$ et telle que pour tout α , $1 \leq \alpha \leq g$, $\tilde{f}(p_\alpha) = \tilde{f}(q_\alpha)$. D'autre part $\tilde{D}' = \pi^{-1}(D')$ est un diviseur positif de degré d de $\mathbb{P}^1$, linéairement équivalent à $\tilde{D}$, tel que $\tilde{D}' = \tilde{D} + \text{div}(\tilde{f})$ et $\tilde{\tilde{D}}'$ est un hyperplan de $\mathbb{P}^d$. Si on désigne par L (resp. L')

une équation homogène de l'hyperplan $\widetilde{D}$ (resp. $\widetilde{D}'$), on a $\widetilde{f} = \lambda \frac{L'}{L}$ où λ est une constante différente de 0 et pour tout α , $1 \leq \alpha \leq g$, les égalités $\widetilde{f}(p_\alpha) = \widetilde{f}(q_\alpha)$ et $L(r_\alpha) = 0$ impliquent que $L'(r_\alpha) = 0$ donc que $\widetilde{D}'$ passe aussi par r_α . On déduit que l'ensemble $|D|$ est en bijection (par l'application $D' \mapsto \widetilde{D}'$) avec l'ensemble des hyperplans de $\mathbb{P}^d$ qui contiennent un sous-espace projectif Λ de $\mathbb{P}^d$ ($\Lambda = \bigcap_{D' \in |D|} \widetilde{D}'$) de dimension $d - r(D) - 1$ qui rencontre, pour tout α , $1 \leq \alpha \leq g$, la droite $\overline{p_\alpha + q_\alpha}$ (au point r_α). On déduit donc une application

$$\Psi : J_d^r \longrightarrow G(d - r - 1, d)$$

(application qui associe Λ à la classe de D) qui est un morphisme injectif dont l'image est contenue dans

$$\tau(\overline{p_1 + q_1}) \cap \dots \cap \tau(\overline{p_g + q_g}).$$

Or le théorème 2.6 affirme l'existence d'un ouvert dense U de C^{2g} tel que si $t \in U$

$$\dim(\tau(\overline{p_1 + q_1}) \cap \dots \cap \tau(\overline{p_g + q_g})) \leq \sup\{-1, ((d-r-1)+1)(d-(d-r-1)) - g(d-(d-r-1)-1)\} = \\ = \sup\{-1, g - (r+1)(g-d+r)\}$$

on a donc la proposition

PROPOSITION 3.2.— *Il existe un ouvert dense U de C^{2g} tel que si $t \in U$ on a*

$$\dim(J_d^r) \leq \sup\{-1, g - (r+1)(g-d+r)\}.$$

§ 4. Réduction de la conjecture de Brill-Noether à celle de Castelnuovo-Severi-Kleiman

Dans ce paragraphe nous allons exposer l'idée de la méthode de Griffiths-Harris pour ramener la conjecture de Brill-Noether à celle de Castelnuovo-Severi-Kleiman.

Le point de départ est la formule de Riemann-Roch géométrique (corollaire 1.2) :

Si C est une courbe (projective, lisse, connexe) de genre g , $g \geq 3$, non hyperelliptique, plongée canoniquement dans $\mathbb{P}^{g-1}$, D un diviseur positif de C de degré d et de dimension projective $r(D) = r$ alors

$$\dim(\overline{D}) = d - r - 1$$

et $C \cdot \overline{D} \geq D$ (si $\overline{D} \neq \mathbb{P}^{g-1}$).

Alors si on considère la grassmannienne $G(d-r-1, g-1)$ et si on suppose que $0 \leq d \leq 2g-2$ et $\sup\{0, d-g+1\} \leq r$ l'application

$$\varphi : C_d^r - C_d^{r+1} \longrightarrow G(d-r-1, g-1)$$

définie par $\varphi(D) = \overline{D}$, est un morphisme quasi-fini dont l'image est contenue dans le fermé

$$C_d^r = \{\Lambda : G(d-r-1, g-1) : d(C \cdot \Lambda) \geq d\}$$

de la grassmannienne.

Alors la conjecture de Brill-Noether est ramenée à l'assertion suivante :

(*) Pour tout couple d'entiers d et r tels que $0 \leq d \leq 2g-2$ et $\sup\{0, d-g+1\} \leq r \leq d$, si C est "générale" on a :

$$\dim(G_d^r) \leq \sup\{-1, g - (r+1)(g-d+r) + r\}.$$

En effet comme on sait que pour $r' > \frac{d}{2}$ on a $C_d^{r'} = \emptyset$ on déduit que :

$$C_d^r = \bigcup_{r \leq r' \leq d/2} (C_d^{r'} - C_d^{r'+1}).$$

Donc l'assertion (*), le fait que φ est quasi-fini et la remarque que $g - (r+1)(g-d+r) + r$ est une fonction décroissante de r , pour $r \geq d-g+1$ et g et d constants, impliquent que :

$$\dim(C_d^r) \leq \sup\{-1, g - (r+1)(g-d+r) + r\}.$$

Les fibres du morphisme $C_d^r \rightarrow W_d^r$ étant de dimension supérieure ou égale à r on déduit que :

$$\dim(W_d^r) \leq \sup\{-1, g - (r+1)(g-d+r)\}$$

et comme on sait déjà que :

$$\dim(W_d^r) \geq \sup\{-1, g - (r+1)(g-d+r)\}$$

([20], [11], [14], [15]) on déduit l'égalité :

$$\dim(W_d^r) = \sup\{-1, g - (r+1)(g-d+r)\}.$$

Pour démontrer l'assertion (*) on remarque qu'il suffit de la démontrer pour une seule courbe C . En effet les G_d^r peuvent être considérés comme les fibres d'un schéma propre au dessus de l'ouvert V de M_g formé des courbes non-hyperelliptiques (plus exactement ce schéma existe uniquement localement pour la topologie étale sur V).

D'autre part, on sait que pour toute courbe de Castelnuovo "générale" C_t , de genre arithmétique g , $g \geq 3$, il existe un schéma algébrique X de dimension 1, un sous-schéma fermé $\mathcal{C}$ de $X \times \mathbb{P}^{g-1}$, π -plat, où π désigne la projection $\pi : X \times \mathbb{P}^{g-1} \rightarrow X$, et un point fermé x_0 de X , tels que la fibre au dessus de x_0 soit C_t canoniquement plongée dans $\mathbb{P}^{g-1}$ et pour tout point fermé x de X , différent de x_0 , la fibre au dessus de x soit une courbe lisse connexe de genre g canoniquement plongée dans $\mathbb{P}^{g-1}$ [13]. Pour tout couple d'entiers d et r , tels que

$$0 \leq d \leq 2g-2 \quad \text{et} \quad \sup\{0, d-g+1\} \leq r \leq d$$

l'ensemble :

$$\{(\Lambda, x) \in G(d-r-1, g-1) \times (X - \{x_0\}) : d(\mathcal{C}(x). \Lambda) \geq d\}$$

où $\mathcal{C}(x)$ désigne la fibre de $\mathcal{C}$ au dessus de x) est l'ensemble des points fermés d'un sous-schéma fermé Σ_d^r de $G(d-r-1, g-1) \times (X - \{x_0\})$. Soit $\overline{\Sigma_d^r}$ l'adhérence schématique de Σ_d^r dans $G(d-r-1, g-1) \times X$. La projection $\overline{\Sigma_d^r} \rightarrow X$ étant un

morphisme propre, pour démontrer l'assertion (*) pour la fibre "générale" de $\mathcal{E}$ il suffit de démontrer que :

$$\dim(\overline{\Sigma_d^r}(x_0)) \leq \sup\{-1, g - (r+1)(g-d+r) + r\}$$

(où $\overline{\Sigma_d^r}(x_0)$ désigne la fibre de $\overline{\Sigma_d^r}$ au dessus de x_0). Cela n'est pas possible directement mais Griffiths et Harris arrivent au résultat voulu en étudiant simultanément $\overline{\Sigma_d^r}$ et $\overline{\Sigma_{2g-2-d}^{r-d+g-1}}$ (qui correspond aux séries linéaires duales) et ramènent l'assertion (*) au lemme suivant :

Lemme 4.1.— Soient $C_t \hookrightarrow \mathbb{P}^{g-1}$ une courbe de Castelnuovo "générale" de genre arithmétique g , $g \geq 3$, canoniquement plongée dans $\mathbb{P}^{g-1}$ et d, δ, r trois entiers tels que

$$0 \leq d \leq 2g-2, \quad \sup\{0, d-g+1\} \leq r \leq d, \quad 0 \leq \delta \leq d-r$$

(ce qui implique que $\delta < g$). Alors l'ensemble des sous-espaces projectifs Λ de $\mathbb{P}^{g-1}$ de dimension $d-r-1$ qui rencontrent exactement δ points doubles de C_t et tels que $d(C_t, \Lambda) \geq d+\delta$, est l'ensemble des points fermés d'une partie localement fermée de la grassmannienne $G(d-r-1, g-1)$ de dimension inférieure ou égale à

$$\sup\{-1, g - (r+1)(g-d+r) + r - \delta\}.$$

Démonstration.— En remarquant que, C_t étant "générale", la projection de $\mathbb{P}^{g-1} - \mathbb{P}^{\delta-1}$ sur $\mathbb{P}^{g-1-\delta}$, définie par le sous-espace projectif $\mathbb{P}^{\delta-1}$ de $\mathbb{P}^{g-1}$ engendré par δ points doubles de C_t , projette C_t sur une courbe de Castelnuovo "générale" $\overline{C_t}$, de genre arithmétique $g-\delta$, plongée canoniquement dans $\mathbb{P}^{g-1-\delta}$, et projette bijectivement l'ensemble des sous-espaces projectifs Λ de $\mathbb{P}^g$, de dimension $d-r-1$, qui passent par ces δ points doubles de C_t et seulement par ceux-là, et tels que $d(C_t, \Lambda) \geq d+\delta$, sur l'ensemble des sous-espaces projectifs $\overline{\Lambda}$ de $\mathbb{P}^{g-\delta-1}$, de dimension $d-r-\delta-1$, qui ne rencontrent pas les points doubles de $\overline{C_t}$, et tels que $d(\overline{C_t}, \overline{\Lambda}) \geq d-\delta$, et vu que

$$g - \delta - (r+1)[(g-\delta) - (d-\delta) + r] + r = g - (r+1)(g-d-r) + r - \delta$$

on voit qu'il suffit de démontrer le lemme pour $\delta = 0$.

Démontrons le lemme pour $\delta = 0$. Soit Λ un sous-espace projectif de $\mathbb{P}^{g-1}$, de dimension $d-r-1$, qui ne rencontre pas les points doubles de C_t et tel que $d(C_t, \Lambda) \geq d$. Alors, il existe un diviseur positif D de C_t , de degré d , dont le support ne rencontre pas les points doubles de C_t et tel que $D \leq C_t, \Lambda$, ce qui implique que $\overline{D} \subset \Lambda$. Soit ε la codimension de $\overline{D}$ dans Λ ($0 \leq \varepsilon \leq d-r-1$ et $\dim(\overline{D}) = d-r-1-\varepsilon$). Alors, la formule de Riemann-Roch géométrique pour les courbes de Castelnuovo (prop. 3.1) implique que $r(D) = d-1-\dim(\overline{D}) = r+\varepsilon$, ce qui prouve que la classe de D dans la jacobienne généralisée J de C_t appartient à $J_d^{r+\varepsilon} - J_d^{r+\varepsilon+1}$ (cf. notation § 3).

Posons $C_t^* = C_t - \{p_1, \dots, p_g\}$, où $\{p_1, \dots, p_g\}$ est l'ensemble des points

doubles de C_t , et notons $\pi : (C_t^*)^d \rightarrow J$ le morphisme qui associe à un point fermé $(r_1, \dots, r_d)$ de $(C_t^*)^d$ la classe du diviseur $r_1 + \dots + r_d$,

$$v : \pi^{-1}(J_d^{r+\varepsilon} - J_d^{r+\varepsilon+1}) \longrightarrow G(d-r-\varepsilon-1, g-1)$$

le morphisme qui associe à un point fermé $(r_1, \dots, r_d)$ de $\pi^{-1}(J_d^{r+\varepsilon} - J_d^{r+\varepsilon+1})$ le sous-espace projectif $\overline{r_1 + \dots + r_d}$ de $\mathbb{P}^{g-1}$ (qui est de dimension $d-r-\varepsilon-1$ (prop 3.1)), T le sous-schéma fermé de $G(d-r-\varepsilon-1, g-1) \times G(d-r-1, g-1)$ dont l'ensemble des points fermés est égal à :

$$\{(\Lambda', \Lambda) \in G(d-r-\varepsilon-1, g-1) \times G(d-r-1, g-1) : \Lambda' \subset \Lambda\},$$

$s_1 : T \rightarrow G(d-r-\varepsilon-1, g-1)$ et $s_2 : T \rightarrow G(d-r-1, g-1)$ les projections. En utilisant ces notations, ce qu'on vient de démontrer peut s'exprimer en disant que l'ensemble des sous-espaces projectifs Λ de $\mathbb{P}^{g-1}$, de dimension $d-r-1$, qui ne rencontrent pas les points doubles de C_t et tels que $(C_t, \Lambda) \geq d$ est contenu dans l'ensemble :

$$\bigcup_{0 \leq \varepsilon \leq d-r-1} s_2(s_1^{-1}(v(\pi^{-1}(J_d^{r+\varepsilon} - J_d^{r+\varepsilon+1})))) .$$

Or $\dim(J_d^{r+\varepsilon}) \leq \sup\{-1, g-(r+\varepsilon+1)(g-d+r+\varepsilon)\}$ (prop. 3.2), la dimension des fibres du morphisme

$$\pi|_{\pi^{-1}(J_d^{r+\varepsilon} - J_d^{r+\varepsilon+1})} : \pi^{-1}(J_d^{r+\varepsilon} - J_d^{r+\varepsilon+1}) \longrightarrow J_d^{r+\varepsilon} - J_d^{r+\varepsilon+1}$$

est égale à $r+\varepsilon$ et il est facile de voir que les fibres du morphisme s_1 sont de dimension $\varepsilon(g-d+r)$. On déduit donc que

$$\begin{aligned} \dim\left(\bigcup_{0 \leq \varepsilon \leq d-r-1} s_2(s_1^{-1}(v(\pi^{-1}(J_d^{r+\varepsilon} - J_d^{r+\varepsilon+1}))))\right) &\leq \\ &\leq \sup_{0 \leq \varepsilon \leq d-r-1} \sup\{-1, g-(r+\varepsilon+1)(g-d+r+\varepsilon) + r+\varepsilon + \varepsilon(g-d+r)\} = \\ &= \sup_{0 \leq \varepsilon \leq d-r-1} \sup\{-1, g-(r+1)(g-d+r) + r - \varepsilon(r+\varepsilon)\} = \\ &= \sup\{-1, g-(r+1)(g-d+r) + r\} \end{aligned}$$

ce qui démontre le lemme.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. ARBARELLO et M. CORNALBA - *Su una congettura di Petri*, à paraître dans *Comm. Math. Helv.*
- [2] E. ARBARELLO et M. CORNALBA - *Su una proprietà notevole dei morfismi di una curva a moduli generali in uno spazio proiettivo*, à paraître.
- [3] E. ARBARELLO, M. CORNALBA, P. GRIFFITHS et J. HARRIS - *Special divisors on algebraic curves*, à paraître.
- [4] E. ARBARELLO et E. SERNESI - *Petri's approach to the study of the ideal associated to a special divisor*, *Invent. Math.* 49(1978), 99-119.
- [5] A. BRILL et M. NOETHER - *Über die algebraischen Functionen und ihre Anwendungen in der Geometrie*, *Math. Ann.* 7(1874), 269-310.
- [6] G. CASTELNUOVO - *Numero delle involutione rationali giancenti sopra una curva di dato genere*, *Rend. della R. Acad. Lincei*, ser. 4,5(1889).
- [7] H.M. FARKAS - *Special divisors and analytic subloci of the Teichmüller space*, *Amer. J. Math.* 88(1966), 881-901.
- [8] D. GIESEKER - *Stable curves and special divisors : Petri's conjecture*, à paraître.
- [9] P. GRIFFITHS et J. HARRIS - *On the variety of special linear systems on a general algebraic curve*, *Duke Math. J.* 47,1(1980), 233-272.
- [10] R.C. GUNNING - *Jacobi varieties*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. (1972).
- [11] G. KEMPF - *Schubert methods with an application to algebraic curves*, Publ. Math. Centrum, Amsterdam (1971).
- [12] G. KEMPF - *On the geometry of a theorem of Riemann*, *Ann. of Math.* 98(1973), 178-185.
- [13] S. KLEIMAN - *r-special subschemes and an argument of Severi's*, *Advances in Math.* 22(1976), 1-23.
- [14] S. KLEIMAN et D. LAKSOV - *On the existence of special divisors*, *Amer. J. Math.* 94(1972), 431-436.
- [15] S. KLEIMAN et D. LAKSOV - *Another proof of the existence of special divisors*, *Acta Math.* 132(1974), 163-176.
- [16] D. LAKSOV - Appendice à l'article [13] de Kleiman, *Advances in Math.* 22(1976), 23-31.
- [17] R.F. LAX - *On the dimension of varieties of special divisors*, *Trans. Amer. Math. Soc.* 203(1975), 141-159.
- [18] R.F. LAX - *On the dimension of varieties of special divisors II*, *Ill. J. of Math.* 19(1975), 318-324.
- [19] I.G. MACDONALD - *Symmetric products of an algebraic curve*, *Topology* 1(1962), 319-343.

- [20] H.H. MARTENS - *On the varieties of special divisors on a curve*, Jour. Reine Angew. Math. 227(1967), 111-120.
- [21] H.H. MARTENS - *Varieties of special divisors on a curve II*, Jour. Reine Angew. Math. 233(1968), 89-100.
- [22] H.H. MARTENS - *From the classical theory of jacobian varieties*, Proceedings of the 15th Scandinavian Congress Oslo 1968, Lect. Notes in Math. 118, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, (1970), 74-98.
- [23] A. MATTUCK - *Symmetric products and jacobians*, Amer. J. Math. 83(1961), 189-206.
- [24] A. MATTUCK - *On symmetric products of curves*, Proc. Amer. Math. Soc. 13(1962), 82-87.
- [25] A. MATTUCK - *Secant bundles on symmetric products*, Amer. J. Math. 87(1965), 779-797.
- [26] A.L. MAYER - *Special divisors and the jacobian variety*, Math. Annalen 153(1964), 163-167.
- [27] T. MEIS - *Die minimale Blätterzahl der Konkretisierung einer kompakten Riemannschen Fläche*, Schriftenreihe des Mathematischen Instituts, Heft 16, Univ. Münster (1960).
- [28] K. PETRI - *Über Spezialkurven I*, Math. Ann. 93(1924), 182-209.
- [29] R.L.E. SCHWARZENBERGER - *Jacobians and symmetric products*, Ill. J. of Math. 7(1963), 257-268.
- [30] F. SEVERI - *Vorlesungen über algebraische Geometrie*, Teubner, Leipzig (1921), Anhang G.
- [31] L. SZPIRO - *Travaux de Kempf, Kleiman, Laksov sur les diviseurs exceptionnels*, Sém. Bourbaki 24e année, Exposé 417(1971-72).

Je viens de recevoir un preprint de William FULTON et Robert LAZARSFELD : *On the connectedness of degeneracy loci and special divisors* ; ils démontrent que si $g - (r+1)(g-d+r) > 0$ alors W_d^r est connexe pour une courbe quelconque et irréductible pour une courbe générale.

Georges MALTSINIOTIS
 E.R.A. 589 C.N.R.S.
 Ecole Normale Supérieure
 Centre de Mathématiques
 45 rue d'Ulm
 F-75230 PARIS CEDEX 05