

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

LAURENT SIEBENMANN

**Amorces de la chirurgie en dimension quatre
: un $S^3 \times R$ exotique**

Séminaire N. Bourbaki, 1980, exp. n° 536, p. 183-207

http://www.numdam.org/item?id=SB_1978-1979__21__183_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

AMORCES DE LA CHIRURGIE EN DIMENSION QUATRE :

UN $S^3 \times R$ EXOTIQUE

[d'après Andrew H. CASSON and Michael H. FREEDMAN]

par Laurent SIEBENMANN

§ 1. Position du problème

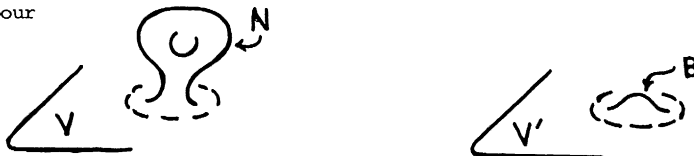
Une conjecture très simple peut servir d'étalon dans l'étude des 4-variétés orientées lisses et simplement connexes. Conjecture : Les variétés closes de ce genre sont classifiées, à difféomorphisme orienté près, par leurs formes bilinéaires d'intersection sur $H_2(V^4)$; et toute forme bilinéaire (sur Z) de déterminant ± 1 (= discriminant [Se]) est réalisée par une telle V^4 close, à l'exception, imposée par le théorème de Rohlin 1952 (voir [La]), des formes paires de signature $\equiv 8$ modulo 16 (= indice [Se]).

Les méthodes de chirurgie forgées en dimension ≥ 5 sont tombées ici en panne, voir [Man] : personne ne sait décider s'il est possible d'appliquer assez souvent le processus de Whitney d'élimination de points doubles des 2-sphères immergées dans V^4 . [En dimension 2, ce processus de Whitney remplace une vignette  par , cf. § 3.]

En 1973/74, A. Casson a débloqué cette situation en démontrant par une nouvelle construction, de caractère infini $[Ca_1]$ $[Ca_2]$:

THÉORÈME DE CASSON 1.1.- Soit V^4 une variété lisse ($=C^\infty$) simplement connexe et x_1, x_2 dans $H_2(V)$ deux éléments tels que $x_1 \cdot x_2 = 1$, $x_1 \cdot x_1 = 0 = x_2 \cdot x_2$. Alors, il existe une sous-variété ouverte N^4 contenant des représentants de x_1, x_2 et ayant le type d'homotopie propre de $S^2 \times S^2$ - (point) .

Ce N^4 de Casson est un ouvert de $S^2 \times S^2$ de structure si explicitement donnée qu'il y a un critère (hélas jusqu'à présent trop difficile à appliquer) pour décider si N coïncide hors d'un compact avec le complément d'un compact dans une variété lisse contractile sans bord B . S'il en est ainsi, on peut remplacer N par B pour



obtenir une variété V' , et V aura le type d'homotopie de la somme connexe $V' \# S^2 \times S^2$, (sans peut-être lui être difféomorphe). Appelons ce processus, une chirurgie de Casson. Si une chirurgie de Casson est toujours possible, on peut facilement réaliser toutes les formes exigées par la conjecture en faisant un nombre fini de telles chirurgies sur une somme connexe d'exemplaires de $S^2 \times S^2$, de $\pm \mathbb{C}P(2)$, et de la surface de Kummer $\pm K^4$ (cf. [Se] [Man]).

Dans $[Ca_1]$, le problème de faire une chirurgie de Casson est étroitement lié à des problèmes de nul-cobordisme d'enlacements dans S^3 , voir $[Ki_2]$; et dans $[Ca_4]$ ces problèmes reçoivent une formulation algébrique.

Dans $[Ca_3]$, Casson a fait une étude parallèle de la question du difféomorphisme de variétés ayant une même forme d'intersection, cf. § 5.7.

Pourtant la conjecture tant visée reste indemne.

Les difficultés rencontrées par ce programme de Casson sont partiellement contournées par une contribution brillante de M. Freedman [Fr] (1978).

THÉORÈME DE FREEDMAN 1.2.- Avec les données V^4 , x_1 , x_2 de Casson, il existe un compact $X \subset V^4$ qui a la silhouette (shape de Borsuk) de $S^2 \vee S^2$ avec $\check{H}_2(X)$ identifié (par inclusion) au sous-groupe $\{x_1, x_2\} = \mathbb{Z}^2 \subset H_2 V$ et qui est " π_1 -négligeable" dans chaque voisinage (c'est-à-dire, pour tout ouvert U contenant X , on a $\pi_1(U - X) \cong \pi_1(U)$ par inclusion).

Freedman a exploité la construction de la variété N^4 de Casson, et a trouvé $X \subset N^4$. Il suit par des principes bien établis (sinon bien connus, voir Appendice) que $N^4 - X$ a alors le type d'homotopie propre de $S^3 \times \mathbb{R}$. Modulo une caractérisation homotopique de R^4 (encore à démontrer), on sait montrer (§ 5.6) que $N^4 - X$ est homéomorphe à $S^3 \times \mathbb{R}$; alors, en remplaçant N^4 par un exemplaire de R^4 , on achèverait topologiquement une chirurgie de Casson.

Sans hypothèse optimiste, $V - X$ est en quelque sorte une "solution à lacune" du problème de chirurgie, car $H_2(V) \cong H_2(V - X) \oplus H_2(S^2 \times S^2)$ même en tant que groupes munis de forme bilinéaire. Par balayage de telles lacunes à l'infini, Freedman sait donner une classification chirurgicale "classique" des variétés V^4 ouvertes et simplement connexes dont chaque bout ait un π_1 -système trivial. L'équivalence en jeu est celle de h -cobordisme propre (= difféomorphisme ?).

Dans l'optique close de la conjecture, le quotient V/X est une "solution avec singularité" car $H_2(V/X) = H_2(V - X)$. En plus, cette singularité (le quotient $*$ de X) est bien gentille, car $(V/X) \times S^1$ est une variété topologique simplement connexe (Appendice) et $*$ est π_1 -négligeable dans ses voisinages.

Le but de cet exposé est une preuve complète du théorème de Freedman 1.2 (§ 4). M'efforçant d'utiliser seulement le nécessaire des idées de Casson (§ 3), je constate que 1.2 admet une extension utile 4.3. Le § 5 présente un $S^3 \times \mathbb{R}$ exotique offert par 4.3 dans la variété algébrique $CP(2) \# -CP(2)$, et d'autres corollaires.

Ceci ne laisse guère d'espace pour exposer une observation intéressante de R. D. Edwards [Fr] : Le compact X de Freedman peut être l'union de deux 2-sphères topologiques qui se coupent transversalement en un point q ; d'ailleurs chaque 2-sphère est localement plate sauf peut-être en un point. L'observation est basée sur le fait que, dans 1.1, $N^4 = \text{int}(B^4 \cup H_1 \cup H_2)$ où H_i est une anse ouverte "flexible" de Casson (cf. suite de 3.6) et sur une adaptation naturelle de l'argument de Freedman, qui construit X de façon que $X \cap B^4$ soit un croisement normal $\oplus$, et que $X \cap H_i$ soit cellulaire ; on peut alors châtrer $X \cap H_1$ et $X \cap H_2$.

Je tiens à remercier L. Guillou et A. Marin pour leurs critiques amicales, et R. D. Edwards pour ses explications orales très agréables (été 1978) du texte de [Fr].

§ 2. Outillage technique

Tous les espaces (variétés, complexes, etc.) rencontrés seront localement compacts, métrisables et toutes les applications continues (ou mieux). Une application $f : X \rightarrow Y$ est propre si $f^{-1}(K)$ est compact pour tout compact K de Y ; dans cette catégorie d'applications, la notion naturelle d'équivalence d'homotopie est notée $\overset{P}{\simeq}$.

Nous utiliserons les symboles :

$\overset{sh}{\simeq}$	équivalence de silhouette (shape de Borsuk)	$\approx$	homéomorphisme
$\simeq$	équivalence d'homotopie	$\cong$	isomorphisme
$\overset{P}{\simeq}$	équivalence d'homotopie propre.		

En travaillant dans un espace X , on note l'intérieur de $A \subset X$ par $\overset{\circ}{A}$, l'adhérence par $\bar{A} = \text{adh}(A)$, la frontière par $\delta A = \text{adh}(A) - \overset{\circ}{A}$. L'intérieur (formel) d'une variété V est $\text{int } V$ et le bord $\partial V = V - \text{int } V$.

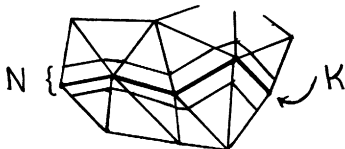
Un homomorphisme de groupes d'homologie ou d'homotopie sera (en l'absence d'autres indications) induit pas une inclusion.

En parlant de variétés, nous resterons (sauf exceptions déclarées) dans la catégorie DIFF des variétés lisses de classe C^∞ . Alors isomorphisme ($\cong$) est difféomorphisme.

Une immersion normale $f : M^n \rightarrow V^{2n}$ de variétés est une immersion qui est injective sauf pour des points doubles isolés de croisement normal de modèle $\bigoplus 0 \times 0 \subset \mathbb{R}^n \times 0 \cup 0 \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$. Nous supposons d'ailleurs que $f(\partial M) \subset \partial V$, que fM est transverse à ∂V et que f est propre. Cette définition a un sens dans chaque catégorie de variétés : DIFF ; PL (= pseudo-linéaire = linéaire par morceau [Hu]) et TOP topologique (KIS)].

On va faire appel dans tous les arguments techniques de Casson et de Freedman, aux notions de complexe et de voisinage régulier (fermé).

Cette dernière a son expression la plus commode dans la catégorie PL (voir [Hu]). C'est la catégorie des complexes simpliciaux (polyèdres) et des applications linéaires par morceaux (i.e. linéaires sur les simplexes d'une subdivision linéaire convenable de la source). Un voisinage régulier N d'un complexe (= polyèdre) K plongé PL dans un complexe L s'exprime bien simplement en termes des coordonnées barycentriques d'une triangulation PL convenable du couple (L, K) telle que K est plein (localement convexe) dans L : c'est un ε -voisinage fermé, $0 < \varepsilon < 1$.



Je propose donc, pour tous ces arguments, un passage à la catégorie PL, au moyen d'une triangulation de Whitehead [Mu] de la variété différentiable ambiante V^4 . Ce n'est pas strictement nécessaire ; au lecteur de se défendre dans la catégorie de son choix ! (j'essaie donc d'employer un langage géométrique neutre, utilisant par exemple le mot complexe plutôt que le mot polyèdre spécifique à PL.)

Quant aux voisinages réguliers, fixons quelques conventions, en rappelant les propriétés essentielles pour les lecteurs qui voudront décortiquer les preuves à venir.

Un voisinage régulier de K dans L est souvent noté $N(K \subset L)$, ou $N(K)$ avec L sous-entendu.

Si dans L on a en considération d'autres sous-complexes $K_1, \dots, K_k$, alors, sauf indication contraire, il s'agit d'un voisinage régulier $N(K)$ de K respectant les K_i . [Donc, en PL, il s'agit d'un ε -voisinage de K , $0 < \varepsilon < 1$, pour une triangulation PL convenable de L dont $K_1, \dots, K_k$ sont des sous-complexes simpliciaux.]

Si un voisinage régulier N_0 de K dans L est contenu dans l'intérieur d'un autre N_1 , alors $N_1 - \overset{\circ}{N}_0 \cong \delta N_0 \times [0,1]$ l'isomorphisme envoyant $\delta N_0 \times 0$ sur δN_0 et $\delta N_0 \times 1$ sur δN_1 . Aussi, $N_1 \cong N_0$ par un automorphisme de L fixant un voisinage de K et $N_1 - K \cong \delta N_1 \times [0,1]$. Naturellement, ces énoncés d'unicité admettent une version respectant d'autres sous-complexes.

S'il y a un isomorphisme $L \cong N(K \subset L)$ fixant K (et éventuellement respectant $K_1, \dots, K_k$) on dit que L est un voisinage régulier abstrait de K (respectant $K_1, \dots, K_k$).

Un sous-complexe D de $L - \overset{\circ}{N}(K \subset L)$, qui rencontre δN en un complexe S non vide n'est certainement pas respecté par N .

Sous l'hypothèse que $(\delta N, S)$ admet un collier $(\delta N, S) \times [0,1]$ dans $(L - \overset{\circ}{N}, D)$, on peut pourtant trouver un complexe $K' \supset K$; respecté par N avec $K' - \overset{\circ}{N} = D$. On dit que K' est obtenu en reliant D à K par une ombre $\text{adh}(N \cap K' - K)$ de S dans N . [En PL, une triangulation présentant N comme ε -voisinage offre un choix convenable d'ombre.]

Soit $N(K)$ un voisinage régulier de K dans L respectant un complexe $K' \subset L$, alors $N(K)$ est également un voisinage régulier abstrait de $K \cup (K' \cap N(K))$. Si, en plus, N' est un voisinage régulier de $K' - \overset{\circ}{N}(K)$ dans $L - \overset{\circ}{N}(K)$, alors $N(K) \cup N'$ est un voisinage régulier $N(K \cup K')$ de $K \cup K'$ dans L . Dans ces conditions, on dit que $N(K)$, $N(K \cup K')$, N' sont bien agencés.

Nous avons besoin de la notion de méridien d'un n -complexe K^n dans une $(n+2)$ -variété V^{n+2} . La n -strate E^n de K dans V est l'ouvert de K formé des points ayant un voisinage dans le couple (V, K) qui soit isomorphe à (R^{n+2}, R^n) . Un méridien de K est le bord d'un petit 2-disque orienté qui coupe K transversalement, en un point de la n -strate E^n .

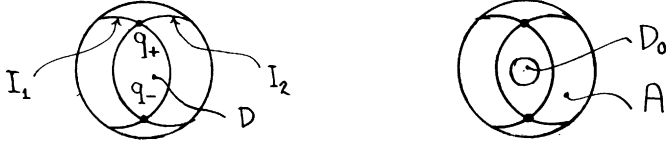
Si pour un complexe $K' \subset V$ contenant K , ce disque est disjoint de $\text{adh}(K' - K)$, alors son bord orienté détermine (à conjugaison près seulement) un élément de $\pi_1(V - K')$ qu'on appelle aussi un méridien de K .

Par position générale, $\pi_1(V^{n+2} - K^n) \rightarrow \pi_1 V^{n+2}$ est surjective, et quand on tue dans $\pi_1(V - K)$ un méridien par composante connexe de la n -strate $E^n \subset K$, on obtient $\pi_1 V$.

§ 3. Quelques méthodes de Casson

Nous voulons dégager ici seulement les éléments nécessaires pour le théorème de Freedman.

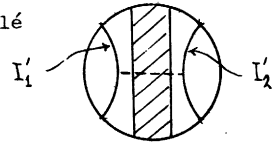
Rappelons la géométrie du processus de Whitney. D'abord, les modèles, commençant par celui de l'état initial. En dimension 2, c'est $(B^2; I_1, I_2)$ où $I_1 \cap I_2 = \{q_-, q_+\}$ sont deux points de croisement normal.



Le 2-disque D , dans $\text{int } B^2$ attrapé par I_1, I_2 , est le disque de Whitney. Si on soustrait de B^2 un petit disque $D_0 \subset \text{int } D$, on obtient un anneau $A = B^2 - \text{int } D_0$.

En dimension 4 (ou toute autre), il s'agit d'un épaississement simple $(B^4; D_1, D_2)$ où $B^4 = B^2 \times B^2 = B^2 \times B^1 \times B^1$ et $D_1 = I_1 \times B^1 \times 0$, $D_2 = I_2 \times 0 \times B^1$. On constate sans difficulté que $A \times B^2 \subset B^4$ est un voisinage régulier (abstrait), respectant $D = D \times 0$, de $D_1 \cup D_2$. [Voir § 2 : couper le modèle horizontalement en deux facilite la vérification.] A partir de $A \times B^2$, on retrouve B^4 en ajoutant la 2-anse $D_0 \times B^2$ d'âme $D_0 = D_0 \times 0$, loin de $D_1 \cup D_2$.

Quant à l'état final, on a en dimension 2 la vignette $(B^2; I'_1, I'_2)$ avec $I'_1 \cap I'_2 = \emptyset$ et $\partial I'_1 = \partial I_1$. Soient I l'arc pointillé et B_0 le disque hachuré.



Passant en dimension 4 par stabilisation, on a $(B^4; D'_1, D'_2)$ avec $D'_1 = I'_1 \times B^1 \times 0$, $D'_2 = I'_2 \times 0 \times B^1$ et on constate que l'équation $B^4 = (B^2 - B_0) \times B^2 \cup B_0 \times B^2$ exprime B^4 comme voisinage régulier (abstrait) de $D'_1 \cup D'_2$, avec une 1-anse d'âme $I \cap B_0$, ajoutée loin de $D'_1 \cup D'_2$.

Si M^2 est une variété immergée (ou même un complexe) dans V^4 , et qu'on trouve une boule paramétrée $B^4 \subset V^4$, telle que $B^4 \cap M^2 = D_1 \cup D_2$, alors on peut modifier M en remplaçant $D_1 \cup D_2$ par $D'_1 \cup D'_2$. Ceci effectue un processus de Whitney $M \mapsto M'$, supprimant deux points doubles. En choisissant $N(M)$, $N(M')$ bien agencés sur le modèle B^4 , on a :

$$N(M) \cup (2\text{-anse}) = N(M) \cup B^4 = N(M') \cup B^4 = N(M') \cup (1\text{-anse}) .$$

Donc, on a démontré un lemme, qui sera utile vers la fin de ce paragraphe.

Lemme d'Annulation 3.1.- Supposons qu'un processus de Whitney change un complexe $M \subset V^4$ en un autre $M' \subset V^4$. Alors, un voisinage régulier de $N(M')$ se déduit de $N(M)$ par addition d'une 2-anse (à $N(M) - M$), suivie par soustraction d'une 1-anse. Si M' est connexe, la soustraction vaut (à isomorphisme près) l'addition d'une deuxième 2-anse. $\square$

Le modèle initial de Whitney est extrêmement difficile à plonger de manière adaptée à une variété immergée donnée dans V^4 .

Par contre, le modèle final est trivial à plonger et le lemme fondamental suivant en profite.

Lemme de Nettoyage 3.2.- Soit K un 2-complexe dans une 4-variété V et soient m_1, m_2 dans $\pi_1(V - K)$ deux méridiens. Il existe un arc plongé $I \subset V$ avec $\partial I = I \cap K$ dans la 2-strate de K , de sorte qu'en modifiant K dans $N(I) \cong B^4$ par l'inverse du processus de Whitney, on tue $[m_1, m_2] = m_1 m_2 m_1^{-1} m_2^{-1}$. Plus précisément, on obtient un complexe $K' \subset V$ tel que :

$$\theta : \pi_1(V - K) \cong \pi_1(V - (K \cup N(I))) \longrightarrow \pi_1(V - K')$$

tue (exactement) $[m_1, m_2]$ et envoie les méridiens de K sur les méridiens de K' .

Le terme nettoyage de K dans V^4 désigne une suite finie d'opérations inverses de Whitney comme dans 3.2.

Preuve. On suppose m_1, m_2 représentés par deux petits disques orientés B_1, B_2 transverses à la 2-strate de K en p_1, p_2 ($\neq p_1$), munis de chemins γ_1, γ_2 dans $V - K$ reliant p_1, p_2 au point base. Alors $\gamma_2^{-1} \gamma_1$ déformé modulo les extrémités p_1, p_2 en un plongement, conviendra comme intervalle I .

On constate aisément qu'il y a un isomorphisme $N(I) \cong B^4$, qui envoie $N(I) \cap K$ sur $D_1' \cup D_2'$ dans le modèle de l'état final de Whitney. Alors, on pose $K' = (K - B^4) \cup (D_1 \cup D_2)$, exécutant le processus inverse de Whitney.

On peut maintenant supposer le point base et les chemins base dans le modèle de Whitney $N(I) \cong B^4$. On a

$$\begin{aligned} \pi_1(N(I) - K) &\cong \pi_1(\partial N(I) - K) = \pi_1(\partial N(I) - K') \cong \pi_1(N(I) - (D_1 \cup D_2 \cup D)) \xrightarrow{\Psi} \\ &\xrightarrow{\Psi} \pi_1(N(I) - (D_1 \cup D_2)) = \pi_1(N(I) - K') , \end{aligned}$$

où Ψ tue le méridien de D .

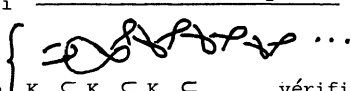
m_1, m_2 se relèvent en méridiens générateurs μ_1, μ_2 du groupe libre $\pi_1(\partial N(I) - K)$ de rang 2. Dans $\pi_1(N(I) - K')$, on constate qu'un 2-tore près de $q_{\pm}$ dans $N(I) - K'$ (= tore caractéristique, cf. 3.11) assure que $\varphi[\mu_1, \mu_2] = 0$. Donc φ abélianise $\pi_1(\partial N(I) - K)$ sur $H_1(\partial N(I) - K) \cong H_1(N(I) - K') = \mathbb{Z}^2$. Par amalgamation avec $(V - K) - \overset{\circ}{N}(I)$, on conclut. $\square$

THÉOREME TECHNIQUE DE CASSON (version faible) 3.3.- Avec les données de 1.1, il existe une suite $K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots$ de sous-complexes compacts de V^4 et des voisinages réguliers (bien agencés) $N_i = N(K_i)$, $N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset \dots$, vérifiant les conditions suivantes :

(a) $K_0 = S_1 \cup S_2$ est image d'une immersion normale de $S^2 \amalg S^2$ (deux 2-sphères) et les deux 2-sphères immergées S_1 et S_2 représentent x_1 et x_2 . 

(b) $D_i = K_i - \overset{\circ}{N}_{i-1}$ est image d'une immersion normale d'une somme de 2-disques, pour tout $i \geq 1$. [Nous n'exigeons pas ici que ces disques immergés soient dis-joints, d'ailleurs on pourrait même admettre sur D_i des points de nouement local.]

(c) L'inclusion $K_i \rightarrow K_{i+1}$ annule $\pi_1 K_i$ et induit un isomorphisme $H_2 K_i \rightarrow H_2 K_{i+1}$.

Définition 3.4.- Nous appellerons une suite $\left\{ K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots \right.$, vérifiant les conditions de 3.1, un bâtiment (infini) dans V^4 pour x_1 et x_2 dans $H_2 V$. Une suite finie $K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_n$ (mêmes conditions) est un bâtiment à n étages. 

Complément 3.5.- Dans un bâtiment, si on défait les points doubles de $K_i - K_{i-1}$,

on obtient $K_i^* = K_{i-1} \cup (2\text{-cellules}) \simeq (S^2 \vee S^2)$ En plus,

$K_i \simeq K_i^* \vee (\vee S^1)$ où $(\vee S^1)$ est un bouquet d'autant de cercles qu'il y a de points doubles de $K_i - K_{i-1}$.

Complément 3.6.- Dans un bâtiment, chaque méridien de ∂D_i dans ∂N_{i-1} est nul-homologue dans $\partial N_{i-1} - \partial D_i$.

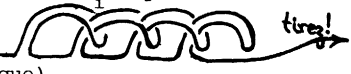
Remarque.- Donné un bâtiment (infini), la réunion N des intérieurs $\overset{\circ}{N}_0 \subset \overset{\circ}{N}_1 \subset \dots$ est simplement connexe (par (c)) ; en plus, l'immersion $S^2 \amalg S^2 \rightarrow N$ de (a) est une équivalence d'homotopie (par (c) et Whitehead).

Remarque.- La construction à suivre peut être raffinée (Casson $[Ca_1]$ $[Ca_2]$) pour assurer que le π_1 -système à l'infini dans N^4 est trivial, et donc que

$N^4 \overset{P}{\simeq} S^2 \times S^2$ - pt (Appendice), ce qui démontre 1.1. Je précise.

Précisions. $\partial D_{i+1} \subset \partial N_i$ a un encadrement (framing) préféré tel que, pour tout disque immergé D de D_{i+1} , on ait $D \bullet D = 0$. Soient $V_i = V - \dot{N}_i$ et $P_i = N(D_i \subset V_{i-1})$. Casson fait de sorte que

(i) Les disques immergés de D_{i+1} sont deux à deux disjoints, et chacun s'attache à P_i .

(ii) Si on attache abstraitement des 2-anses H_{i+1} à P_i suivant l'encadrement préféré de ∂D_{i+1} , l'union $P_i \cup H_{i+1}$ constitue des 2-anses H_i attachés à P_{i-1} , d'ailleurs forcément suivant l'encadrement préféré de ∂D_i . [Casson commence avec $S_1 \cap S_2 = \text{point} = K_{-1}$, et $N_{-1} \cup P_0 = N_0$.] Alors  $N_i \cup H_{i+1} \cong N_{i-1} \cup H_i \cong \dots \cong N_{-1} \cup H_0 = S^2 \times S^2 - (\text{disque})$.

Ce raffinement délicat et astucieux de Casson rencontre une obstruction de genre Arf dans le contexte plus général du théorème 4.3.

On peut maintenant aborder la preuve de 3.3 et de ses compléments 3.5, 3.6.

Preuve du complément 3.5. En éclatant chaque point double de $K_i - K_{i-1}$ en un intervalle, on constate que $K_i \simeq K_i^* \vee (\vee S^1)$ comme affirmé. En plus, $\pi_1 K_i^* = 0$ et $H_2(K_i^*) \cong H_2(K_i) \cong H_2(S^2 \vee S^2)$, donc $K_i^* \simeq S^2 \vee S^2$ (Whitehead). $\square$

Preuve du complément 3.6. Le lemme suivant démontre 3.6, car ∂D_i donne une base de $H_1(\partial N_{i-1}) \cong H_1(K_{i-1})$. $\square$

Lemme 3.7.- Soit N^4 une 4-variété orientée compacte connexe et à bord connexe, telle que la forme d'intersection sur $H_2(N^4)$ ait déterminant ± 1 , $H^3(N^4) = 0$ et $H_1(N^4) \cong \mathbb{Z}^k$. Alors, $H_*(\partial N) \cong H_*(\#^k(S^2 \times S^1))$, et l'inclusion induit $H_1(\partial N) \cong H_1(N)$. $\square$

Corollaire 3.8.- Si $C_1, \dots, C_k \subset \partial N$ sont des cercles plongés et disjoints qui représentent une base pour $H_1(\partial N)$, alors le méridien de chaque C_i est nul dans $H_1(\partial N - (C_1 \cup \dots \cup C_k))$. $\square$

Preuve de 3.3

Construction de K_0 . Une sphère immergée S_i représente x_i , $i = 1, 2$, avec $S_1 \cup S_2 = S$ normalement immergée¹. On va modifier ce choix de S bientôt. On pose $N_0 = N(S)$ et $V_0 = V - \dot{N}_0$. Vu 3.7, on a $H_1(\partial N_0) \cong H_1(N_0)$ par inclusion; en

¹ Une application PL en position générale devient une immersion par un dénouement immersif des entrelacs (= links) des points de nouement locale.

appliquant le lemme des cinq aux suites d'homologie de $(V_0, \partial N_0) \subset (V, N_0)$, on déduit $H_1(V_0) \cong H_1(V) = 0$.

Tout méridien m de S dans $\pi_1(V - S)$ est un produit $[a_1, a_2][a_3, a_4] \dots$. Mais, puisque les méridiens de S tuent $\pi_1(V - S)$, chaque a_i est un produit $m_{i1} m_{i2} \dots$ de méridiens. Faisons commuter, par 3.2, entre eux cette collection finie $\{m_{ij}\}$ de méridiens. Alors, dans le quotient, les a_i commutent et donc $m = 0$. Ainsi $\pi_1(V - S) = 0$, après nettoyage de S tuant un méridien par composante connexe de la 2-strate de S (donc deux méridiens). A ce stade, on fixe $K_0 = S$, $N_0 = N(K_0)$ et $V_0 = V - \overset{\circ}{N}_0 \simeq V - S$.

Construction de $K_1, K_2, \dots$. D'abord K_1 . Sachant que $\pi_1 N_0$ est libre, on représente une base libre de générateurs par des cercles plongés dans ∂N_0 (position générale). Puisque $\pi_1(V_0) = 0$, ces cercles constituent le bord de l'image D_1 d'une immersion normale dans $V_0 = V - \overset{\circ}{N}_0$ d'une somme de 2-disques. Chaque méridien m_1 de D_1 est produit de commutateurs $[a_1, a_2][a_3, a_4] \dots$ dans $\pi_1(V_0 - D_1)$ par 3.8. Puisque $\pi_1(V_0) = 0$, chaque a_i est un produit de conjugués dans $\pi_1(V_0 - D_1)$ de méridiens de D_1 . Donc, par nettoyage de D_1 dans V_0 , on s'assure que $m_1 = [a_1, a_2][a_3, a_4] \dots$ s'annule dans $\pi_1(V_0 - D_1)$. Après un tel nettoyage par disque immergé de D_1 , on a $\pi_1(V_0 - D_1) = 0$.

On relie maintenant D_1 à K_0 par une ombre de ∂D_1 dans N_0 pour obtenir $K_1 = K_0 \cup D_1 \cup \text{ombre}(\partial D_1)$ et on pose $N_1 = N_0 \cup N(D_1)$, $V_2 = V - \overset{\circ}{N}_1$.

On construit D_2, K_2, N_2 à partir de N_1 similairement, et ainsi de suite.

La preuve de 3.3 est complète. $\square$

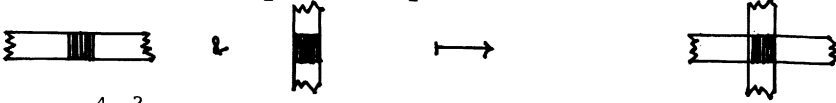
Pour la preuve du théorème 1.2 de Freedman, nous aurons besoin de deux raffinements faciles (3.9 et 3.11) du théorème 3.3.

Complément 3.9.- Dans 3.3, on peut choisir K_0 et K_1 de sorte que K_0 est π_1 -négligeable dans N_1 .

Preuve de 3.9. Revenons sur la construction de $K_0 = S = S_1 \cup S_2$, et de K_1 . Par introduction locale de boucles, on peut s'assurer que la somme $\text{self}(S_i)$ des signes ± 1 d'intersection aux points doubles de S_i est zéro. [On fait ceci seulement pour faciliter la preuve.]

Affirmation 3.10.- Il est possible d'ajouter (abstraitemment) des 2-anses à $N_0 = N(S)$ pour obtenir $S^2 \times S^2 - (\text{disque})$.

Preuve de 3.10. Puisque $\text{self}(S_i) = 0$, on a un fibré normal $^1 \nu(S_i)$ trivial vue l'équation $S_i \bullet S_i = 2 \text{ self}(S_i) + \chi(\nu S_i)$. Ainsi, $N(S)$ est un plombage de deux exemplaires $S_1^* \times B^2$, $S_2^* \times B^2$ de $S^2 \times B^2$, c'est-à-dire que l'on a un nombre fini de plongements disjoints $g_i, g_i' : B^2 \rightarrow S_1^* \amalg S_2^*$ tel que $N(S)$ est obtenu par identifications : $(g_i(x), y) = (g_i'(y), x)$, $x, y \in B^2$.



Soit (P^4, Σ^2) le résultat d'un tel plombage avec $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, $\Sigma_i = \text{image}(S_i^*)$. A isomorphisme près de couples, on constate facilement que (P^4, Σ^2) est déterminé par la donnée de $\Sigma_1 \bullet \Sigma_1$, $\Sigma_2 \bullet \Sigma_2$, $\Sigma_1 \bullet \Sigma_2$ et des nombres (absolus) de points doubles de Σ_1 , de Σ_2 et de $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$.

Donc, on constate que tous les plombages vérifiant $\Sigma_1 \bullet \Sigma_1 = 0 = \Sigma_2 \bullet \Sigma_2$, $\Sigma_1 \bullet \Sigma_2 = 1$, et $\text{self}(S_i) = 0$, par exemple $(N(S), S)$, sont des voisinages réguliers d'immersions obtenus artificiellement à partir de $(S^2 \times 0) \cup (0 \times S^2)$ dans $S^2 \times S^2$ par des inverses du processus de Whitney. S'il y a k tels processus, 3.1 montre qu'en ajoutant $2k$ anses, d'indice 2, on obtient $S^2 \times S^2 - (\text{disque})$. $\square$

Nous avons le droit de construire K_1 de façon que ∂D_1 soit la famille de cercles d'attachement des 2-anses $H_1, \dots, H_n$ offertes par 3.10.

Affirmation 3.9 bis.- Avec ce choix, les méridiens de K_0 sont nuls dans $\pi_1(N_1 - K_0)$; et donc K_0 est π_1 -négligeable dans N_1 .

Preuve de 3.9. $N_1 - K_0 \simeq (N_0 - K_0) \cup D_1 \simeq (N_0 - K_0) \cup D_1^* \vee (\vee S^1)$, par équivalences fixant $N_0 - K_0$. De même, $(N_0 - K_0) \cup D_1^* \simeq (N_0 - K_0) \cup (H_1 \cup \dots \cup H_n)$. Donc, il suffit de constater que chaque méridien m_0 de K_0 dans ce dernier espace est déformable (par position générale) dans le bord, qui est S^3 ! $\square$

Dans l'ultime complément, il s'agit de 2-tores caractéristiques dans $\partial N(K)$ pour les croisements normaux d'un 2-complexe K dans V^4 , de modèle $0 \times 0 \subset \mathbb{R}^2 \times 0 \cup 0 \times \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^4$. Si $q_1, \dots, q_r$ sont de tels points de croisement, et $R_1^4, \dots, R_r^4$ de tels modèles disjoints $\subset V^4$ adaptés aux points $q_1, \dots, q_r$ et que $N(K)$ est bien agencé sur le voisinage régulier $\amalg_i B_i^2 \times B_i^2$ de $\{q_1, \dots, q_r\}$ dans V , alors $T_i = S_i^1 \times S_i^1$, $i = 1, \dots, r$, sont des tores caractéristiques pour

¹ En PL on a bien un fibré normal en 2-disques, par un argument élémentaire qui se déroule essentiellement en dimensions 3 et 2.

$q_1, \dots, q_r$ dans $\partial N(K)$. [D'ailleurs l'unicité des voisinages réguliers assure que $T = T_1 \cup \dots \cup T_r$ est unique à un automorphisme (concordant à l'identité) de $\partial N(K)$ près.]



Une famille de cercles $C_1, \dots, C_r$ plongés dans $\partial N(K)$ est triangulaire (resp. diagonale) par rapport à $T_1, \dots, T_r$ si (pour des numérotations convenables) C_i rencontre T_i en un seul point, transversalement, et $C_i \cap T_j = \emptyset$ pour $j > i$ (resp. $j \neq i$). La notion de triangularité s'impose au coeur de la preuve de Freedman (§ 4, Démarche 3).

Complément 3.11. - Dans 3.3, on peut choisir $K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots$ de sorte que, pour chaque i , la famille de cercles $\partial D_{i+1} \subset \partial N_i$, $i \geq 1$, est triangulaire par rapport à une famille de 2-tores caractéristiques pour les points doubles de $K_i - K_{i-1}$. Dans ces conditions, chaque méridien de ∂D_{i+1} dans $\pi_1(\partial N_i - \partial D_{i+1}) \cong \pi_1(N_i - K_{i+1})$ est un produit de commutateurs de méridiens de $K_i - K_{i-1}$.

Preuve de 3.11. On trouve facilement une application $f : N_i \rightarrow (\vee S^1)$ vers un bouquet de cercles $S_1 \vee \dots \vee S_r = (\vee S^1)$ induisant $\pi_1(N_i) \cong \pi_1(\vee S^1)$, telle que, pour un $p_j \in S_j$ distinct du point base, $f^{-1}(p_j) \cap \partial N = T_j$, $j = 1, \dots, r$, est une famille de tores caractéristiques pour les points doubles de $K_i - K_{i-1}$. Donc, le choix en question est possible pour $i \geq 1$.

La dernière phrase de 3.11 traduit la triangularité et le fait que le méridien m d'un point $p \neq 0$ dans le tore T^2 est conjugué, dans $\pi_1(T^2 - p)$, au commutateur $[a, b]$ des deux générateurs a et b représentés par $T^1 \times 0$ et $0 \times T^1$. $\square$

§ 4. Le théorème de Freedman

Un bâtiment $K_0 \subset K_1 \subset \dots$ dans V^4 pour x_1, x_2 offert par 3.3 et 3.4, qui vérifie en plus les conditions des Compléments 3.9 et 3.11, est appelé un bâtiment règlementaire.

THÉORÈME TECHNIQUE DE FREEDMAN 4.1. - Avec les données de 1.1 (Casson), soit $K_0 \subset K_1 \subset K_2$ ($\subset V^4$) un bâtiment règlementaire de deux étages dans V^4 pour x_1, x_2 .

Alors, il existe un deuxième tel bâtiment $K_0 \subset K_1^\# \subset K_2^\#$ de sorte que
 $K_2^\# \subset \overset{\circ}{N}_2$ est π_1 -négligeable dans N_2 et que $\pi_1(K_2^\#) \rightarrow \pi_1(N_2)$ est nul.

Déduction du théorème 1.2

On réapplique le théorème technique 4.1 au bâtiment $K_0 \subset K_1^\# \subset K_2^\#$ pour obtenir
 $K_0 \subset K_1^{2\#} \subset K_2^{2\#} \subset \overset{\circ}{N}(K_2^\#)$ et ainsi de suite. Il résulte une suite décroissante
 $M_i = N(K_2^{i\#})$, $i = 0, 1, 2, \dots$, bien emboîtée $\overset{\circ}{M}_i \supset M_{i+1}$, telle que :

- (a) M_{i+1} est π_1 -négligeable dans M_i ;
- (b) l'inclusion $M_{i+1} \rightarrow M_i$ annule $\pi_1(M_{i+1})$;
- (c) $K_0 \subset M_i$, et l'inclusion induit $H_2(K_0) \cong H_2(M_i)$.

Le compact que l'on cherche est l'intersection :

$$X = \bigcap_i M_i = \bigcap_i N(K_2^{i\#}) .$$

Vérifions les propriétés requises.

La condition (a) assure que X est π_1 -négligeable dans chaque M_i , et donc dans tout voisinage de X dans V .

La condition (c) assure que $H_2(K_0) \cong H_2(M_i) \cong H_2(M_{i+1})$ par inclusions.

Donc, $H_2(K_0) \cong \check{H}_2(X)$ par inclusion. Mais $H_2(K_0) \cong \{x_1, x_2\} \subset H_2(V)$ par inclusion.

Quant à la silhouette de X , elle est déterminée par la chaîne

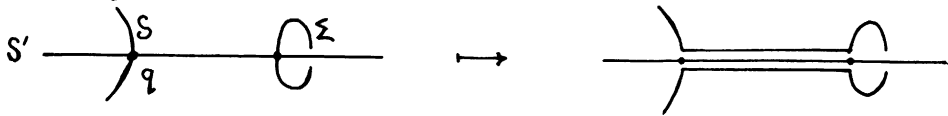
$M_0 \leftarrow M_1 \leftarrow M_2 \leftarrow \dots$ (modulo homotopie et passage à une sous-chaîne filtrante).

On sait (3.5) que $M_i \simeq (S^2 \vee S^2) \vee (\vee S^1)$, que $H_2(M_i) \cong H_2(M_{i-1})$, et que

$\pi_1(M_i) \rightarrow \pi_1(M_{i-1})$ est nul. Donc la silhouette de X est également déterminée par $(S^2 \vee S^2) \xleftarrow{\sim} (S^2 \vee S^2) \xleftarrow{\sim} \dots$, ce qui prouve que $X \stackrel{sh}{\simeq} S^2 \vee S^2$. $\square$

Preuve du théorème technique 4.1

La preuve est axée sur une version singulière (introduite par Freedman) de l'astuce de Norman [No]. En dimension deux, cette astuce simple est bien connue :



Pour éliminer un point q d'intersection transverse de S avec S' (peut-être $S = S'$), l'astuce exploite une sphère plongée Σ qui rencontre S' en un seul point, et transversalement. Dans la version singulière, Σ est plutôt une sphère normalement immergée, et l'astuce a l'effet de remplacer q par les points doubles de Σ , qui (chez Freedman) sont moins méchants que q .

THÉORÈME DES SPHÈRES DE NORMAN 4.2.- Avec les données $K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset V^4$ de 4.1,
on fixe une fonction e qui associe un entier ≥ 0 à chaque disque immergé de
 $K_2 - \overset{\circ}{N}_1 = D_1$, ou encore de $K_2 - K_1$.

Alors il existe un bâtiment réglementaire $K_0 \subset K'_1 \subset K''_2$ dans $\overset{\circ}{N}_2$ et une
famille finie Σ de 2-sphères normalement immergées dans $N_1 - K'_1$, et disjointes
deux à deux, de sorte que :

(a) $K'_1 \subset \overset{\circ}{N}_1$, $K''_2 - \overset{\circ}{N}_1 = K_2 - \overset{\circ}{N}_1$ et $K''_2 \cap N_1$ est π_1 -négligeable dans N_1 .

(b) Chaque sphère immergée de Σ rencontre $K''_2 - K'_1$ en exactement un point,
transversalement.

(c) Pour chaque disque (ouvert) immergé B'' de $K''_2 - K'_1$, la différence

$B = B'' - \overset{\circ}{N}_1$ est soit vide, soit un (seul) disque immergé de $D_2 = K_2 - \overset{\circ}{N}_1$. Dans
le premier cas, B'' ne rencontre aucune sphère de Σ . Dans le deuxième cas, B''
rencontre $e(B)$ sphères de Σ , chacune en un point et transversalement.

Preuve que 4.2 entraîne 4.1

Soit e la fonction qui associe $n+1$ à un disque de $K_2 - K_1$, si on a n points doubles de $K_2 - K_1$ sur ce disque. Soient $K_0 \subset K'_1 \subset K''_2$ le bâtiment et Σ la famille de sphères de Norman offerts par 4.2.

L'astuce de Norman appliquée autant de fois qu'on a de points doubles de $K_2 - N_1 = K''_2 - N_1$ sert à supprimer les singularités de K''_2 hors de N_1 . Soit $K''_2^\#$ le résultat et soit $K'_1^\# = K'_1$.

Chaque astuce est guidée par un arc plongé dans $K''_2 - K'_1$ qui relie un point double à une sphère de la famille Σ . Les sphères utilisées de Σ sont toutes distinctes. De même, les arcs sont disjoints.

Pour vérifier que $K''_2^\#$ est π_1 -négligeable dans $N_2 = N(K_2)$, il suffit de constater que, pour chaque disque immergé de $K''_2 - K'_1$, un méridien $m_2^\#$ s'annule dans $\pi_1(N_2 - K''_2^\#)$. Or, il y a une sphère S dans Σ qui coupe ce disque en un point q , et qui n'a pas été utilisée dans une astuce de Norman. Donc $m_2^\#$ peut être le méridien de q dans S ; et $S - q$ donne une contraction de $m_2^\#$ dans $N_2 - K''_2^\#$.

Pour montrer que $\pi_1(K''_2^\#) \rightarrow \pi_1(N_2)$ est nul, on peut constater facilement que $\pi_1(K''_2^\#)$ admet des générateurs dans N_1 . En effet, un générateur typique est un chemin associé à un point double q de $K''_2 - K'_1$; quand on défait les points doubles de $K''_2 - K'_1$, ce chemin est un quelconque chemin dans K''_2 ainsi désingu-

larisé qui relie les préimages q' , q'' de q . Il est essentiel ici que les sphères de Norman soient deux à deux disjointes et (sauf un point chacune) disjointes de K_2'' . $\square$

Preuve de 4.2 [Construction de sphères immergées de Norman]

Le cas spécial de 4.2, où e est de Dirac (i.e. e est 1 sur un seul disque immergé de D_1 et zéro sur tous les autres) entraîne le cas général par une récurrence sur $|e| = \sum e(D)$, où D parcourt les disques de D_1 . En effet, si Σ est une famille pour e et e_1 est de Dirac, on choisit un voisinage régulier

$N'_1 = N(K'_1)$ respectant K'_2 et tellement petit que $N'_1 \subset \overset{\circ}{N}_1$ et $N'_1 \cap \Sigma = \emptyset$.

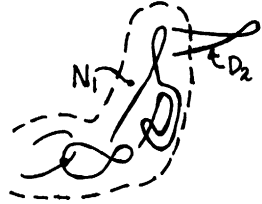
On constate que e_1 détermine une fonction de Dirac sur les disques immergés de $K'_2 - K_1$ et on applique le cas spécial pour obtenir un bâtiment $K_0 \subset K'_1 \subset K_2^{\bullet\bullet}$ et une sphère immergée Σ_1 . Alors, $\Sigma \cup \Sigma_1$ et $K_0 \subset K'_1 \subset K_2^{\bullet\bullet}$ prouvent 4.2 pour $e + e_1$.

Nous supposons donc dorénavant que e est de Dirac.

DÉMARCHE 1.- Rendre K_1 π_1 -négligeable dans N_1 par nettoyage de D_1 dans $N_1 - \overset{\circ}{N}_0$ loin de $K_2 - K_1$.

Résultat : $K_2^! \supset K'_1 \supset K_0$ où $K_2^! - K'_1 = K_2 - K_1$.

Le ! signale que $K_2^! - K'_1$ ne constitue pas un deuxième étage pour le bâtiment $K_0 \subset K'_1 (\subset \overset{\circ}{N}_1)$, vus les nouveaux points doubles introduits par nettoyage.



Exécution de 1. Chaque méridien m_1 de ∂D_1 dans ∂N_0 est, d'après 3.8, un produit de commutateurs $m_1 = [a_1, a_2][a_3, a_4] \dots$ dans $\pi_1(\partial N_0 - \partial D_1)$. Chaque a_i s'annule dans $\pi_1 N_1$. Par hypothèse (bâtiment réglementaire, Complément 3.9), K_0 est π_1 -négligeable dans N_1 . Chaque a_i s'annule donc dans $\pi_1(N_1 - K_0)$. Donc, dans $\pi_1(N_1 - K_1)$, a_i est un produit de méridiens $m_{i1} m_{i2} \dots$ de D_1 . Si on fait commuter tous ces méridiens, on tue m_1 . Donc, par nettoyage de D_1 dans $N_1 - \overset{\circ}{N}_0$, on peut tuer tout méridien de D_1 dans $\pi_1(N_1 - K_1)$ et K_1 devient π_1 -négligeable dans N_1 . Ces modifications de nettoyage donnant $K_1^!$ ont lieu près d'un nombre fini d'arcs qu'on peut choisir disjoints de $\overline{K_2 - K_1}$, par position générale ; alors on peut poser $K_2^! = K_1^! \cup (K_2 - K_1)$. $\square$

DÉMARCHE 2 (*).- Rendre $K_2^!$ π_1 -négligeable dans N_1 , par nettoyage de $K_2^! - K_1^! = K_2 - K_1$ dans $N_1 - K_1^!$.

Résultat : $K_2^{!!} \supset K_1^! \supset K_0$ avec $K_2^{!!}$ π_1 -négligeable dans N_1 et $K_2^{!!} - N_1 = K_2 - N_1$.

Exécution de 2. Chaque méridien m_2 de $K_2 - K_1$ dans $N_1 - K_1$ est, d'après le com-

(*) Il est possible de reporter 2 et la combiner avec la démarche 4.

plément 3.11, un produit dans $\pi_1(N_1 - K_2)$:

$$m_2 = [a_1, a_2][a_3, a_4] \dots$$

de commutateurs de méridiens a_i de K_1 . Après le nettoyage (qui tue une partie de $\pi_1(N_1 - K_2)$ et préserve l'idée de méridien), on a une équation semblable dans $\pi_1(N_1 - K_2^!)$:

$$m_2^! = [a_1^!, a_2^!][a_3^!, a_4^!] \dots$$

Mais $a_i^!$, étant méridien de $K_1^!$, s'annule dans $\pi_1 N_1 \cong \pi_1(N_1 - K_1^!)$. Donc $a_i^!$, est un produit $m_{i1} m_{i2} \dots$ de méridiens de $K_2^! - K_1^!$ dans $\pi_1(N_1 - K_2^!)$. Un nettoyage de $K_2^! - K_1^! = K_2 - K_1$ dans $N_2 - K_1^!$ fait commuter ces méridiens m_{ij} et donc tue le méridien $m_2^!$. Donc, après un tel nettoyage par composante de $K_2 - K_1$, on obtient $K_2^{!!} \supset K_1^! \supset K_0$ avec $K_2^{!!}$ π_1 -négligeable dans N_1 . $\square$

Soit $N_1' \subset \overset{\circ}{N}_1$ un petit voisinage régulier de $K_1^!$ respectant $K_2^{!!}$.

DÉMARCHE 3.- Trouver D_2^+ image d'une immersion normale de 2-disques dans

$N_1 - \overset{\circ}{N}_1'$ telle que $K_2^! = K_2^{!!} \cup D_2^+ \cup (\text{ombre } \partial D_2^+ \text{ dans } N_1')$ donne un bâtiment réglementaire $K_0 \subset K_1^! \subset K_2^!$.

Exécution de 3. Dans $\partial N_1'$, on choisit (voir 3.11) une famille de 2-tores caractéristiques disjoints pour les points doubles de $K_1^! - K_0$: $T_1, \dots, T_r, T_1', \dots, T_s'$, où $T_1, \dots, T_r$ sont associés aux points doubles anciens, ceux de $K_1 - K_0$ et $T_1', \dots, T_s'$ sont associés aux points doubles nouveaux, ceux résultant du nettoyage de $K_1 - K_0$.

On choisit des cercles plongés $C_1', \dots, C_s'$ disjoints des cercles $C_1, \dots, C_r$ de $\partial D_2^{!!}$ tels que C_i' rencontre T_1' en un point, transversalement et $C_i' \cap T_j' = \emptyset$, $i \neq j$. Puisque $\pi_1(K_1) \cong \pi_1(N_1)$ et que le nettoyage de K_1 a eu lieu près d'une collection finie d'arcs (3.2), $\pi_1(\partial N_1' - (T_1' \cup \dots \cup T_s')) \rightarrow \pi_1(N_1)$ est surjectif. Donc, on peut s'arranger pour que C_i' s'annule dans $\pi_1(N_1)$ (ceci au prix de forcer des intersections des C_i' avec les T_j). Puisque N_1' , comme $K_1^!$, est π_1 -négligeable dans N_1 , il existe dans $N_1 - \overset{\circ}{N}_1'$ une image D_2^+ d'une immersion normale d'une somme de 2-disques, de bord $C_1' \cup \dots \cup C_s'$ et transverse à $K_2^{!!}$. $\square$

Remarques. - (a) Cette démarche a nécessité l'introduction des attachements triangulaires plutôt que diagonaux.

(b) Il est possible (mais inintéressant) de trouver D_2^+ disjoint de $K_2^{!!}$.

DÉMARCHE 4.- Nettoyer D_2^+ dans $N_1 - \overset{\circ}{N}_1$ pour rendre K_2' π_1 -négligeable dans N_1 .

Résultat : Bâtiment réglemantaire $K_0 \subset K_1' \subset K_2''$ avec K_2'' π_1 -négligeable dans N_1 .

Exécution de 4. Chaque méridien m_2^+ de D_2^+ dans $\pi_1(N_1 - (K_2^{!!} \cup D_2^+))$ est lui-même un commutateur $m_2^+ = [a_1, a_2]$ de méridiens de K_1' - en fait déjà dans

$\pi_1(\partial N_1' - \partial D_2')$ (voir construction de D_2^+ , démarche 3). Chaque méridien a_i s'annule dans $\pi_1(N_1) \cong \pi_1(N_1 - K_2^{!!})$, et est donc, dans $\pi_1(N_1 - (K_2^{!!} \cup D_2^+))$, un produit $a_i = m_{i1} m_{i2} \dots$ de méridiens de D_2^+ . Ainsi, en faisant commuter les méridiens m_{ij} par nettoyage de D_2^+ , on tue m_2^+ . $\square$

DÉMARCHE 5.- Trouver une 2-sphère Σ immergée dans $N_1 - K_1'$ telle que Σ intersecte K_2'' transversalement, en un seul point, lequel appartient au disque immergé B de $K_2 - K_1'$ avec $e(B - \overset{\circ}{N}_1) = 1$.

Exécution de 5. Un méridien de $B \cap \overset{\circ}{N}_1$ est contractile dans $N_1 - K_2''$. $\square$

La preuve de 4.2 est complète. Ainsi le théorème 1.2 de Freedman est prouvé.

La preuve du théorème de Freedman que j'ai présentée est un peu moins exigeante que celle de [Fr]. Elle démontre en même temps une généralisation.

THÉORÈME DE SCINDEMENT 4.3.- Soient V^4 une variété orientée C^∞ et simplement connexe et $\alpha \in H_2(V)$ une sous-forme de la forme d'intersection, telle que α soit isomorphe à la forme d'une 4-variété C^∞ close et connexe M^4 , sans 3-anse. Alors α est réalisé par un ouvert $N^4 \subset \text{int } V$ avec $N^4 \simeq M^4 - (\text{point})$ (je n'affirme pas $\frac{p}{2}$) et par un compact $X \subset N^4$ qui est π_1 -négligeable dans chaque voisinage et tel que $X \hookrightarrow N^4$ soit une équivalence de silhouettes (shape). (*).

Indications. $M_0 = M - (\text{disque})$ est un corps d'anses sans 3-anses et 4-anses, de telle sorte qu'il y a une immersion $f : M_0 \rightarrow V$ représentant α , avec f un plongement, sauf pour plombages induits sur les 2-anses, vérifiant $\text{self}(f(h_i)) = 0 = f(h_i) \cdot f(h_j)$ où h_i , $i = 1, \dots, r$, sont les âmes des 2-anses. Trouver f ne pose aucun problème si (cas important !) M_0 est sans 1-anses. [Sinon, on peut, par exemple, arranger M_0 pour que les 1-anses soient homologiquement diagonalement tuées par autant (soit $k < r$) de 2-anses ; puis à l'aide de 3.8 et 3.2 (nettoyage) on peut construire f de sorte que $f(h_i) \cap f(h_j) = \emptyset$ si $i \neq j$ et $i \leq k$, ce qui entraîne $f(h_i) \cdot f(h_j) = 0$, $\forall i \neq j$.] A ce point, notre preuve de 1.2 est applicable ; elle a été construite exprès pour. $\square$

(*) Remarque : Si $H_2(V) = \alpha \oplus \alpha^\perp$ comme forme, avec α et $\alpha^\perp$ impaires, alors il paraît qu'on a le droit de spécifier l'invariant de Rohlin de $N^4 - X$.

§ 5. Quelques conséquences

Dans la suite, je tiens à montrer l'utilité du théorème de scindement 4.3.

THÉORÈME DES $S^3 \times R$ EXOTIQUES 5.1.- Donnée une sphère d'homologie lisse H^3 de dimension 3, il existe une variété V^4 qui a le type d'homotopie propre de $S^3 \times R$ et qui admet une involution τ dont l'ensemble des points fixes est un exemplaire de H^3 séparant les deux bouts de V^4 .

COMPLÉMENT 5.2.- Supposons que H^3 (tout comme la sphère d'homologie de Poincaré-Klein) borde une variété compacte lisse ($=C^\infty$) et parallélisable de signature $\equiv 8$ modulo 16. Alors $V \not\cong S^3 \times R$, et V ne contient même pas un exemplaire de S^3 séparant les deux bouts.

Le complément découle du théorème de Rohlin ; d'ailleurs immédiatement, sauf quand on n'a qu'un $S^3 \subset V^4$ qui coupe H^3 .

Question : Est-ce que V^4 de 5.2 est difféomorphe à un produit $H' \times R$? [En ce cas, H' ayant visiblement le type d'homotopie de S^3 , serait un contre-exemple à la conjecture de Poincaré.]

Preuve de 5.1. On suppose d'abord que $H^3 = \partial W^4$, où $W^4 = B^4 \cup (2\text{-anse})$ a la forme d'intersection de $CP(2)$. Alors $DW^4 = \partial(W^4 \times I) \cong CP(2) \# -CP(2)$ (théorie Smale).

Exemple à étudier. Si le noeud dans ∂B^4 d'attachement de l'anse est le trèfle positif et que son encadrement (framing) a un nombre d'enlacement $+1$, alors $\partial W^4 = H^3$ est la sphère de Poincaré-Klein [Ro, p. 260].

Le théorème de scindement 4.3 offre un compact $X \subset \text{int } W^4$ qui est π_1 -négligeable dans chaque voisinage et $X \stackrel{\text{sh}}{\simeq} W \simeq S^2$. Le complément $W - X$ a l'homologie de S^3 et π_1 trivial ; d'ailleurs, son π_1 -système à l'infini est trivial. Donc $W - X$ a le type d'homotopie propre de $S^3 \times [0, \infty[$, (Appendice).

La variété voulue V^4 est le double de $W^4 - X$ et τ échange les deux exemplaires de $W^4 - X$ fixant H^3 (voir Appendice).

Quant au cas général, on sait que H^3 borde une variété W^4 compacte et simplement connexe (cf. [La]). D'ailleurs la forme d'intersection sur $H_2(W^4)$ est de déterminant ± 1 , et peut être supposée indéfinie et impaire. Alors [Se] c'est la forme de $rCP(2) \# s(-CP(2)) = M^4$ avec $r, s \geq 1$. Dès ce point, le premier raisonnement est applicable. $\square$

Exemple transformé. Dans le double $D(W)$ de la variété de l'exemple, châtrons un des deux exemplaires de X . Le résultat $D(W)/X = W_+^4$ a le type d'homotopie de $CP(2)$ et risque d'être une variété (5.6). Par contre, W_+^4 n'est pas cobordante à une

variété lisse (cf. [KiS ; p. 324]). Si W_+^4 est un complexe simplicial, la conjecture de Poincaré est fautive. Pour $n \geq 1$, $W_+^4 \times R^n$ est une variété topologique sans aucune structure de variété lisse ou PL.

Preuve du complément 5.2. Montrons que si $H_1, H_2 \subset V^4$ sont deux sphères d'homologie lisses séparant les deux bouts de V^4 ; alors il y a un cobordisme lisse et parallélisable $(W^4; H_1, H_2)$ de signature 0. Soit, en effet, W^4 la frontière dans $V^4 \times I$ d'un voisinage Y^5 lisse et fermé d'un des deux bouts de $V^4 \times I$. L'adhérence $\bar{Y}$ de Y dans $(V \cup \infty) \times I$ est une 5-variété d'homologie compacte de bord $\partial \bar{Y} = \text{adh}(\partial Y) \simeq W^4 \cup \text{cône}(H_1) \cup \text{cône}(H_2)$. Donc $\sigma(W) = \sigma(\partial \bar{Y}) = 0$. $\square$

THÉORÈME 5.3.- Il y a un h-cobordisme propre, lisse $(W^4; V_1^3, V_2^3)$ avec

$V_1 \simeq V_2 \simeq S^2 \times R$, qui n'est pas un cobordisme produit. C'est-à-dire

$W^4 \not\simeq V_i \times [0, 1]$, bien que $W^4 \overset{p}{\simeq} V_i^3 \times [0, 1] \overset{p}{\simeq} S^2 \times R$.

Preuve de 5.3. Dans une variété V^4 du théorème 5.2, on plonge proprement un exemplaire de R reliant les deux bouts; soit T un voisinage tubulaire de R . Le complément $V_O^4 = V - \overset{\circ}{T}$ a le type d'homotopie propre de $B^3 \times R$ (Appendice), et est tout aussi exotique que V^4 (exercice facile). Or, $\partial V_O \simeq \partial B^3 \times R$ et $B^3 \simeq B^2 \times [0, 1]$ (modulo arêtes!). Donc, on a un h-cobordisme propre $(V_O^4; B^2 \times 0 \times R, B^2 \times 1 \times R)$. En recollant avec $B^2 \times ([0, 1]; 0, 1) \times R$ le long de $\partial B^2 \times [0, 1] \times R$, on obtient le h-cobordisme propre voulu entre variétés sans bord. Le lecteur vérifiera sans peine les propriétés affirmées, cf. [KiS, p. 129†]. $\square$

THÉORÈME DE RÉALISATION 5.4.- Toute forme bilinéaire symétrique sur Z de déterminant ± 1 est réalisée par une 4-variété singulière W^4 compacte orientée et simplement connexe ayant un point (éventuellement) singulier q , et jouissant des propriétés :

- (i) $W \times S^1$ est une 5-variété topologique close.
- (ii) q est π_1 -négligeable dans chacun de ses voisinages.
- (iii) $W - q$ est une variété lisse (sans bord).

COMPLÉMENT 5.5.- Si, pour toute V 4-variété, $V \overset{p}{\simeq} R^4 \Rightarrow V \approx R^4$, alors W^4 peut être une vraie variété topologique.

Remarque sur 5.4.- Pour α paire, on peut montrer que $W - q$ est unique à h-cobordisme lisse et propre près (= difféomorphisme?). Pour α impaire, il y a exactement deux choix de $W - q$ à cette équivalence près; pour exactement un de ces deux choix W est stablement lissable (vraiment lissable?), voir [KiS, p. 328].

Preuve de 5.4. Si β est la forme (1) de $CP(2)$, alors $\alpha \oplus (\pm \beta)$ est indéfinie et impaire et donc $[Se]$ réalisée par $r CP(2) \neq s(-CP(2)) = V^4$. Dans ce V^4 , le théorème de scindement 4.3 réalise $(\pm \beta) \subset H_2 V^4$ par un compact X . Alors $V^4 - X$ réalise α et $W^4 = V^4/X$ est la variété singulière voulue.

Les propriétés (ii) et (iii) sont assez évidentes. Pour la propriété (i), voir Appendice. $\square$

Pour prouver le complément 5.5 et justifier les remarques suivant 1.2 on a

PROPOSITION 5.6.- Si, pour toute V 4-variété, $V \stackrel{p}{\simeq} R^4 \Rightarrow V \approx R^4$, alors, pour tout V 4-variété, $V \stackrel{p}{\simeq} S^3 \times R \Rightarrow V \approx S^3 \times R$. Cf. [Fr].

Preuve de 5.6 (tirée essentiellement de $[Si_2, App. I]$). Dans $V^4 \stackrel{p}{\simeq} S^3 \times R$, on plonge proprement un exemplaire de R reliant les deux bouts; alors $V^4 - R$ est $\stackrel{p}{\simeq} R^4$ (Appendice), et donc, par hypothèse, $\approx R^4$. Soit F^3 une sous-variété localement plate dans V^4 qui coupe R transversalement en un point O (F^3 peut être un disque). Alors, $F^3 - O \subset V^4 - R \approx R^4$ et dans $(V^4 - R) \cup \infty \approx S^4$, $(F^3 - O) \cup \infty$ devient une sous-variété topologique qui est localement plate sauf en ∞ et donc (selon $[Ki_1]$) localement plate même en ∞ . Donc, on a des 4-boules plates $B^4 \subset (V - R) \cup \infty$ telles que $\partial B^4 = S^3$ coïncide près de ∞ avec $(F - O) \cup \infty$. La 3-sphère qu'on déduit dans V^4 , à savoir $S' = (S^3 - \infty) \cup O$, est localement plate et sépare les deux bouts de V^4 . Découpons V^4 le long de S' en deux variétés V_+^4, V_-^4 de bord $S' \approx S^3$. En rattachant à V_+^4 une 4-boule le long de S' , on obtient $\hat{V}_+^4 \stackrel{p}{\simeq} R^4$ (Appendice); et donc $\hat{V}_+^4 \approx R^4$, d'où (par une fraction du théorème de Shoenflies [Do]) $V_+ \approx S^3 \times [0, \infty[$. De même, $V_- \approx S^3 \times]-\infty, 0]$. Donc, on reconstitue $V \approx S^3 \times]-\infty, \infty[$. $\square$

Preuve du complément 5.5

Si on savait assurer, dans 4.3, que $N^4 - X \stackrel{p}{\simeq} S^3 \times R$, le complément découlerait immédiatement du théorème 5.5 et du lemme 5.6. Entretemps, on peut changer de construction, et exploiter l'argument élémentaire de [FrT] (handle trading) pour obtenir d'abord une 4-variété compacte et lisse W_O^4 réalisant α , dont le bord est une sphère d'homologie H^3 , et telle que $W_O^4 = H^3 \cup$ (anses d'indices ≥ 2). Par 5.1 et 5.6, H^3 serait également le bord d'une variété topologique compacte et contractile D^4 , à savoir $(V^4/\tau) \cup \infty$ de 5.1. Alors $W^4 = W_O^4 \cup D^4$ serait une variété topologique qui établit 5.5. $\square$

THÉORÈME D'UNICITÉ 5.7 (Freedman 1978 suivant $[Ca_3]$).- Donné un h-cobordisme lisse $(W^5; M, M')$ entre deux 4-variétés closes et simplement connexes M et M' , il existe des compacts $A \subset M$ et $A' \subset M'$, chacun $\stackrel{sh}{\simeq}$ (point) et π_1 -négligeable

dans ses voisinages, de sorte qu'un difféomorphisme $(M-A) \cong (M'-A')$ est induit par le champ de gradient d'une fonction de Morse sur l'h-cobordisme.

Preuve de 5.7 (esquisse exploitant 4.3)

La théorie des anses de Smale, voir [Milnor, Lectures on the h-cobordism theorem, Princeton U. Press 1965], offre une fonction de Morse ordonnée f sur l'h-cobordisme ayant des points critiques d'indices 2 et 3 seulement. Dans un niveau non-critique $N^4 = f^{-1}(x)$ où x sépare les valeurs critiques d'indice 2 de celles d'indice 3, on a des 2-sphères $S_1, \dots, S_k$ constituées des points de N^4 dont la trajectoire de gradient descend à un des k points critiques d'indice 2. De même on a des 2-sphères $S'_1, \dots, S'_k$ dans N^4 , dont les trajectoires montent aux k points d'indice 3. Le lemme de changement de base de Smale permet d'assurer que $S_i \cdot S_j = \delta_{ij}$ dans N^4 . Dans $[Ca_3]$, Casson montre que, par une modification du champ de (pseudo-) gradient de f suivant une isotopie de N^4 , on peut rendre $N^4 = \bigcup_i (S_i \cup S'_i)$ simplement connexe. (Il s'agit d'une mise en position générale suivie d'une suite de processus inverses de Whitney entre $S = \bigcup_i S_i$ et $S' = \bigcup_i S'_i$.) Par un arc plongé J dans N^4 , disjoint de S' , on relie les sphères de S . Alors, la forme d'intersection dans N^4 des 2-cycles de $J \cup S \cup S'$ est celle de $\#^k (S^2 \times S^2)$, et $J \cup S \cup S'$ peut devenir le 0-étage K_0 d'une construction (suivant 4.3 et 1.2) d'un compact $X \subset N^4$ tel que $N(K_0) \subset X$ et $X \simeq \#^k (S^2 \times S^2) - (\text{point})$ et X est π_1 -négligeable dans chaque voisinage. Soit $\hat{X} \subset W^5$ l'adhérence dans W^5 de toutes les trajectoires du champ de gradient passant par X . Certainement $W - \hat{X} \cong (M - \hat{X}) \times [0, 1]$ suivant les trajectoires de gradient. On constate alors que les compacts $A = M \cap \hat{X}$ et $A' = M' \cap \hat{X}$ établissent le théorème d'unicité 5.7. $\square$

APPENDICE : Homotopie propre, géométrie stable

Ici variété veut dire variété topologique (cf. [KiS ; III]) ; et les espaces sont tous des ANR (rétracts absolus de voisinage).

Un espace X est conique à l'infini s'il existe un voisinage ouvert de l'infini (d'Alexandroff) dans X , qui ait la forme $A \times R$, où A et $\hat{X} = X - (A \times]0, \infty[)$ sont compacts. (Dans X identifions A à $A \times 0$; on l'appelle la base du cône.)

A.1. Si X est conique à l'infini, le type d'homotopie propre de X détermine le type d'homotopie ordinaire de $(X, A) \simeq (\hat{X}, A)$. Réciproquement, si $(X, A) \simeq (Y, B)$, où (Y, B) est un couple compact, alors $X \xrightarrow{p} (Y \cup B \times [0, \infty[) / \sim$ où $\sim$ identifie B à $B \times 0$. $\square$

A.2. (Voir [BLL]). Soit V^n une variété simplement connexe de type fini, à bord compact, qui ait un π_1 -système à l'infini trivial (i.e. pour tout voisinage U de ∞ dans V^n , il existe un autre, $U' \subset U$ tel que chaque lacet dans U' soit contractile dans U). Alors pour $n + k \geq 7$, la variété $V^n \times B^k$ est conique à l'infini ; d'ailleurs la base A du cône peut être une variété compacte. $\square$

A.3. Le couple $(V^n \times B^k, A)$ donné par A.2 est un espace de Poincaré à bord (coefficients $\mathbb{Z}$), de dimension (formelle) n ; en particulier A est un espace de Poincaré (sans bord), de dimension $n - 1$; ainsi $H^i_1(A) \cong H^{n-1-i}_1(A)$, $\forall i$.

Preuve de A.3. Pour $n + m \geq 7$, [BLL] assure que $V^n \times S^m$ est conique à l'infini de base A' , et, par A.1, on a $(V^n \times S^m, A') \simeq (V^n \times B^k \times S^m, A \times S^m)$. Or, $(V^n \times S^m, A')$ est visiblement un espace de Poincaré à bord, de dimension $n + m$; la conclusion voulue s'en suit aisément si $m \gg n$. $\square$

Combinant A.1, A.2, A.3 avec $V \xrightarrow{p} V \times B^k$, on déduit

PROPOSITION A.4.- Avec les données de A.2, le type d'homotopie propre de V^n est déterminé suivant la règle en A.1 par le type d'homotopie d'un couple compact (Y, B) qui est un espace de Poincaré à bord, de dimension n , où $V^n \simeq Y$, et où $\pi_1(B) = 0$ (pour tout point base). $\square$

PROPOSITION A.5.- Considérons les 4-variétés V^4 orientées simplement connexes de type fini et sans bord, ayant un seul bout, et un π_1 -système à l'infini trivial. Alors, pour une telle V^4 , la forme d'intersection α sur $H_2(V^4)$ a déterminant ± 1 , et α détermine le type d'homotopie propre de V^4 .

Preuve de A.5. Dans le couple compact (Y, B) offert par A.4, on voit que $A \simeq S^3$,

que $V \simeq$ (bouquet de 2-sphères), et que α a déterminant ± 1 . D'après [MiH, p. 103-105] (résultat de Pontrjagin et Whitehead), α détermine le type d'homotopie de (Y, B) , lequel détermine le type d'homotopie propre de V^4 par A.1. $\square$

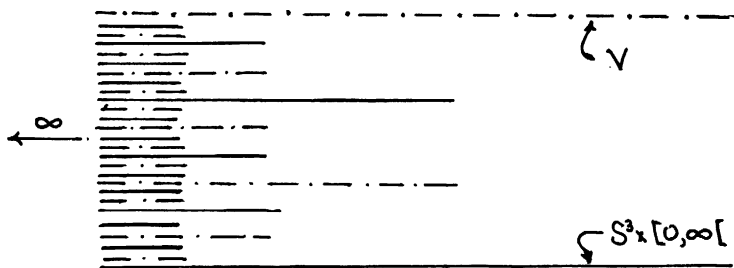
THÉOREME A.6.- Avec les données de A.5, le produit $(V^4 \cup \infty) \times S^1$ est une 5-variété topologique près de $\infty \times S^1$.

Pour cette conclusion, il suffit, en fait, que $V \times S^1$ ait un voisinage ouvert de l'infini homéomorphe à $S^2 \times S^1 \times \mathbb{R}$.

Indications pour A.6. D'abord $V^4 \times S^1$ vérifie la deuxième hypothèse car la technique d'engouffrement permet de montrer [GHS] [Si₁, II], que $\infty \times S^1$ a un voisinage dans $V^4 \times S^1$ qui est un revêtement infini-cyclique d'une 5-variété close $\simeq S^3 \times S^1 \times S^1$; laquelle est $\approx S^3 \times S^1 \times S^1$ par un calcul chirurgical. (Voir [KiS, p. 264-288]; on a $\underline{S}_0(S^k \times T^n) = 0$, $k+n \geq 5$, bien que

$\underline{S}(S^k \times T^n) = [T^n, G/TOP]$.) Cet argument marche si $V \times S^1$ est près de l'infini une 5-variété sans bord, et que son bout est "docile de type $S^3 \times S^1$ ".

A ce point, on trouve qu'il y a un h-cobordisme propre (et inversible) "vers l'infini" entre V et $S^3 \times [0, \infty[$. On en déduit que $(V \cup \infty) \times S^1$ est homéomorphe près de $\infty \times S^1$ à $((S^3 \times]0, \infty[) \cup \infty) \times S^1 \approx \mathbb{R}^3 \times S^1$. L'argument de "meshing" qui me permet de montrer ceci est la célèbre technique de A.V. Černavskii exploité aussi dans [Ki₁]. Les détails constituent une des deux preuves de mes résultats de [KiS, p. 212] (Nice 1970). L'article [83] cité là n'est jamais paru; il a été perdu pendant quelques années sur le bureau d'un collègue! Il vaut donc la peine de résumer l'argument de meshing nécessaire, par le diagramme ci-dessous. (D'ailleurs on peut envisager une preuve par résolution CE de $(V \cup \infty) \times \mathbb{R}$ en 5-variété.)



BIBLIOGRAPHIE

- [BL] W. BROWDER, J. LEVINE and G. LIVESAY - Finding a boundary for an open manifold, Amer. J. Math., 87 (1965), 1017-1028.
- [Ca₁] A. CASSON - A curious 4-manifold, Lectures, Cambridge and Paris, (1973/74).
- [Ca₂] A. CASSON - Ends of 4-manifolds, Lectures, Cambridge and Paris, (1973/74).
- Les résultats de [Ca₁] [Ca₂] ont été très largement diffusés, oralement d'abord, et sous forme de notes prises par C. Mc A. Gordon (Austin, Texas). Je crois à la parution de [Ca_{1,2,3}] dans un futur numéro d'Astérisque consacré aux basses dimensions. A. Casson est à Trinity College, Cambridge.
- [Ca₃] A. CASSON - The 5-dimensional simply connected h-cobordism conjecture and flexible handle theory, lecture at I. A. S., Princeton, Jan., 1976.
- [Ca₄] A. CASSON - A translation of the link cobordism problem into algebraic braid theory, lecture in F. Adams', topology seminar, I.C.M. Helsinki, 1978.
- [CaF] A. CASSON and M. FREEDMAN - The open surgery problem on non-simply connected manifolds, corresponding e.g. to lecture of M. Freedman in Cambridge, Aug. 1978 (article in preparation).
- (Il n'y a pas encore de généralisations directes de 1.1 et 1.2 quand $\pi_1 \neq 0$.)
- [Do] A. DOUADY - Plongement de sphères [d'après Mazur et Brown], Sémin. Bourbaki, (1960/61), exposé 205, Benjamin, N. Y.
- [Fr] M. H. FREEDMAN - A fake $S^3 \times R$ (open surgery in dimension = 4), preprint June 1978 and Sept. 1978, Univ. of Calif. at San Diego; to appear in Annals of Math. (vol. 110(1979), p. 177-201.)
- [FrT] M. FREEDMAN and L. TAYLOR - Λ -splitting 4-manifolds, Topology, 16 (1977), 181-184.
- [GHS] L. GUILLOU, H. HÄHL et L. SIEBENMANN - Les voisinages ouverts réguliers : critères homotopiques d'existence, Ann. Sci. Ecole Normale Supérieure, 7(1974), 431-462.
- [Hu] J. HUDSON - Piecewise - linear topology, Benjamin Inc. New York, 1969.
- [Ki₁] R. KIRBY - The union of flat (n-1)-balls is flat in R^n , Bull. Amer. Math. Soc., 1974 (1968), 614-617.
- [Ki₂] R. KIRBY - Problems in low dimensional manifold theory, Stanford Symposium 1976. Proc. Symposia Pure Math. 32, Amer. Math. Soc., 1978.
- [KiS] R. KIRBY and L. SIEBENMANN - Foundational essays on topological manifolds, Ann. of Math. Study, 88 (1977).

- [La] J. LANNES - Un faux espace projectif réel de dimension 4 (d'après S. Cappell et J. Shaneson), Sémin. Bourbaki, 1978/79, exposé 527, Nov. 1978.
 - [Man] R. MANDELBAUM - Four dimensional topology, preprint of survey article, Univ. of Rochester, 1978 (cet article est très lisible, à jour et assez compréhensif).
 - [MatS] T. MATSUMOTO and L. SIEBENMANN - The topological s-cobordism theorem fails in dimension 4 or 5, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 84 (1978), 85-87.
 - [MiH] J. MILNOR and D. HUSEMOLLER - Symmetric bilinear forms, Ergebnisse, Band 73, Springer 1973.
 - [Mu] J. MUNKRES - Elementary differential topology, Ann. of Math. Study, n° 54 (1963).
 - [No] R. NORMAN - Dehn's lemma for certain 4-manifolds, Invent. Math., 7 (1969), 143-147. [Article posthume - Norman a trouvé la mort dans les montagnes du Pays-de-Galles.]
 - [Ro] D. ROLFSEN - Knots and Links, Publish or Perish, No 7, Editor M. Spivak Box 7108, Berkeley CA 94707.
 - [Sch] M. SCHARLEMANN - Transversality theories at dimension 4, Inventiones Math., 33 (1976), 1-14. (Avec 5.4 cet article donne une théorie de transversalité qui est pratique et peut-être optimale.)
 - [Se] J.-P. SERRE - Cours d'arithmétique, Collection SUP, Presses Univ. de France, 1970.
 - [Si₁] L. SIEBENMANN - A total torsion obstruction, Comment. Math. Helv., 45 (1970), 1-48.
 - [Si₂] L. SIEBENMANN - Approximating cellular maps by homeomorphisms, Topology, 11 (1973), 271-294.
- Les deux articles suivants exploitent des constructions infinies en dimension 3 analogues à celles de cet exposé.
- [P] V. POENARU - A remark on simply connected 3-manifolds, Bull. Amer. Math. Soc., 80 (1974), 1203-4.
 - [McT] D. MCMILLAN and T. THICKSTUN - Open 3-manifolds and the Poincaré Conjecture, preprint Univ. of Wisconsin at Madison, to appear in Topology.