

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

MICHEL DEMAZURE

Identités de MacDonald

Séminaire N. Bourbaki, 1977, exp. n° 483, p. 191-201

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1975-1976__18__191_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

IDENTITÉS DE MACDONALD

par Michel DEMAZURE

On désigne par $\eta(X)$ la série formelle

$$\eta(X) = X^{1/24} \prod_{m \geq 1} (1 - X^m),$$

de sorte que $\eta(e^{2\pi iz})$ est la fonction de Dedekind.

1. MACDONALD : Identités sur la fonction η (première forme) [5]

Soient G un groupe de Lie compact semi-simple simplement connexe, T un tore maximal de G ; posons $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, $\mathfrak{h} = \text{Lie}(T) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Chaque homomorphisme continu de T dans $\mathbb{C}^*$ s'écrit sous la forme

$$e^{\lambda} : \exp(x) \mapsto e^{\lambda(\exp(x))} = e^{\lambda(x)}, \quad x \in \text{Lie}(T), \text{ où } \lambda \in \mathfrak{h}^* \text{ est une forme}$$

linéaire complexe convenable sur $\mathfrak{h}$; en particulier, les racines de G relativement à T sont les e^{α} , où α parcourt le système de racines R de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{h}$; les homomorphismes continus de T dans $\mathbb{C}^*$ sont les e^{λ} , où λ parcourt le réseau $P \subset \mathfrak{h}^*$ des poids de R .

Choisissons un système de racines positives, et soit ρ la demi-somme des racines ≥ 0 ; pour chaque racine $\alpha \in R$, soit $H_{\alpha} \in \mathfrak{h}^*$ la racine inverse correspondante ; notons P_{++} l'ensemble des poids dominants, c'est-à-dire des éléments $\lambda \in P$ tels que $\langle \lambda, H_{\alpha} \rangle \geq 0$ pour tout $\alpha \geq 0$. Pour tout $\lambda \in P_{++}$, notons $(V_{\lambda}, \tau_{\lambda})$ une représentation irréductible de G de plus grand poids e^{λ} , de sorte que (H. Weyl)

$$(1) \quad \dim V_{\lambda} = \prod_{\alpha > 0} \frac{\langle \lambda + \rho, H_{\alpha} \rangle}{\langle \rho, H_{\alpha} \rangle}$$

$$(2) \quad x_{\lambda} = (\text{Tr } \tau_{\lambda})|_T = \frac{\sum_{w \in W} \det(w) e^{w(\lambda + \rho)}}{\sum_{w \in W} \det(w) e^{w(\rho)}},$$

483-02

où W est le groupe de Weyl de R . Pour tout $\lambda \in P$, on notera encore $\dim V_\lambda$ et x_λ les seconds membres de (1) et (2).

Enfin, soit Φ la forme de Killing $u \mapsto \text{Tr}(\text{ad}_\mathfrak{g}(u))^2$ sur $\mathfrak{g}$ et soit $\|\cdot\|^2$ la forme inverse sur $\mathfrak{g}^*$. Avec ces notations, on a ([5], 8.9) :

$$(3) \quad \eta(x)^{\dim G} = \sum_{\lambda \in M^\vee} \dim V_\lambda \cdot x^{\|\lambda + \rho\|^2},$$

où $M^\vee$ est le sous-réseau de P engendré par les $\sum_{\alpha > 0} \langle \alpha, H_\beta \rangle \alpha$, $\beta \in R$ [c'est l'image du réseau des coracines $\sum \mathbb{Z} H_\alpha \subset \mathfrak{g}$ par l'application

$H \mapsto \sum_{\alpha > 0} \langle \alpha, H \rangle \alpha$]. Notons au passage que (3) contient la "formule étrange" de Freudenthal

$$(4) \quad \|\rho\|^2 = \dim G/24,$$

et compte tenu de (4) s'écrit aussi

$$(5) \quad \prod_{m \geq 1} (1 - x^m)^{\dim G} = \sum_{\lambda \in M^\vee} \dim V_\lambda \cdot x^{\|\lambda + \rho\|^2 - \|\rho\|^2}.$$

Naturellement, les formules (3) sont multiplicatives par rapport à G , et on peut donc supposer G "presque simple" (i.e. R irréductible) ce que nous ferons désormais. Donnons trois exemples :

a) $G = \text{SU}(2, \mathbb{C})$; alors P s'identifie à $\mathbb{Z}$, P_{++} à $\mathbb{N}$, avec les racines $\alpha = 2$, $\alpha = -2$; on a $M^\vee = 4\mathbb{Z}$ et pour $n \in P$, $\dim V_n = n + 1$, $\|n + \rho\|^2 = \|n + 1\|^2 = \frac{1}{8}(n + 1)^2$, d'où

$$(6) \quad \eta(x)^3 = \sum_{n \equiv 1(4)} n x^{n^2/8}$$

formule due à Jacobi (plus connue sous la forme équivalente

$$(7) \quad \prod_{m \geq 1} (1 - x^m)^3 = \sum_{n \geq 0} (-1)^n (2n + 1) x^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

b) $G = \text{SU}(5, \mathbb{C})$; alors $\eta(x)^{\dim G} = \eta(x)^{24}$ est la fonction $\Delta(x) = \sum_{n \geq 1} \tau(n) x^n$, d'où après calcul l'expression suivante de la fonction de Ramanujan, due à DYSON :

$$(8) \quad \tau(n) = \frac{1}{1! 2! 3! 4!} \sum \prod_{i < j} (u_i - u_j),$$

sommation étendue aux familles $(u_1, \dots, u_5)$ d'entiers tels que $u_i \equiv i \pmod{5}$,

$$\sum u_i = 0, \quad \sum u_i^2 = 10n.$$

c) $G = E_8$; alors on trouve une expression pour $\eta(X)^{248}$ qu'il n'est pas utile de reproduire ici (voir [5], p. 140).

Signalons avant de passer à la suite, une démonstration "directe" de l'identité (3) due à VAN ASCH [7].

Soit maintenant h le nombre de Coxeter de R et soit B l'ensemble des racines simples. Alors [5], 8.13

$$(9) \quad \prod_{\beta \in B} \eta(X^h \|\beta\|^2)^{h+1} = \sum_{\lambda \in M} \dim V_\lambda \cdot X^{\|\lambda + \rho\|^2},$$

où M est le sous-réseau de P engendré par les $h\alpha$, $\alpha \in R$.

Si toutes les racines de R ont la même longueur (Kostant dit alors que G est "simply-laced"), on a $\|\alpha\|^2 = \frac{1}{h}$ pour tout $\alpha \in R$, $M = M^\vee$ et $(h+1)\text{rg } G = \dim G$, de sorte que (9) coïncide avec (3). Le premier cas où il n'en n'est pas ainsi est $G = \text{Spin}(5)$, pour lequel (3) parle de $\eta(X)^{10}$ et (9) de $(\eta(X)\eta(X^2))^5$.

2. MACDONALD : Identités pour les caractères (première forme) [5]

En fait, (3) et (9) proviennent par spécialisation d'identités pour les caractères que voici.

Soit d'abord $p(X)$ le polynôme caractéristique de $\text{Ad}_g(t)$ pour $t \in T$:

$$p(X) = \det(1 - X \text{Ad}_g(t)) = (1 - X)^{\text{rg}(G)} \prod_{\alpha \in R} (1 - X e^\alpha);$$

alors ([5], 8.7)

$$(10) \quad \prod_{m \geq 1} p(X^m) = \sum_{\lambda \in M^\vee} x_\lambda \cdot X^{\|\lambda + \rho\|^2 - \|\rho\|^2},$$

identité qui implique (5), donc (3), ("faire $t = 1$ ").

De même en posant

$$q(X) = \prod_{\beta \in B} (1 - X^h \|\beta\|^2) \prod_{\alpha \in R} (1 - X^h \|\alpha\|^2 e^\alpha),$$

on a ([5], 8.11)

483-04

$$(11) \quad \prod_{m \geq 1} q(x^m) = \sum_{\lambda \in M} x_{\lambda} \cdot x^{\|\lambda + \rho\|^2 - \|\rho\|^2},$$

qui implique (9) par spécialisation (compte tenu de la deuxième formule étrange ([5], 8.12))

$$(12) \quad \|\rho\|^2 = \frac{h(h+1)}{24} \sum_{\beta \in B} \|\beta\|^2.$$

Donnons un exemple de (10). Pour $G = \mathrm{SU}(2, \mathbb{C})$, on a

$p(X) = (1 - X)(1 - ZX)(1 - Z^{-1}X)$, avec $Z = e^{\alpha}$, et $x_n = \frac{Z^{n+1} - Z^{-n}}{Z - 1}$; un petit calcul donne alors

$$(13) \quad \prod_{m \geq 1} (1 - X)^m (1 - ZX^m) (1 - Z^{-1}X^{m-1}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n Z^{-n} X^{n(n-1)/2},$$

une identité de Jacobi sur les fonctions-thêta.

Notons enfin la conséquence suivante de (10) (Macdonald, non publié)

$$(14) \quad \int_G \left(\prod_{m \geq 1} \det(1 - X^m \mathrm{Ad}(g)) \right) dg = 1.$$

3. KOSTANT : Deuxième forme des identités [4]

Soit $a^{\vee}$ (resp. a) le point de T tel que

$$e^{\alpha}(a^{\vee}) = e^{2\pi i \|\alpha\|^2} \quad (\text{resp. } e^{\alpha}(a) = e^{2\pi i/h})$$

pour $\alpha \in B$. Alors, pour tout $\lambda \in M^{\vee}$, on a ([4], 3.5.2 et 3.6)

soit $x_{\lambda}(a^{\vee}) = 0$ et alors $x_{\lambda} = 0$ (i.e. $\lambda + \rho$ est singulier)

soit $x_{\lambda}(a^{\vee}) = \pm 1$ et alors $\lambda + \rho \in w(P_{++} + \rho)$, pour un unique w , et

$$\text{on a } \det(w) = x_{\lambda}(a^{\vee}).$$

De même pour M et a [Notons en passant que a est principal au sens de Kostant, c'est-à-dire est un élément régulier g tel que $\mathrm{Ad}(g)$ soit d'ordre minimum (à savoir h)]. De cela, et des propriétés évidentes d'antisymétrie des applications $\lambda \mapsto \dim V_{\lambda - \rho}$ et $\lambda \mapsto x_{\lambda - \rho}$, on tire une nouvelle forme des identités précédentes :

$$(15) \quad \eta(x)^{\dim G} = \sum_{\lambda \in P_{++}} x_{\lambda}(a^{\vee}) \cdot \dim V_{\lambda} \cdot x^{\|\lambda + \rho\|^2},$$

$$(16) \quad \prod_{\beta \in B} \eta(x^{h\|\beta\|^2})^{h+1} = \sum_{\lambda \in P_{++}} x_{\lambda}(a) \cdot \dim V_{\lambda} \cdot x^{\|\lambda + \rho\|^2},$$

$$(17) \quad \prod_{m \geq 1} p(x^m) = \sum_{\lambda \in P_{++}} x_{\lambda}(a^{\vee}) \cdot x_{\lambda} \cdot x^{\|\lambda + \rho\|^2 - \|\rho\|^2},$$

$$(18) \quad \prod_{m \geq 1} q(x^m) = \sum_{\lambda \in P_{++}} x_{\lambda}(a) \cdot x_{\lambda} \cdot x^{\|\lambda + \rho\|^2 - \|\rho\|^2}.$$

Par exemple, pour $G = \mathrm{SU}(2, \mathbb{C})$, (15) donne directement l'identité de Jacobi (7).

4. MACDONALD : Systèmes de racines affines [5]

On ne donnera pas ici la définition précise d'un système de racines affines réduit ([5], n° 2). Disons simplement qu'il s'agit d'un ensemble S de formes linéaires affines sur un espace affine et qu'à chaque élément $\theta \in S$ est associé une réflexion r_{θ} laissant fixe $\mathrm{Ker} \theta$ et telle que $r_{\theta}(S) = S$; les r_{θ} engendrent le groupe de Weyl $W(S)$ de S . Donnons deux exemples.

a) Prenons G , T , etc., comme ci-dessus; considérons la fonction affine constante θ_0 de valeur $2\pi i$ sur $\mathfrak{h}$. Alors les $\alpha + n\theta_0$, $\alpha \in R$, $n \in \mathbb{Z}$, forment un système de racines affines réduit S ; ce sont les formes linéaires affines θ sur $\mathfrak{h}$ tels que pour tout $x \in \mathrm{Lie}(T)$, $e^{\theta(x)}$ s'écrive $e^{\alpha(\exp x)}$, $\alpha \in R$. Le groupe $W(S)$ est le groupe de Weyl affine W_a de G , engendré par W et les translations par les éléments du noyau de l'application exponentielle $\mathrm{Lie}(T) \rightarrow T$.

b) De même, les $\frac{\alpha}{\|\alpha\|^2} + n\theta'_0$, $\alpha \in R$, $n \in \mathbb{Z}$, forment un système de racines affines réduit S' (θ'_0 fonction constante $\neq 0$ arbitraire).

En fait, tout système de racines affines réduit est somme directe de systèmes de la forme S , de systèmes de la forme S' , et de systèmes exceptionnels dits de type BC_l , que l'on obtient à partir des groupes G de type C_l par une variante des constructions précédentes. Dans ce numéro, on se restreint au cas a) pour simplifier l'exposé.

Considérons la plus grande racine $\tilde{\alpha}$ de R , et la racine affine $\beta_0 = \theta_0 - \tilde{\alpha} \in S$; soit A l' "alcôve" de $\mathfrak{h}$ définie par les conditions $\mathrm{Im}(\beta_i) \geq 0$, $i = 0, \dots, l$ [on note $\beta_1, \dots, \beta_l$ les racines simples]. On dit qu'une

483-06

forme linéaire affine θ est > 0 si $\text{Im}(\theta|_A) > 0$; toute racine affine est soit > 0 soit < 0 . Pour tout $w \in W(S)$, on note $s(w)$ la somme (finie) des éléments θ de S tels que $\theta > 0$, $w^{-1}(\theta) < 0$. Par ailleurs, considérons le groupe $P \oplus \mathbb{Z}\theta_0$ et le sous-monoïde des éléments négatifs, soit $(P \oplus \mathbb{Z}\theta_0)_-$; on peut définir l'algèbre large $\mathbb{Z}[(P \oplus \mathbb{Z}\theta_0)_-]$, algèbre de séries formelles en les e^{-u} , $u \in P \oplus \mathbb{Z}\theta_0$, $u > 0$.

On a dans cette algèbre l'identité formelle ([5], 8.1) :

$$(19) \quad Q. \prod_{\theta \in S, \theta > 0} (1 - e^{-\theta}) = \sum_{w \in W(S)} \det(w) e^{-s(w)} \quad \text{où } Q = \prod_{m \geq 0} (1 - e^{-m\theta_0})^L.$$

Cette formule est, au facteur correctif Q près, l'analogie direct de la formule d'H. Weyl

$$(20) \quad \prod_{\alpha \in R, \alpha > 0} (1 - e^{-\alpha}) = \sum_{w \in W} \det(w) e^{w(\rho) - \rho},$$

(noter que $\rho - w(\rho)$ est la somme des $\alpha > 0$ tels que $w^{-1}(\alpha) < 0$.)

Montrons rapidement comme (19) implique (10). Le premier membre de (19) s'écrit

$$\prod_{m \geq 1} (1 - e^{-m\theta_0})^L \cdot \prod_{\alpha \in R} \prod_{m \geq 1} (1 - e^{-\alpha - m\theta_0}) \cdot \prod_{\alpha \in R, \alpha > 0} (1 - e^{-\alpha}),$$

d'où utilisant (20) et posant $X = e^{-\theta_0}$

$$\prod_{m \geq 1} p(X^m) \cdot \sum_{w \in W} \det(w) e^{w(\rho) - \rho} ;$$

cela ressemble beaucoup au premier membre de (10) ; on calcule de même le second membre de (19) en décomposant $W(S)$ en produit semi-direct de W et d'un groupe de translations et en utilisant la formule des caractères (2) (voir [5] pour les détails).

Pour un système de racines affines du type b), le facteur correctif Q est légèrement différent et on obtient par traduction la formule (11).

La démonstration de l'identité (19) dans [5] est assez compliquée, bien qu'étant, comme dit Macdonald, "a purely formal exercise". L'analogie entre (19) et (20) n'explique pas la présence du facteur Q . C'est MOODY [6] qui a remarqué que l'identité (19) s'interprétait raisonnablement par la présence de racines

"complémentaires" dans les algèbres de Lie euclidiennes, mais sans en donner une démonstration directe. C'est à KAC[✓] que l'on doit une démonstration de ce type.

5. MOODY - KAC[✓] : Algèbres de Lie définies par une matrice de Cartan

Cette construction est essentiellement due à MOODY, puis généralisée par KAC[✓] et GARLAND - LEPOWSKY, voir [2].

Soit $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq l}$ une matrice carrée satisfaisant aux conditions suivantes :

- 1) $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, $a_{ii} = 2$,
- 2) $a_{ij} \leq 0$ si $i \neq j$,
- 3) il existe $q_1, \dots, q_l \in \mathbb{N}^*$ tels que $q_i a_{ij} = q_j a_{ji}$.

Exemples. - a) Les matrices de Cartan des algèbres de Lie semi-simples satisfont aux conditions précédentes.

b) Les matrices de Cartan associées aux systèmes de racines affines satisfont aussi à ces conditions.

Notons $\mathfrak{g}$ la $\mathbb{Q}$ -algèbre de Lie engendrée par des éléments x_i, y_i, h_i , $i = 1, \dots, l$, soumis aux relations

$$\begin{aligned} [h_i, h_j] &= 0, \quad i \neq j; \\ [x_i, y_j] &= \delta_{ij} h_i; \\ [h_i, x_j] &= a_{ij} x_j, \quad [h_i, y_j] = -a_{ij} y_j; \\ (\text{ad } x_i)^{-a_{ij}+1} x_j &= 0, \quad (\text{ad } y_i)^{-a_{ij}+1} y_j = 0, \quad i \neq j. \end{aligned}$$

Lorsque (a_{ij}) est de la forme a), il est maintenant classique (HARISH-CHANDRA, CHEVALLEY, SERRE) que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple déployée.

On note $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre (commutative) engendrée par les h_i ; l'algèbre $\mathfrak{g}$ est graduée de type $\mathbb{Z}^l$ (avec $\deg(x_i) = -\deg(y_i) = i$ -ème élément de base, $\deg(h_i) = 0$).

On note $\bar{\mathfrak{g}}$ le produit semi-direct $\mathfrak{g} \times \mathbb{Q}^l$, où, pour $(t_1, \dots, t_l) \in \mathbb{Q}^l$, $\text{ad}(t_1, \dots, t_l)$ vaut $\sum t_i n_i$ en degré $(n_1, \dots, n_l)$, et $\mathfrak{h}$ le produit (direct)

$\mathfrak{h} \times \mathbb{Q}' \subset \bar{\mathfrak{g}}$. On définit comme d'habitude les racines de $\bar{\mathfrak{g}}$ relativement à $\bar{\mathfrak{h}}$ et les sous-espaces propres $\bar{\mathfrak{g}}^{-\alpha}$. On a l racines simples $\beta_1, \dots, \beta_l$, [avec $\bar{\mathfrak{g}}^{\beta_i} = \mathbb{Q}x_i$, $\bar{\mathfrak{g}}^{-\beta_i} = \mathbb{Q}y_i$], qui engendrent un sous-espace de dimension l de $\bar{\mathfrak{h}}^*$.

Le groupe de Weyl W est le groupe d'automorphismes de $\bar{\mathfrak{h}}^*$ engendré par les réflexions fondamentales données par

$$s_i(\varphi) = \varphi - \varphi(h_i)\beta_i ;$$

on a

$$s_i(\beta_j) = \beta_j - a_{ij}\beta_i .$$

L'opération de W sur $\bar{\mathfrak{h}}^*$ laisse stable l'ensemble des racines ; une racine de la forme $w(\beta_i)$, $w \in W$, est dite racine principale ; il y a éventuellement d'autres racines, dites complémentaires. Si α est une racine principale, $\bar{\mathfrak{g}}^{-\alpha}$ est de dimension 1 ; pour une racine complémentaire α , $\bar{\mathfrak{g}}^{-\alpha}$ peut être de dimension > 1 .

On définit les poids dominants comme les éléments λ de $\bar{\mathfrak{h}}^*$ tels que $\lambda(h_i) \in \mathbb{N}$ pour $i = 1, \dots, l$; on peut alors généraliser la théorie classique. Disons qu'un $\bar{\mathfrak{g}}$ -module E est standard si

- 1) E possède un plus grand poids λ , et E^λ est de dimension 1 .
- 2) E est engendré par E^λ .
- 3) Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f_i^n E^\lambda = 0$ pour tout i .

Un tel module est irréductible, son plus grand poids est dominant ; inversement, pour tout poids dominant, il existe un $\bar{\mathfrak{g}}$ -module standard dont c'est le plus grand poids (ces résultats de KAC ne s'obtiennent que tout à la fin de la théorie comme conséquence de la formule des caractères, voir [2]).

6. KAC : La formule des caractères [3]

Nous donnons seulement les énoncés, renvoyant à [2] pour les démonstrations.

Soit d'abord ρ un élément de $\bar{\mathfrak{h}}^*$ tel que $\rho(h_i) = 1$ pour $i = 1, \dots, l$. Alors :

a) pour tout $w \in W$, toute racine $\alpha > 0$ telle que $w^{-1}(\alpha)$ est < 0 , est principale, et la somme de ces racines est $\rho - w(\rho)$.

b) On a l'identité formelle

$$(21) \quad \prod_{\alpha > 0} (1 - e^{-\alpha})^{\dim \bar{g}^{\alpha}} = \sum_{w \in W} \det(w) e^{w(\rho) - \rho}.$$

c) Soit E un $\bar{g}$ -module standard de plus grand poids λ ; alors son caractère $\text{ch}(E)$ est défini et on a

$$(22) \quad \text{ch}(E) = \frac{\sum_{w \in W} \det(w) e^{w(\lambda + \rho)}}{\sum_{w \in W} \det(w) e^{w(\rho)}}.$$

Montrons comment (21) implique (19). Prenons pour matrice (a_{ij}) la matrice de Cartan du système de racines affines considéré. Alors d'après a) le second membre de (21) est le second membre de (19). Le premier membre se décompose en

$$\prod_{\substack{\alpha \text{ complémentaire} \\ \alpha > 0}} (1 - e^{-\alpha})^{\dim \bar{g}^{\alpha}} \cdot \prod_{\substack{\alpha \text{ principale} \\ \alpha > 0}} (1 - e^{-\alpha}),$$

et il n'y a plus qu'à identifier le facteur correctif

$$Q = \prod_{\substack{\alpha \text{ complémentaire} \\ \alpha > 0}} (1 - e^{-\alpha})^{\dim \bar{g}^{\alpha}},$$

comme dans [6].

Quant à la formule (22) et à ses conséquences notamment la formule des partitions à la KOSTANT, cela nous entraînerait trop loin de notre sujet, renvoyons le lecteur à [2].

7. EULER : La somme de l'ensemble vide

La théorie de KAC[✓] explique bien la nature des formules du genre (19), et éventuellement de leurs traductions (10) et (11). L'intervention de la fonction η de Dedekind reste cependant totalement mystérieuse. Considérons par exemple l'identité classique d'Euler

$$(23) \quad \prod_{m \geq 1} (1 - X^m) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n X^{(3n^2 + n)/2}$$

(on peut l'obtenir en prenant $Z = X^{1/3}$ dans (13)), que l'on peut écrire aussi

483-10

$$(24) \quad \eta(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n x^{\frac{3}{2}(n+\frac{1}{6})^2}.$$

Cette formule entre parfaitement dans le cadre (15) : prenons pour groupe $G = U(1)$; ses représentations irréductibles V_λ sont toutes de dimension 1 , paramétrées par $\lambda \in \mathbb{Z}$, l'élément $a = -1 \in G$ est ce qu'on peut appeler principal : il est non nul et d'ordre minimum et (24) se traduit en

$$(25) \quad \eta(x) = \sum_{\lambda \in \hat{G}} \chi_\lambda(a) \cdot \dim V_\lambda \cdot x^{\frac{3}{2}(\lambda+\frac{1}{6})^2},$$

en conformité totale avec (15). On en tire cependant deux constatations :

$$(26) \quad \text{la forme canonique sur } \mathbb{Z} = \hat{G} \text{ est } n \mapsto \frac{3}{2} n^2$$

$$(27) \quad \underline{\text{la demi-somme de l'ensemble vide de racines est } 1/6}.$$

Si (26) est tolérable, (27) semble avoir des conséquences inattendues (en particulier pour l'enseignement des mathématiques dans les écoles maternelles).

Ajouté sur épreuves : je viens de recevoir un "preprint" de LOOIJENGA intitulé : "root systems and elliptic curves", où il donne une démonstration de (19), donc de (10), dans un esprit voisin de la démonstration de (3) donnée par VAN ASCH (cf. [7]).

BIBLIOGRAPHIE

Aux articles cités dans le texte, on a ajouté [1] et [8] dont la lecture s'impose. La réunion de [2], [4] et [5] couvre l'ensemble de la question.

- [1] F. J. DYSON - Missed opportunities, Bull. Amer. Math. Soc., 78 (1972), 635-652.
- [2] H. GARLAND, J. LEPOWSKY - Lie algebra homology and the Macdonald-Kač formulas, Preprint.
- [3] V. G. KAČ - Infinite dimensional Lie algebras and Dedekind's η function (Traduction anglaise), Functional Analysis and its Applications, 8 (1974), 68-70.
- [4] B. KOSTANT - On Macdonald's η -function formula, the laplacian, and generalized exponents, Preprint.
- [5] I. G. MACDONALD - Affine root systems and Dedekind's η function, Inventiones Math., 15 (1972), 91-143.
- [6] R. V. MOODY - Macdonald identities and euclidean Lie algebras, Proc. Amer. Math. Soc., 48 (1975), 43-52.
- [7] B. VAN ASCH - Des identités pour certaines puissances de η , C.R. Acad. Sc. Paris, t. 277 (5 déc. 1973), p. 1087-1090.
- [8] D. N. VERMA - Revue de [5], Math. Reviews, Vol. 50, n° 5, Revue 9996, nov. 1975.