SÉMINAIRE N. BOURBAKI

JACQUES TITS

# Groupes de Whitehead de groupes algébriques simples sur un corps

*Séminaire N. Bourbaki*, 1978, exp. nº 505, p. 218-236

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1976-1977__19__218_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

# GROUPES DE WHITEHEAD DE GROUPES ALGÉBRIQUES SIMPLES SUR UN CORPS

[d'après V. P. PLATONOV et al.]

par Jacques TITS

Soit $\underline{G}$ un groupe algébrique quasi-simple sur un corps $K$. Il sera question ici de la structure du groupe $G = \underline{G}(K)$ des points rationnels de $\underline{G}(K)$ dans le cas où $\underline{G}$ est <u>isotrope</u>, c'est-à-dire possède des $K$-sous-groupes isomorphes au groupe additif. Lorsqu'il en est ainsi, les sous-groupes $\underline{A}(K)$ de $G$, où $\underline{A}$ parcourt l'ensemble des sous-groupes additifs en question, engendrent un sous-groupe distingué $G^+$ de $G$ et l'on sait que si $\operatorname{card} K \geq 4$, tout sous-groupe distingué propre de $G^+$ est central ([39], [3]). (Il s'ensuit que $G^+$ est aussi engendré par toute classe de conjugaison de sous-groupes $\underline{A}(K)$ dans $G$ ; on retrouve ainsi les définitions classiques de $G^+$ à l'aide de "transvections" etc.) En particulier, $G^+/Z(G^+)$ est simple. Cela ramène dans une certaine mesure l'étude de la structure de $G$ à celle du quotient $W(\underline{G}, K) = G/G^+$.

Considérons en particulier le cas où $\underline{G} = \underline{SL}_n(D)$, avec $n \geq 2$, $D$ désignant une algèbre à division de centre $K$ et de dimension finie sur $K$. Alors $G = SL_n(D)$ (nous désignons ainsi le groupe des éléments de norme réduite 1 de $M_n(D)$, et non pas, comme dans [12], le groupe engendré par les transvections). D'après la théorie des "déterminants non commutatifs" de Dieudonné ([9], [12]), on a dans ce cas $G^+ = G'$ (groupe dérivé) et $W(\underline{G}, K)$, qui est donc le groupe $SL_n(D)$ rendu abélien, est isomorphe à $SL_1(D)$ rendu abélien, c'est-à-dire à $SL_1(D)/(D^\times)'$. Ce groupe, qui ne dépend donc pas de $n$, est noté $SK_1(D)$ ([1]). Nous verrons que dans quelques cas importants il est réduit à l'élément neutre. On s'est longtemps demandé s'il en est toujours ainsi : c'est le "problème de Tannaka-Artin", selon la terminologie de Platonov (pour les origines, voir notamment [23], [44], [21]), lequel lui a récemment donné une réponse négative ([27], [28], [29]). Ce résultat de Platonov est l'objet principal du présent exposé (cf. le § 3).

Soit $\rho : \tilde{\underline{G}} \to \underline{G}$ un "revêtement universel" de $\underline{G}$ (i.e. $\tilde{\underline{G}}$ est simplement connexe et $\rho$ est une isogénie centrale). On a $\rho(\tilde{G}^+) = G^+$. La suite exacte de cohomologie fournit donc une suite exacte

$$(\mathrm{Ker}\ \rho)(K) \to W(\tilde{\underline{G}}, K) \to W(\underline{G}, K) \to H^1(\mathrm{Ker}\ \rho) \to H^1(\tilde{\underline{G}})$$

(si $\rho$ n'est pas séparable, il faut interpréter $H^1(\mathrm{Ker}\ \rho)$ "en conséquence"). Grosso modo, on peut dire que, "modulo un problème de cohomologie galoisienne", celle-ci ramène le calcul de $W(\underline{G}, K)$ à celui de $W(\tilde{\underline{G}}, K)$. Généralisant le "problème de Tannaka-Artin", M. Kneser a posé la question suivante que j'ai imprudemment transformé en conjecture [39] : $W(\underline{G}, K)$ est-il égal à $\{1\}$ pour tout groupe $\underline{G}$ simplement connexe et tout corps $K$ ? Le résultat de Platonov mentionné plus haut montre qu'il n'en est rien. On va voir cependant que $W(\tilde{\underline{G}}, K) = \{1\}$ pour "beaucoup" de groupes simplement connexes $\underline{G}$.

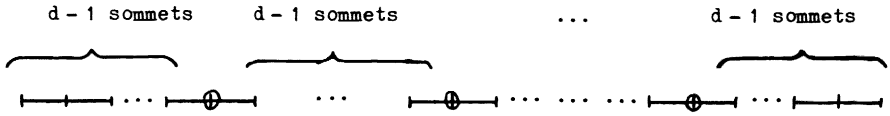
## 1. Enoncé de résultats

### 1.1. Trivialité de $W(\underline{G}, K)$ pour certains types de groupes $\underline{G}$

1.1.1. Soit $K_s$ une clôture séparable de $K$. Au couple $(\underline{G}, K)$ sont naturellement associés un diagramme de Dynkin $\Delta$ (celui de $\underline{G}$), un homomorphisme continu $\tau : \mathrm{Gal}(K_s/K) \to \mathrm{Aut}\ \Delta$, et un ensemble $\underline{O}$ d'orbites, dites distinguées de l'action ainsi définie de $\mathrm{Gal}(K_s/K)$ sur l'ensemble des sommets de $\Delta$ (cf. e.g. [40]). L'ensemble $\underline{O}$ décrit la "position" d'un $K$-tore déployé maximal de $\underline{G}$ dans un tore maximal. Pour les besoins de l'exposé, il sera commode d'appeler type de $\underline{G}$ le système formé de $\Delta$, du groupe d'automorphismes $\tau(\mathrm{Gal}(K_s/K))$ de $\Delta$ et de $\underline{O}$. On suppose désormais $\underline{G}$ simplement connexe et on va commencer par énoncer quelques résultats montrant que pour certains types de groupes, on a toujours $W(\underline{G}, K) = \{1\}$.

1.1.2. Si $G$ est déployé ou, plus généralement, quasi-déployé (i.e. $\underline{O}$ est l'ensemble de toutes les orbites de $\mathrm{Gal}(K_s/K)$ dans l'ensemble des sommets de $\Delta$), on a $W(\underline{G}, K) = \{1\}$ (cf. [7], [38]).

1.1.3. Formes intérieures de $A_n$. Dans cet exposé, toutes les algèbres simples considérées sont supposées de dimension finie sur leur centre. Soit $D$ une algèbre à division de centre $K$, dont le degré $d = \sqrt{[D:K]}$ est sans facteur carré (quadratfrei). Alors $SK_1(D) = \{1\}$ (voir [44] et le n° 2.6). Donc, si $\underline{G} = \underline{SL}_m(D)$ $(m \geq 2)$ pour une telle algèbre à division, on a $W(\underline{G}, K) = \{1\}$. Notons que l'hypothèse faite sur $\underline{G}$ est bien une condition imposée à son type : elle signifie en effet que $\underline{G}$ est une forme de $A_{md-1}$ de type




où $d$ est sans facteur carré.

1.1.4. Formes extérieures (unitaires) de $A_n$. Soient $D$ une algèbre à division dont le centre est une extension quadratique $L$ de $K$ et dont le degré $\sqrt{[D:L]}$ est sans facteur carré, $\sigma$ une involution de second espèce de $D$ induisant sur $L$ l'élément non trivial de $\mathrm{Gal}(L/K)$ et $h$ une forme hermitienne dans $D^m$ $(m \geq 2)$ relative à $\sigma$. Alors, si $\underline{G} = \underline{SU}(h)$, on a $W(\underline{G}, K) = \{1\}$. Cela résulte facilement des démonstrations du théorème 2 de [43] (p. 10, type III) et du théorème 4 de [33]. (Pour le cas où $D = L$, voir aussi [10], chap. 6.) Ici encore, l'hypothèse faite sur $\underline{G}$ peut s'exprimer en termes de type.

1.1.5. Formes de $B_n$ et $C_n$. On a $W(\underline{G}, K) = \{1\}$ pour toute forme isotrope $\underline{G}$ de $B_n$ ou $C_n$. Pour $C_n$, voir [11]. Pour $B_n$, on vérifie sans peine que le noyau de l'homomorphisme $G \to SO$ est contenu dans $G^+$, ce qui ramène l'assertion, au moins en caractéristique $\neq 2$, aux résultats de [14] sur la structure de $SO$ (voir aussi [12], § II.8). Le cas de la caractéristique 2 (où $\underline{G} = \underline{\mathrm{Spin}}\, q$ pour une forme quadratique $q$, isotrope, non dégénérée et de défaut 1) n'est pas traité dans les références citées, mais ne présente pas de difficulté particulière. On peut d'ailleurs donner une démonstration simple, valable en toute caractéristique, consistant en une induction sur la dimension dont le démarrage est assuré par l'isomorphisme entre $B_2$ et $C_2$.

1.1.6. Formes de $D_n$. Soient $D$ une algèbre à division de centre $K$ et de degré $d = \sqrt{[D:K]}$, dotée d'une involution $\sigma$ de première espèce dont l'espace des points fixes est de dimension $\frac{1}{2}d(d+1)$ sur $K$, et $E = M_m(D)$ l'algèbre des matrices, avec $m \geq 2$. Supposons $md$ pair et posons $T = \{x - {}^t x^\sigma \mid x \in E\}$ et $Q = E/T$. Les éléments de $Q$ sont appelés formes quadratiques (cf. [41]) : si $D = K$, on reconnaît la notion usuelle de forme quadratique, et si car $K \neq 2$, on voit immédiatement qu'une forme quadratique est la même chose qu'une forme antihermitienne (relative à $\sigma$). A toute forme quadratique non dégénérée $q$ (cf. [41] pour la définition) est associé un groupe algébrique $\underline{\mathrm{Spin}}\, q$ qui est une forme de $D_n$ avec $n = \frac{1}{2}md$, et toute forme de $D_n$ s'obtient de cette façon.

Supposons $n \geq 3$ et $q$ non dégénérée et isotrope, c'est-à-dire d'indice de Witt strictement positif (cf. [41]), et soit $\underline{G} = \underline{\mathrm{Spin}}\, q$ . Alors, si $d = 1$ ou $2$ , on a $W(\underline{G}, K) = \{1\}$ . Pour le cas $d = 1$ , cf. [14] et [12], II.8 et II.10 (comme en 1.1.5, il faut d'abord montrer que $G^+$ contient $\mathrm{Ker}\,(G \to SO)$ ). Pour $d = 2$ (et d'ailleurs aussi pour $d = 1$ ), le résultat peut se démontrer par induction sur la dimension, induction qui démarre grâce à l'isomorphisme entre $A_3$ et $D_3$ (l'idée de cette démonstration est due à M. Kneser).

1.1.7. Groupes exceptionnels. Soit $\underline{G}$ une forme isotrope d'un groupe exceptionnel ("$D_4$ tordu" non compris). Alors, $W(\underline{G}, K) = \{1\}$ sauf peut-être pour les groupes suivants, non encore étudiés :

formes de $E_6$ ou $E_7$ de rang relatif $1$ ;

formes de $E_8$ de rang relatif $\leq 2$ .

La démonstration de ce résultat n'est pas publiée. Quelques indications seront données au § 4.

## 1.2. Trivialité de $W(\underline{G}, K)$ pour certains corps $K$

Soit $K$ un corps localement compact non discret ou un corps global (corps de nombres ou corps de fonctions), et soit $\underline{G}$ un groupe quasi-simple, simplement connexe, isotrope sur $K$ . Si $K$ est un corps de nombres non totalement imaginaire, supposons, en outre, que $\underline{G}$ n'est pas une forme de rang relatif $1$ de $E_6$ . Alors $W(\underline{G}, K) = \{1\}$ .

Pour $K = \mathbf{R}$ , ce résultat est dû à E. Cartan ([6], n° 101 ; cf. aussi par ex. [4], corollaire 4.7).

Si $\underline{G}$ est une forme intérieure de $A_n$ , l'assertion se ramène, on l'a vu, à $SK_1(D) = \{1\}$ pour une algèbre à division $D$ . Sur les corps $\mathfrak{p}$-adiques (dans cet exposé, nous appelons ainsi tout corps local à corps résiduel fini), cette égalité est prouvée dans [23] et, à nouveau, dans [44]. Le cas des corps de nombre est traité dans [44]. Enfin, [46] donne une démonstration simple d'un résultat plus général, couvrant notamment le cas des corps locaux et globaux ; nous y reviendrons au § 2.

Si $\underline{G}$ est une forme extérieure de $A_n$ , seul le cas des corps globaux ne rentre pas dans les conditions de 1.1.4 (avec $D = L$ ) ; il est traité dans [33] et, pour les corps de nombres, dans [42].

Enfin, il résulte de théorèmes de classification divers (voir notamment [20], [15], [5], [40]) que sur les corps considérés ici, tout groupe isotrope absolument quasi-simple qui n'est pas une forme de $A_n$ ou une forme de rang 1 de $E_6$ sur un corps de nombre non totalement imaginaire appartient à l'un des types considérés au n°1.1, ou est de type ${}^3D_4^9$ ou ${}^6D_4^9$ (cf. [40]) sur un corps de nombres ; ce dernier cas demande une démonstration à part.

On remarquera que pour les formes existant sur les corps $\mathfrak{p}$-adiques, les corps de fonctions et les corps de nombres totalement imaginaires, les références et les esquisses de preuves données en 1.1 et au § 4 fournissent une démonstration complète du résultat. Le cas des corps $\mathfrak{p}$-adiques est déjà traité dans [24] (la démonstration de [24], partiellement corrigée dans [25], reste cependant incorrecte - elle emploie des groupes inexistants de type $\vdash\!\!\!-\!\!\!\oplus$ - et doit être légèrement modifiée). Une autre démonstration, utilisant la BN-paire affine, est donnée dans [16] (pour les corps $\mathfrak{p}$-adiques de caractéristique 0 seulement, mais Hijikata m'a signalé que la méthode s'étend à tout corps local dont le corps résiduel est de dimension cohomologique $\leq 1$ ). Pour les corps globaux, le résultat (avec, aussi, certaines exceptions pour les corps de nombres) est annoncé dans [26].

## 1.3. Non-trivialité et calcul de $SK_1(D)$ et de $W(\underline{G}, K)$ pour certaines algèbres à division $D$ et certains groupes $\underline{G}$

1.3.1. Soient $k$ un corps, $\ell_i$ $(i = 1, 2)$ deux extensions cycliques de $k$ telles que $\ell = \ell_1 \otimes \ell_2$ soit un corps et $\sigma_i$ $(i = 1, 2)$ un générateur de $\mathrm{Gal}(\ell_i/k)$ ; posons $K = k((x_1))((x_2))$ et $L_i = \ell_i((x_1))((x_2))$ , où $x_1$ , $x_2$ sont des indéterminées. L'automorphisme $\sigma_i$ de $\ell_i$ se prolonge de façon évidente en un automorphisme de $L_i$ encore noté $\sigma_i$ . Soit $D_i$ l'algèbre cyclique $(x_i, L_i/K, \sigma_i)$ (la notation, plus ou moins traditionnelle, s'explique d'elle-même). Platonov [29] montre que $D = D_1 \otimes_K D_2$ est une algèbre à division et calcule $SK_1(D)$ :

$$(1) \qquad SK_1(D) \cong \mathrm{Coker}(\mathrm{Br}(\ell_1/k) \oplus \mathrm{Br}(\ell_2/k) \to \mathrm{Br}(\ell/k)) ,$$

où Br désigne le groupe de Brauer (pour plus de détails, voir le n° 3.11). Supposons par exemple que $[\ell_1:k] = [\ell_2:k] = q$ , un nombre premier. Si de plus $k$ est un corps $\mathfrak{p}$-adique, on voit que $SK_1(D) \cong \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ . Si $k$ est un corps global et si $d$ désigne le nombre de places $v$ de $\ell$ telles que $[\ell_v:k_v] = q^2$ , on trouve $SK_1(D) \cong (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^{d-1}$ ou $\{1\}$ selon que $d >$ ou $= 0$ . De (1), Platonov déduit ([29], théorème 6.7) que pour tout corps de type fini $K$ dont le degré de transcendance absolu est au moins égal à 2 si car $K = 0$ et à 3 si car $K \neq 0$ , il existe des algèbres à division $D$ de centre $K$ avec des $SK_1(D)$ d'ordre supé-

rieur à tout nombre fini arbitrairement donné. Des exemples de $SK_1(D)$ infinis sont donnés dans [30].

1.3.2. Dans [13], Draxl étudie à l'aide du formalisme de la cohomologie de Tate une situation un peu plus générale que celle envisagée par Platonov. Ici, $K$ est un corps local dont le corps résiduel $\bar{K}$ est lui-même un corps local de corps résiduel $k$. On considère une algèbre à division $D$ de centre $K$ et on suppose que $Z(\bar{\bar{D}})/k$ est séparable, que $Z(\bar{D})/\bar{K}$ est modérément ramifiée et que l'une des deux conditions suivantes est remplie : $\bar{\bar{D}}$ est commutatif ou bien $k$ est "raisonnable" (une condition technique incluant les corps localement compacts non discrets et les corps globaux). Deux suites exactes permettent alors, en principe, de calculer $SK_1(D)$ ; sous les hypothèses de 1.3.1, on retrouve (1) sous la forme $SK_1(D) \cong \hat{H}^{-1}(Gal(\ell/k), \ell)$ .

1.3.3. Bien que Platonov insiste surtout sur le contre-exemple décrit plus haut, certaines propositions auxiliaires concernant un corps $K$ local quelconque paraissent au moins aussi intéressantes. Ainsi, le résultat suivant, que nous démontrerons au § 3 (n° 3.10), est implicite dans [29]; il est explicité par Yančevskii [47] dans le cas un peu plus général d'un corps $K$ hensélien. Soit $D$ une algèbre à division de centre $K$ telle que $L = Z(\bar{D})$ soit séparable sur $\bar{K}$. L'extension $L/\bar{K}$ est alors cyclique. Soient $\sigma$ un générateur de $Gal(L/\bar{K})$, $N = Nrd_{\bar{D}/L}(\bar{D}^{\times})$ l'image de la norme réduite, $N_1$ le groupe $N \cap N^{-1}_{L/\bar{K}}(1)$ des éléments de norme 1 dans $N$ et $M$ l'image de $N$ par l'homomorphisme $x \mapsto \sigma(x).x^{-1}$. On a alors une suite exacte

$$SK_1(\bar{D}) \to SK_1(D) \to N_1/M \to \{1\} .$$

Sous les hypothèses de 1.3.1, on a $SK_1(\bar{D}) = \{1\}$ (cf. 3.3) et cette suite exacte donne (1) (cf. 3.11).

1.3.4. Tout cela concerne $SK_1(D)$, c'est-à-dire les formes intérieures de $A_n$. Des exemples de non-trivialité de $W(\underline{G}, k)$ pour des formes extérieures de $A_n$ sont données dans [35].

## 1.4. Applications

1.4.1. Approximation faible. Les résultats relatés en 1.3.1 permettent de donner assez aisément une réponse négative au problème général de l'approximation faible pour les groupes simplement connexes [19] : dans [31], Platonov construit une algè-

bre à division $D$ de centre $K = k((x))((y))(z)$ , où $k$ est un corps global et $x$ , $y$ , $z$ sont des indéterminées, telle que l'ordre du groupe $SL_1(D \otimes K_v)/\overline{SL_1(D)}$ (la barre désigne cette fois l'adhérence) ne soit pas borné lorsque $v$ parcourt l'ensemble des valuations de $K$ associées aux polynômes irréductibles dans $k[z]$ .

1.4.2. Non-rationalité de certaines variétés de groupe. La relation $SK_1(D) \neq \{1\}$ , dont on a vu des exemples en 1.3.1, implique la non-rationalité de la variété sous-jacente à $\underline{SL}_1(D)$ . Cela résulte du théorème suivant, démontré dans [32] (voir aussi [48]) :

si $\underline{SL}_1(D)$ est une variété rationnelle (sur $K$ ), les éléments de $SL_1(D)$ sont produits d'un nombre fini borné de commutateurs.

La suite de l'exposé sera consacrée à la démonstration de quelques uns des résultats énoncés plus haut.

## 2. Trivialité de $SK_1(D)$ sur les corps $\mathfrak{p}$-adiques et les corps globaux

Ce résultat, dû à Nakayama et Matsushima [23] pour les corps $\mathfrak{p}$-adiques, et à S. Wang [44] pour les corps de nombres, sera établi ici sous des hypothèses plus générales par la méthode de Yančevskii [46]. Les lemmes et propositions auxiliaires sont, à des détails d'exposition près, tirés de [44].

2.1. Dans toute la suite de l'exposé, $D$ désigne une algèbre à division de degré $n$ sur son centre $K$ . Le groupe des commutateurs d'un groupe $X$ est noté $X'$ . Pour toute extension $K_1$ de $K$ , on pose $D_{K_1} = D \otimes_K K_1$ .

2.2. LEMME.- (i) $SK_1(D)$ est annulé par $n$ .

(ii) Si $F$ est une extension algébrique finie de $K$ , le noyau de l'homomorphisme canonique $\alpha : SK_1(D) \to SK_1(D_F)$ est annulé par $(n, [F:K])$ .

Soit $F$ comme dans (ii) et $a \in SL_1(D)$ . Faisant opérer $D_F$ sur lui-même, identifié à $D^{[F:K]}$ , par la représentation régulière, on représente ses éléments par des matrices de degré $[F:K]$ sur $D$ . On a alors, par un calcul habituel,

$$a \otimes 1 = \mathrm{diag}\,(a,a,\ldots,a) \underset{\text{mult}}{\equiv} (1,1,\ldots,a^{[F:K]}) \pmod{GL_{[F:K]}(D)'} .$$

Si $a \otimes 1 \in D_F^{\times\prime}$ , il résulte alors de la théorie des déterminants de Dieudonné [9] que $a^{[F:K]} \in D^{\times\prime}$ , ce qui montre que le noyau de $\alpha$ est annulé par $[F:K]$ . Appliquant ce résultat à un sous-corps commutatif maximal $F$ de $D$ , on en déduit (i),

et (ii) s'ensuit aussitôt.

2.3. LEMME.- Soit $D = D_1 \otimes D_2 \otimes \ldots \otimes D_s$ , où les $[D_i:K]$ sont premiers entre eux deux à deux. Pour $1 \leq i \leq s$ , soient $F_i$ un sous-corps commutatif maximal de $D_i$ et $F_i^*$ le produit tensoriel des $F_j$ avec $j \neq i$ . Enfin, soit $a \in SL_1(D)$ et, pour $1 \leq i \leq s$ , soit $m_i$ l'ordre de l'image de $a \otimes 1 \in SL_1(D_{F_i^*})$ dans $SK_1(D_{F_i^*}) = SK_1(D_i)$ . Alors, l'image de $a$ dans $SK_1(D)$ est annulée par $\prod_{i=1}^{s} m_i$ . En particulier, l'exposant de $SK_1(D)$ divise le produit des exposants des $SK_1(D_i)$ .

Posons $n_i = [D_i:K]$ . Vu le lemme précédent, le noyau de $SK_1(D) \to SK_1(D_{F_i^*})$ est annulé par $\prod_{j \neq i} n_j$ . Donc, l'image de $a$ dans $SK_1(D)$ est annulée par $m_i \cdot \prod_{j \neq i} n_j$ . En vertu de 2.2 (i), $m_i$ divise $n_i$ . Par conséquent, le p.g.c.d. des $m_i \cdot \prod_{j \neq i} n_j$ est le produit des $m_i$ , d'où l'assertion.

2.4. LEMME.- Supposons que $n$ soit puissance d'un nombre premier $p$ . Soit $F$ un sous-corps commutatif maximal de $D$ .

(i) Si $F \cap SL_1(D) \neq \{1\}$ , l'extension $F/K$ n'est pas radicielle.

(ii) Si $F/K$ n'est pas radicielle, il existe une extension algébrique finie $H$ de $K$ de degré premier à $p$ et telle que $F \otimes_K H$ possède un sous-corps extension cyclique de degré $p$ de $H$ .

(iii) Si $H$ est une extension algébrique finie de $K$ de degré premier à $p$ et si $a \in SL_1(D)$ , les ordres des images de $a$ et $a \otimes 1$ dans $SK_1(D)$ et $SK_1(D \otimes H)$ sont égaux.

Si $a \in F \cap SL_1(D)$ , on a $N_{F/K}(a) = \mathrm{Nrd}\, a = 1$ , d'où (i).

(iii) est une conséquence immédiate du lemme 2.2.

Soient $K_1$ la clôture séparable de $K$ dans $F$ , $K_2$ une extension galoisienne finie de $K$ contenant $K_1$ et $H$ le corps des points fixes dans $K_2$ d'un $p$-sous-groupe de Sylow de $\mathrm{Gal}(K_2/K)$ . Le corps $H$ satisfait aux exigences de (ii). En effet, il est clair que $[H:K]$ est premier à $p$ , et la seconde propriété résulte de ce que, dans un $p$-groupe (ici $\mathrm{Gal}(K_2/H)$ ), tout sous-groupe propre (ici $\mathrm{Gal}(K_2/(K_1.H))$ ) est contenu dans un sous-groupe distingué d'indice $p$ .

2.5. LEMME.- Soient $L$ un sous-corps commutatif de $D$, extension cyclique de $K$, $\sigma$ un générateur de $Gal(L/K)$, et $x$, $y$ des éléments de $L$ satisfaisant à la relation $x = \sigma(y).y^{-1}$. Alors, il existe un élément $d$ de $D^{\times}$ tel que $x = dyd^{-1}y^{-1}$. Si $a$, $b$ sont des éléments du centralisateur $D_1$ de $L$ dans $D$ de normes réduites (dans $D_1$) $x$ et $y$, alors $a^{-1}.dbd^{-1}b^{-1} \in SL_1(D_1)$. En particulier, si $SK_1(D_1) = \{1\}$, on a $a \in (D^{\times})'$.

En vertu du théorème de Skolem-Noether, il existe $d \in D^{\times}$ normalisant $L$ (donc aussi $D_1$) et tel que int $d$ induise $\sigma$ sur $L$, d'où la première assertion. Les autres s'ensuivent immédiatement.

2.6. PROPOSITION (S. Wang [44]).- Si $L$ est un sous-corps commutatif de $D$ extension cyclique de $K$, tout élément de $N^{-1}_{L/K}(1)$ est un commutateur dans $D$.

Cela résulte immédiatement du lemme précédent et du théorème 90 de Hilbert.

2.7. PROPOSITION (S. Wang [44]).- Si $n$ est sans facteur carré, on a $SK_1(D) = \{1\}$.

On sait ([8], p. 59) que $D$ est un produit tensoriel d'algèbres à division de degré premier. Vu 2.3, on peut donc supposer que $n$ est premier. Il faut montrer que si $a \in SL_1(D)$, l'image de $a$ dans $SK_1(D)$ est triviale. Vu 2.4, on peut supposer $a$ contenu dans un sous-corps commutatif maximal de $D$ cyclique sur $K$, et l'assertion résulte alors de 2.6.

2.8. THÉORÈME (Yančevskii [46] ; cf. aussi Nakayama-Matsushima [23] et S. Wang [44] pour des cas particuliers).- Supposons que $K$ soit un corps $C_2$ (cf. e.g. [37], II.18) ou un corps de nombres. Alors, $SK_1(D) = \{1\}$.

(N.B. - Dans [46], la condition imposée à $K$ est plus générale que $C_2$ ; on verra dans la démonstration la partie de la propriété $C_2$ vraiment utilisée.)

Vu [8], p. 59 et 2.3, on peut supposer que $n$ est puissance d'un nombre premier $p$. La démonstration se fera par induction sur l'exposant, le théorème étant vrai pour $n = p$ en vertu de 2.7. Soit $a \in SL_1(D)$. Il faut montrer que l'image de $a$ dans $SK_1(D)$ est triviale. Vu 2.4, on peut supposer que $a$ est contenu dans un sous-corps commutatif maximal $F$ de $D$ contenant une extension cyclique $L$ de degré $p$ de $K$. Soit $D_1$ le centralisateur de $L$ dans $D$ et posons $x = Nrd_{D_1/L}(a) = N_{F/L}(a)$. On a $N_{L/K}(x) = N_{F/K}(a) = 1$, donc il existe $y \in L^{\times}$ tel que $x = \sigma(y)y^{-1}$, où $\sigma$ désigne un générateur de $Gal(L/K)$. Pour achever la

démonstration, il suffit, vu 2.5 et l'hypothèse d'induction, de montrer qu'il existe $b \in D_1$ tel que $\mathrm{Nrd}_{D_1/L}(b) = y$. Si $K$ (donc aussi $L$) est $C_2$, la norme réduite $\mathrm{Nrd}_{D_1/L} : D_1 \to L$ est surjective, d'où l'assertion. Supposons donc que $K$ soit un corps de nombres. Soit $P$ l'ensemble des places infinies réelles $v : L \to \mathbf{R}$ où $D_1$ est ramifiée (si $p \neq 2$, $P$ est vide). Comme $x \in \mathrm{Nrd}(D_1)$, on a $v(x) > 0$ pour tout $v \in P$. On en déduit aussitôt que le signe de $v(y)$ ne dépend que de la classe de conjugaison de $v$ au-dessus de $K$, c'est-à-dire de $v|_K$. Par approximation, il existe donc $z \in K$ tel que $v(z)$ ait même signe que $v(y)$ pour toute place $v \in P$. Quitte à remplacer $y$ par $yz$, nous pouvons supposer que $v(y)$ est positif pour tout $v \in P$. Mais alors, il résulte de la proposition 3 de [45], chap. IX, § 3, que $y$ appartient à $\mathrm{Nrd}_{D_1/L}(D_1^\times)$, c.q.f.d.

## 3. Corps locaux. Exemples d'algèbres à division $D$ avec $SK_1(D) \neq \{1\}$

3.1. Dans ce paragraphe, $K$ désigne un corps local (i.e. muni d'une valuation discrète et complet - la plupart du temps, il suffirait d'ailleurs de le supposer hensélien [47] -) et $D$ une algèbre à division de centre $K$ et de degré $n$. Les anneaux d'entiers de $D$, $K$,... sont notés $\underline{O}_D$, $\underline{O}_K$,... et les idéaux premiers $\underline{P}_D$, $\underline{P}_K$,... ; la réduction est représentée par une barre. Le centre $Z(\bar{D})$ de $\bar{D}$ est supposé séparable sur $\bar{K}$. Il s'ensuit ([22]) que $D$ possède un sous-corps commutatif maximal non ramifié sur $K$, d'où l'on déduit que

$$(1) \qquad \sqrt{[D:K]} = \sqrt{[\bar{D}:Z(\bar{D})]} \,.\, [Z(\bar{D}):\bar{K}] \,.$$

On note $\pi$ une uniformisante de $D$ et $\alpha$ l'automorphisme de $\bar{D}$ induit par $\mathrm{int}\,\pi$. L'extension $Z(\bar{D})/\bar{K}$ est cyclique et son groupe de Galois est engendré par $\alpha|_{Z(\bar{D})}$ (cf. [22]).

3.2. LEMME.- <u>Soit</u> $a \in \underline{O}_D$ <u>tel que</u> $\bar{a}$ <u>soit contenu dans un sous-corps commutatif maximal séparable de</u> $\bar{D}$. <u>Alors, il existe un commutateur</u> $c$ <u>dans</u> $D$ <u>tel que</u> $\bar{c} = 1$ <u>et que</u> $ca$ <u>soit contenu dans un sous-corps commutatif maximal non ramifié de</u> $D$.

Soit $b \in \underline{O}_D$ tel que $\bar{K}(\bar{b})$ soit un sous-corps commutatif maximal séparable de $\bar{D}$ contenant $\bar{a}$ et soit $a' \in \underline{O}_{K(b)}$ tel que $\bar{a}' = \bar{a}$. Posons $b' = aa'^{-1}b$. On a $\bar{b}' = \bar{b}$, d'où $\bar{K}(\bar{b}') = \bar{K}(\bar{b})$. Vu (1), $K(b)$ et $K(b')$ sont des sous-corps commutatifs maximaux non ramifiés de $D$. Ayant même corps résiduel, ils sont isomorphes. L'isomorphisme $K(b') \to K(b)$ ayant pour réduction l'identité de $\bar{K}(\bar{b})$

est induit par un automorphisme intérieur int d de D et, posant $c = db'd^{-1}b'^{-1}$ , on a $\bar{c} = \overline{db'd^{-1}}.\bar{b}'^{-1} = 1$ et $ca = db'd^{-1}.b^{-1}a' \in K(b)$ , ce qui démontre le lemme.

3.3. PROPOSITION (Nakayama-Matsushima [23], Platonov-Yančevskii [34]).- Si $\bar{D}$ est commutatif, tout élément de $SL_1(D)$ est produit de deux commutateurs. En particulier, $SK_1(D) = \{1\}$ .

Soit $a \in SL_1(D)$ et soit $c$ un commutateur dans $D$ tel que $ca$ soit contenu dans un sous-corps commutatif maximal non ramifié $F$ de $D$ (cf. 3.2). D'après la propriété rappelée à la fin de 3.1, $\bar{D} = \bar{F}$ est une extension cyclique de $\bar{K}$ , donc $F$ est une extension cyclique de $K$ et $ca$ est un commutateur en vertu de 2.6. La proposition est ainsi démontrée.

3.4. PROPOSITION (Platonov [29]).- On a $(1 + \underline{P}_D) \cap SL_1(D) \subset D^{\times\prime}$ .

Soit $a \in (1 + \underline{P}_D) \cap SL_1(D)$ . Il faut montrer que $a \in D^{\times\prime}$ . Utilisant 2.3, on se ramène aussitôt au cas où $n$ est puissance d'un nombre premier $p$ . La démonstration se fera par induction sur l'exposant, l'assertion étant vraie pour $n = p$ en vertu de 2.7. Vu 3.2, on peut supposer que $a$ est contenu dans un sous-corps commutatif maximal non ramifié $F$ de $D$ puis, vu 2.4, que $F$ contient une extension cyclique $L$ de degré $p$ de $K$ . Posons $x = N_{F/L}(a)$ . On a $N_{L/K}(x) = N_{F/K}(a) = 1$ , donc il existe $y \in L$ tel que $x = \sigma(y)y^{-1}$ , où $\sigma$ désigne un générateur de $Gal(L/K)$ . De plus, on montre aisément que comme $\bar{x} = 1$ , $y$ peut être choisi dans $1 + \underline{P}_L$ . Le corps $F$ étant non ramifié, il existe alors $b \in 1 + \underline{P}_F$ tel que $y = N_{F/L}(b)$ (cf. [36], p. 90). L'assertion résulte à présent immédiatement de 2.5 et de l'hypothèse d'induction.

3.5. COROLLAIRE.- $SK_1(D) = \overline{SL_1(D)} / \overline{D^{\times\prime}}$ .

Le but des propositions 3.6 et 3.8 est de déterminer les groupes $\overline{SL_1(D)}$ et $\overline{D^{\times\prime}}$ .

3.6. PROPOSITION ([29]).- Pour qu'un élément $\bar{a}$ de $\bar{D}$ appartienne à $\overline{SL_1(D)}$ , il faut et il suffit que

(2) $$N_{Z(\bar{D})/\bar{K}}\,(Nrd_{\bar{D}/Z(\bar{D})}(\bar{a})) = 1 .$$

Il faut montrer que, pour $a \in \underline{O}_D$ , la relation (2) est équivalente à $a \in SL_1(D) . (1 + \underline{P}_D)$ . Vu 3.2, on peut supposer $a$ contenu dans un sous-corps com-

mutatif maximal non ramifié $F$ de $D$, auquel cas (2) s'écrit $N_{\bar{F}/\bar{K}}(\bar{a}) = 1$ et l'assertion découle des relations connues $\overline{N_{F/K}(a)} = N_{\bar{F}/\bar{K}}(\bar{a})$ et $N_{F/K}(1 + \underline{P}_F) = 1 + \underline{P}_K$ ([36], p. 90).

3.7. LEMME.- Soient $X$ une partie de $\underline{O}_D^\times$ et $Y$ le plus petit sous-groupe distingué de $D^\times$ contenant $X$. Alors, $\bar{Y}$ est le plus petit sous-groupe distingué de $\bar{D}^\times$ contenant $\bar{X}$ et stable par l'automorphisme $\alpha$ de $\bar{D}$ défini en 3.1.

On a $D^\times = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \pi^i \underline{O}_D^\times$, donc $Y$ est engendré par les $\pi^i d x d^{-1} \pi^{-i}$ ($i \in \mathbb{Z}$, $d \in \underline{O}_D^\times$), et $\bar{Y}$ est engendré par les $\alpha^i(\bar{d}\bar{x}\bar{d}^{-1})$, q. e. d.

3.8. PROPOSITION.- Le groupe $\overline{D^{\times\prime}}$ est engendré par $\bar{D}^{\times\prime}$ et les $\alpha(x)x^{-1}$, avec $x \in \bar{D}^\times$.

Soit $C$ le plus petit sous-groupe distingué de $D^\times$ contenant $\underline{O}_D^{\times\prime}$ et les commutateurs $\pi y \pi^{-1} y^{-1}$ avec $y \in \underline{O}_D^\times$. On a évidemment $C \subset D^{\times\prime}$. Mais l'inclusion inverse est aussi vraie car les éléments de $\underline{O}_D^\times \cup \{\pi\}$, qui engendrent $D^\times$, commutent entre eux modulo $C$. Donc $C = D^{\times\prime}$, et la proposition s'ensuit, vu 3.7.

3.9. COROLLAIRE.- Si $D$ est non ramifiée, l'homomorphisme de réduction $\underline{O}_D^\times \to \bar{D}^\times$ induit un isomorphisme $SK_1(D) \to SK_1(\bar{D})$.

Cela résulte de 3.5, 3.6, 3.8 et du fait que si $D$ est non ramifiée, on peut choisir $\pi$ dans $K$, auquel cas $\alpha$ est l'identité.

3.10. COROLLAIRE (Yančevskii [47]). Posons $N = \mathrm{Nrd}_{\bar{D}/Z(\bar{D})}(\bar{D}^\times)$, $N_1 = \{x \in N \mid N_{Z(\bar{D})/\bar{K}}(x) = 1\}$ et $M = \{\alpha(x)x^{-1} \mid x \in N\}$. On a alors une suite exacte

$$SK_1(\bar{D}) \to SK_1(D) \to N_1/M \to \{1\}.$$

Posons $A = \overline{SL_1(D)}$ et $B = \overline{D^{\times\prime}}$. En vertu de 3.6 et 3.8, les images de $A$ et $B$ par la norme réduite $\mathrm{Nrd}_{\bar{D}/Z(\bar{D})}$ sont respectivement $N_1$ et $M$. Le noyau de la norme réduite étant $SL_1(\bar{D})$, on a donc une suite exacte

$$SL_1(\bar{D}) / (SL_1(\bar{D}) \cap B) \to A/B \to N_1/M \to \{1\}.$$

L'assertion résulte à présent de ce que le premier groupe de cette suite est un quotient de $SK_1(\bar{D})$, vu 3.8, et que le second est isomorphe à $SK_1(D)$ en vertu de 3.5.

3.11. Un exemple. Soient $k$ , $\ell_i$ , $\ell$ , $K$ et $D$ comme en 1.3.1. L'algèbre $\bar{D}$ est l'algèbre cyclique $(x_1 , \ell((x_1)) / \ell_2((x_1)) , \sigma_1)$ , qui est totalement ramifiée sur son centre $\ell_2((x_1))$ . Vu 3.3, on a donc $SK_1(\bar{D}) = \{1\}$ , d'où un isomorphisme $SK_1(D) = N_1/M$ , où $N_1$ et $M$ sont définis comme dans le corollaire précédent. On en déduit, par un calcul facile, un isomorphisme.

$$SK_1(D) \cong N^{-1}_{\ell_2/k}(1) / \{\sigma_2(x)x^{-1} \mid x \in N_{\ell/\ell_2}(\ell^\times)\} .$$

Enfin, Serre a remarqué que ce dernier groupe n'est autre que $\mathrm{Coker}(\mathrm{Br}(\ell_1/k) \oplus \mathrm{Br}(\ell_2/k) \to \mathrm{Br}(\ell/k))$ (cf. [29], 4.17), ce qui donne la relation (1) de 1.3.1.

## 4. Une méthode de démonstration par induction de la trivialité de $W(\underline{G}, K)$ pour certains groupes $\underline{G}$

4.1. Soient $\underline{G}$ un groupe algébrique simplement connexe, quasi-simple sur un corps $K$ , $\underline{S}$ un $K$-tore déployé maximal de $\underline{G}$ , $Z(\underline{S})$ le centralisateur de $\underline{S}$ et $\underline{H}$ le quotient $Z(\underline{S})/\underline{S}$ , qui est un groupe réductif anisotrope. On définit $G^+$ comme dans l'introduction de l'exposé. On sait ([39], § 3 (18)) que $\underline{G}(K) = G^+.Z(\underline{S})(K)$ ; par conséquent

$$(1) \qquad W(\underline{G}, K) = Z(\underline{S})(K) / (Z(\underline{S})(K) \cap G^+) .$$

D'autre part, $\underline{S}$ est contenu dans un sous-groupe simplement connexe déployé de $\underline{G}$ ([4], 4.6) ; d'après 1.1.2, il s'ensuit que $\underline{S}(K) \subset G^+$ . De plus, $\underline{S}$ étant déployé, l'homomorphisme canonique $Z(\underline{S})(K) \to \underline{H}(K)$ est surjectif. Si l'on appelle $H^*$ l'image de $Z(\underline{S})(K) \cap G^+$ par cet homomorphisme, on a donc

$$W(\underline{G}, K) = \underline{H}(K)/H^* .$$

Remarque.- Soit $\underline{S}_0$ le centre connexe de $Z(\underline{S})$ . On peut montrer que le tore $\underline{S}_0$ est cohomologiquement trivial (parce que produit de tores induits) et que $\underline{S}_0(K) \subset G^+$ . Notant $\underline{H}_0$ le groupe semi-simple anisotrope $Z(\underline{S})/\underline{S}_0$ et $H_0^*$ l'image de $Z(\underline{S})(K) \cap G^+$ dans $\underline{H}_0(K)$ , on a donc aussi $W(\underline{G}, K) = \underline{H}_0(K)/H_0^*$ .

4.2. Pour tout sous-groupe quasi-simple $\underline{X}$ de $\underline{G}$ normalisé par $\underline{S}$ , $\underline{S}_{\underline{X}} = (\underline{S} \cap \underline{X})^\circ$ est un $K$-tore déployé maximal de $\underline{X}$ . Notons $H(\underline{X})$ le quotient $Z_{\underline{X}}(\underline{S}_{\underline{X}}) / \underline{S}_{\underline{X}}$ et $H(\underline{X})^*$ l'image de $Z_{\underline{X}}(\underline{S}_{\underline{X}})(K) \cap X^+$ (où $X^+$ est défini comme $G^+$ ) dans $H(\underline{X})(K)$ . Le groupe $Z_{\underline{X}}(\underline{S}_{\underline{X}})$ est contenu dans $Z(\underline{S})$ et l'inclusion induit un homomorphisme central (cf. [4], § 2) de noyau fini $\varphi_{\underline{X}} : H(\underline{X}) \to \underline{H}$ . Il est clair

que $\varphi_{\underline{X}}(H(\underline{X})^*) \subset H^*$ . Si l'on veut montrer que $W(\underline{G}, K) = \{1\}$ pour un groupe $\underline{G}$ donné, il suffit donc d'exhiber des sous-groupes quasi-simples $\underline{X}_i$ de $\underline{G}$ , normalisés par $\underline{S}$ , tels que $W(\underline{X}_i, K) = \{1\}$ pour tout $i$ et que les $\varphi_{\underline{X}_i}(H(\underline{X}_i)(K))$ engendrent $\underline{H}(K)$ .

4.3. Sommets négligeables du diagramme de Dynkin $\Delta$ de $\underline{G}$

Appelons ainsi tout sommet $s$ de $\Delta$ tel que $s$ lui-même ainsi que tous les sommets de $\Delta$ connectés à $s$ soient invariants par $Gal(K_s/K)$ et distingués (cf. 1.1.1). Soient $\Delta_1$ le sous-diagramme de $\Delta$ obtenu en supprimant les sommets négligeables (et les arêtes qui y aboutissent) et $\underline{G}_1$ le sous-groupe semi-simple de $\underline{G}$ " correspondant à $\Delta_1$ " (c'est-à-dire le groupe dérivé du centralisateur de l'intersection des noyaux des racines simples relatives ne correspondant pas à des sommets négligeables). Le groupe $\underline{G}_1$ est simplement connexe (c'est une propriété générale des groupes dérivés de centralisateurs de tores), quasi-simple sur $K$ (cela se vérifie par exemple à l'aide de la classification de [40]) et évidemment isotrope. On a $Z(\underline{S}) \subset \underline{S}.\underline{G}_1$ . Soient $\underline{T}$ un tore maximal de $\underline{G}$ contenant $\underline{S}$ et $\underline{T}_1$ son intersection avec $\underline{G}_1$ , qui est un tore maximal de $\underline{G}_1$ . Un calcul facile montre que les annulateurs de $\underline{S}$ et $\underline{T}_1$ dans le groupe des caractères $X^*(\underline{T})$ engendrent un facteur direct de ce groupe. Cela veut dire que l'intersection schématique de $\underline{S}$ et $\underline{G}_1$ est un tore $\underline{S}_1$ , c'est-à-dire que $Z(\underline{S})/\underline{S}_1$ est le produit direct de $Z_{\underline{G}_1}(\underline{S}_1)/\underline{S}_1$ et de $\underline{S}/\underline{S}_1$ . Par conséquent, l'homomorphisme canonique $\varphi_{\underline{G}_1} : H(\underline{G}_1) \to \underline{H}$ est un isomorphisme. En particulier :

PROPOSITION.- Si $W(\underline{G}_1, K) = \{1\}$ , on a aussi $W(\underline{G}, K) = \{1\}$ .

Remarque.- Utilisant la remarque du n° 4.1, on pourrait même retirer de $\Delta$ toutes les orbites distinguées qui ne sont connectées qu'à des orbites distinguées, mais le gain pratique ainsi réalisé est mince, comme le montre un coup d'oeil aux tables de [40].

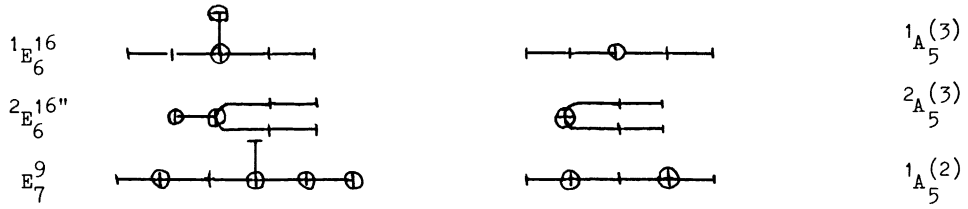
4.4. Exemples

Les notations utilisées ici sont celles de [40].

4.4.1. Types ${}^1E_6^{16}$ , ${}^2E_6^{16''}$ , $E_7^9$

Ce sont les seuls types de groupes exceptionnels isotropes non quasi-déployés existant sur des corps $\mathfrak{p}$-adiques, des corps de fonctions et des corps de nombres totalement imaginaires (la précision "isotrope" est superflue si le principe de

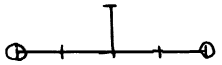
Hasse est vrai). Le tableau suivant met en regard les trois types en question et les types des groupes $\underline{G}_1$ (définis comme en 4.3) correspondants :



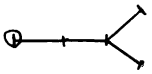

La proposition du n° 4.3 et les résultats des n°s 1.1.3 et 1.1.4 montrent donc que pour tout groupe simplement connexe $\underline{G}$ de l'un de ces types, on a $W(\underline{G}, K) = \{1\}$ .

4.4.2. Types ${}^1E_6^{28}$ , $E_7^{28}$ et $E_8^{28}$

Ici encore, on a $W(\underline{G}, K) = \{1\}$ pour tout groupe simplement connexe appartenant à l'un de ces types. La proposition du n° 4.3 permet de considérer uniquement le type

${}^1E_6^{28}$  .

Pour traiter celui-ci, on peut appliquer la méthode du n° 4.2 en considérant deux sous-groupes $X_1$ et $X_2$ de type



correspondant aux deux sous-diagrammes obtenus en retirant successivement les deux sommets distingués de $\Delta$ . La relation à établir apparaît alors comme une conséquence de l'assertion suivante, qui résulte elle-même immédiatement d'une des formulations classiques du principe de trialité :

> Soit q une forme quadratique anisotrope à 8 variables qui est la norme d'une algèbre d'octaves, et soient $\underline{H}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ les groupes algébriques images de Spin q par ses trois représentations irréductibles inéquivalentes de dimension 8 (groupe SO(q) et groupes "semi-spinoriels"). Alors, le groupe $PGO^+(q)$ est le produit des images dans celui-ci de deux quelconques des groupes $\underline{H}_i(K)$ .

Notons que pour un groupe simplement connexe $\underline{G}$ de type ${}^1E_6^{28}$ , la simplicité de $\underline{G}(K)$ modulo son centre est déjà prouvée dans [18] sous l'hypothèse car $K \neq 2,3$ .

4.4.3. Type $F_4^{21}$

Soient $\underline{G}$ un groupe de ce type et $\underline{T}$ un K-tore maximal de $\underline{G}$ contenant un tore

déployé maximal $\underline{S}$ . Alors, les sous-groupes radiciels correspondant aux racines longues (relatives à $\underline{T}$) engendrent un groupe isotrope de type $D_4$ qu'on vérifie sans peine être un groupe $\underline{\mathrm{Spin}}\, q$ pour une forme quadratique ordinaire $q$ d'indice de Witt $1$ . Vu 1.1.6, on en déduit que $\underline{T}(K) \subset G^+$ . En particulier, tout élément régulier de $Z(\underline{S})(K)$ est contenu dans $G^+$ . On en déduit aussitôt que $Z(\underline{S})(K) \subset G^+$, d'où $W(\underline{G}, K) = \{1\}$ . Pour une autre démonstration de ce résultat en caractéristique différente de $2$ et $3$ , cf. [17].

4.4.4. Type $E_8^{91}$

Soient $\underline{G}$ un groupe de ce type, $\underline{S}$ un tore déployé maximal et $\underline{F}$ le sous-groupe de $\underline{G}$ engendré par les $\underline{U}_{(a)}$ (notations de [2], 5.2) où $a$ parcourt l'ensemble des deux racines relatives non multipliables. Ce groupe contient $Z(\underline{S})$ donc, vu (1), $W(\underline{G}, K)$ est un quotient de $W(\underline{F}, K)$ . D'autre part, on détermine facilement la structure de $\underline{F}$ : c'est un groupe semi-spinoriel associé à une forme quadratique à $16$ variables d'indice de Witt $1$ . Vu 1.1.6 et la suite exacte de l'introduction, $W(\underline{F}, K)$ est un $2$-groupe et il en est donc de même de $W(\underline{G}, K)$ . (Il est évidemment très probable que $W(\underline{G}, K) = \{1\}$ .)

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. BASS - Algebraic K-theory, Math. Lecture Notes, Benjamin, 1968.

[2] A. BOREL et J. TITS - Groupes réductifs, Publ. Math. I.H.E.S., 27 (1965), 55-151.

[3] A. BOREL et J. TITS - Eléments unipotents et sous-groupes paraboliques de groupes réductifs, I, Inventiones Math., 12 (1971), 95-104.

[4] A. BOREL et J. TITS - Compléments à l'article : "groupes réductifs", Publ. Math. I.H.E.S., 41 (1972), 253-276.

[5] F. BRUHAT et J. TITS - Groupes algébriques simples sur un corps local : cohomologie galoisienne, décompositions d'Iwasawa et de Cartan, C. R. Acad. Sci. Paris, 263 (1966), 598-601.

[6] E. CARTAN - Sur certaines formes riemanniennes remarquables des géométries à groupe fondamental simple, Ann. Ec. Norm., 44 (1927), 345-467, Oeuvres, partie I, vol. II, 867-989.

[7] C. CHEVALLEY - Sur certains groupes simples, Tôhoku Math. J., 7 (1955), 14-66.

[8] M. DEURING - Algebren, Ergebnisse d. Math., n° 4, Springer, 1935.

[9] J. DIEUDONNÉ - Les déterminants sur un corps non commutatif, Bull. Soc. Math. France, 71 (1943), 27-45.

[10] J. DIEUDONNÉ - Sur les groupes classiques, Actu. Sci. et Ind., n° 1040, Hermann, Paris, 1948.

[11] J. DIEUDONNÉ - On the structure of unitary groups, Trans. Amer. Math. Soc., 72 (1952), 367-385.

[12] J. DIEUDONNÉ - La géométrie des groupes classiques, Ergebnisse d. Math., Bd 5, 3e éd., Springer Verlag, 1971.

[13] P. DRAXL - $SK_1$ von Algebren über vollständig diskret bewerteten Körpern und Galoiskohomologie abelscher Körpererweiterungen, J. reine angew.Math., 293/294 (1977), 116-142.

[14] M. EICHLER - Quadratische Formen und orthogonale Gruppen, Grundlehren d. Math. n° 63, Springer, 1952.

[15] G. HARDER - Bericht über neuere Resultate der Galoiskohomologie halbeinfacher Gruppen, Jahresberichte der Deutschen Math. Ver., 70 (1968), 182-216.

[16] H. HIJIKATA - On the structure of semi-simple algebraic groups over valuation fields I, Japanese J. Math., 1 (1975), 225- 300.

[17] N. JACOBSON - Some groups of transformations defined by Jordan algebras, II, Groups of type $F_4$, J. reine u. angew. Math., 204 (1960), 74-98.

[18] N. JACOBSON - Some groups of transformations defined by Jordan algebras, III, J. reine u. angew. Math., 207 (1961), 61-85.

[19] M. KNESER - Schwache Approximation in algebraischen Gruppen, Coll. Théorie gr. algébriques, C. B. R. M., Bruxelles, 1962, 41-52.

[20] M. KNESER - Galois-Kohomologie halbeinfacher algebraischer Gruppen über p-adischen Körpern, I, II, Math. Zeitschr., 88 (1965), 40-47 ; 89 (1965), 250-272.

[21] T. KODAMA - On the commutator group of a normal simple algebra, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., Ser A, 10 (1956), 141-149 ;

- Note on the commutator group of a normal simple algebra, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., Ser A, 14 (1960), 98-103.

[22] T. NAKAYAMA - Divisionsalgebren über diskret bewerteten Körpern, J. reine u. angew. Math., 178 (1938), 11-13.

[23] T. NAKAYAMA et Y. MATSUSHIMA - Über die multiplikative Gruppe einer p-adischen Divisionsalgebra, Proc. Imperial Academy (Tokyo), 19 (1943), 622-628.

[24] V. P. PLATONOV - Problema Sil'noĭ approksimacii. i gipoteza Knezera-Titsa dlya algebraičeskih grupp, Izv. Akad. Nauk S.S.S.R., Ser. Mat., 33 (1969), 1211-1219.

[25] V. P. PLATONOV - Dopolnenie k rabote : "problema Sil'noi approksimacii i gipoteza Knezera-Titsa dlya algebraiceskih grupp", Izv. Akad. Nauk S.S.S.R., Ser. Mat., 34 (1970), 775-777.

[26] V. P. PLATONOV - Arifmetičeskie i strukturnye problemy v lineĭnyh algebraičeskih grupp, Proc. Intern. Congr. Math. Vancouver, 1974 (1975), vol. 1, 471-476.

[27] V. P. PLATONOV - O probleme Tannaka-Artina, Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R., 221 (1975), 1038-1041.

[28] V. P. PLATONOV - Problema Tannaka-Artina i gruppy proektivnyh konorm, Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R., 222 (1975), 1299-1302.

[29] V. P. PLATONOV - Problema Tannaka-Artina i privedennaya K-teoriya, Izv. Akad. Nauk S.S.S.R., Ser. Mat., 40 (1976), 227-261.

- Zamečanie k moeĭ rabote : "Problema ...", Izv. Akad. Nauk S.S.S.R., 40 (1976), 1198.

[30] V .P. PLATONOV - O beskonečnosti privedennoĭ gruppy Uaĭtheda, Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R., 227 (1976), 299-302.

[31] V.P. PLATONOV - Privedennaya K-teoriya i approksimaciya v algebraičekih gruppah, Trudy mat. instit. Akad. Nauk S.S.S.R., 142 (1976), 198-207.

[32] V.P. PLATONOV - Biracional'nye svoĭstva privedennoĭ gruppy Uaĭtheda, Dokl. Akad Nauk B.S.S.R., 21 (1977), 197-198.

[33] V.P. PLATONOV et V.I. YANČEVSKIĬ - Struktura unitarnyh grupp i kommutant prostoĭ algebry nad globalnymi polyami, Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R., 208 (1973), 541-544.

[34] V.P. PLATONOV et V.I. YANČEVSKIĬ - O gipoteze Hardera, Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R., 221 (1975), 784-787.

[35] V.P. PLATONOV et V.I. YANČEVSKIĬ - O gipoteze Knezera-Titsa dlya unitarnyh grupp, Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R., 225 (1975), 48-51.

[36] J.-P. SERRE - Corps locaux, Actu. Sc. Ind., n° 1296, Hermann, 1962.

[37] J.-P. SERRE - Cohomologie galoisienne, Lecture Notes in Math., vol. 5, Springer, 1964.

[38] R. STEINBERG - Variations on a theme of Chevalley, Pacific J. Math., 9 (1975), 875-891.

[39] J. TITS - Algebraic and abstract simple groups, Annals of Math., 80 (1964), 313-329.

[40] J. TITS - Classification of algebraic semisimple groups, Proc. Symp. in Pure Math., vol. 9 (Algebraic groups and discontinuous subgroups), A.M.S., 1966, 33-62.

[41] J. TITS - Formes quadratiques, groupes orthogonaux et algèbres de Clifford, Inventiones Math. 5 (1968), 19-41.

[42] C.T.C. WALL - On the commutator subgroups of certain unitary groups, J. of Algebra, 27 (1973), 306-310.

[43] G.E. WALL - The structure of a unitary factor group, Publ. Math. I.H.E.S., 1 (1959).

[44] S. WANG - On the commutator group of a simple algebra, Amer. J. Math., 72 (1950), 323-334.

[45] A. WEIL - Basic number theory, Grundlehren der Math. Wiss., n° 144, Springer, 1967.

[46] V.I. YANČEVSKIĬ - Kommutanty prostyh algebr s sjur"ektivnoĭ privedennoĭ normoĭ, Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R., 221 (1975), 1056-1058.

[47] V.I. YANČEVSKIĬ - Tela nad genzelevymi diskretno normirovannymi polyami i problema Tannaka-Artina, Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R., 226 (1976), 281-283.

[48] V.E. VOSKRESENSKIĬ - O privedennoĭ gruppe Uaĭtheda prostoĭ algebry, Uspehi Mat. Nauk, 32(6) (198) (1977), 247-248.