YVES DEJEAN

Transformation de Fourier des distributions homogènes

Séminaire N. Bourbaki, 1964, exp. nº 242, p. 25-38
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1962-1964__8__25_0>

Seminaire BOURBAKI
15e année, 1962/63, n° 242

Décembre 1962

TRANSFORMATION DE FOURIER DES DISTRIBUTIONS HOMOGÈNES

par Yves DEJEAN

(d'après Lars GÅRDING)

1. Préliminaires.

Toutes les variétés considérées dans la suite sont supposées réelles, de classe C^∞ et orientées.

Soit X une telle variété : $\Omega_o(X)$ sera l'espace des formes différentielles sur X de degré maximum, indéfiniment différentiables et à support compact, muni de la topologie bien connue ; les distributions sur X seront pour nous les éléments du dual $\Omega'_o(X)$. Pour $T \in \Omega'_o(X)$, $\omega \in \Omega_o(X)$, nous noterons $\langle T , \omega \rangle$ le produit scalaire.

Soit $\mathcal{E}(X)$ l'espace des fonctions sur X indéfiniment différentiables : $\mathcal{E}(X)$ se plonge dans $\Omega'_o(X)$ grâce à

$$\langle f , \omega \rangle = \int_X f(x)\ \omega(x) \qquad f \in \mathcal{E}(X) , \quad \omega \in \Omega_o(X) \qquad .$$

Si X est un ouvert de $\underset{\sim}{R}^n$, on peut identifier $\mathcal{D}(X)$ à $\Omega_o(X)$ par

$$\varphi \to \varphi\ dx = \varphi\ dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \qquad ;$$

alors $\Omega'_o(X)$ s'identifie à $\mathcal{D}'(X)$.

2. Quelques techniques utiles dans la suite.

a. Image réciproque d'une distribution. - On se donne deux variétés X et Y et $u : X \to Y$, u de classe C^∞ ; étant donnée $T(y) \in \Omega'_o(Y)$, on veut définir $T(u(x)) \in \Omega'_o(X)$ de façon à retrouver $f(u(x))$ au sens usuel quand T est une fonction $f \in \mathcal{E}(Y)$.

Si u est un isomorphisme, on a le résultat bien connu

$$\langle T(u(x)) , \omega(x) \rangle = \varepsilon \langle T(y) , \omega(u^{-1}(y)) \rangle$$

où $\varepsilon = +1$ si u conserve l'orientation, -1 dans le cas contraire.

Considérons le cas plus général où l'on suppose seulement que u est une submersion, c'est-à-dire que sa différentielle en x est surjective pour tout

$x \in X$. L'hypothèse entraîne alors la propriété :

(P) : $\forall\ x \in X$, si $(y_1 , \dots , y_p)$ est un système de coordonnées locales de Y au voisinage de $u(x)$, on peut fabriquer des coordonnées locales sur X au voisinage de x de la forme :

$$(y_1 \circ u , \dots , y_p \circ u , z_1 , \dots , z_q) \quad .$$

Localement, cette propriété nous ramène au cas où u est la projection de $\underset{\sim}{R}^{p+q}$ sur $\underset{\sim}{R}^p$: or dans ce cas, la solution du problème est bien connue (distributions indépendantes des q dernières variables) et donnée par la formule :

$$\langle T(u(x)) , \varphi(x) \rangle = \langle T(y) , \int \varphi(y , z)\, dz \rangle \quad .$$

Dans le cas général, on va encore faire une intégration partielle, et pour cela on va tout de suite faire apparaître le facteur à intégrer (dz dans le cas précédent) en effectuant un produit intérieur ; soit $\omega \in \Omega_o(X)$; on prend un champ V de p-vecteurs sur Y ne s'annulant en aucun point, on le relève (à l'aide de (P)) en un champ $\tilde{V}$ sur X , et on considère

$$\int_{u^{-1}(y)} \tilde{V} \lrcorner\, \omega$$

qui ne dépend pas du mode de relèvement (cela résulte de (P)). Cette forme linéaire de V définit alors une forme différentielle $A\omega$ sur Y de degré maximum par

$$\langle A\omega(y) , V(y) \rangle = \int_{u^{-1}(y)} \tilde{V} \lrcorner\, \omega \quad ;$$

A applique continûment $\Omega_o(X)$ dans $\Omega_o(Y)$, et on peut donc poser

$$\langle T(u(x)) , \omega(x) \rangle = \langle T(y) , A\omega(y) \rangle \quad .$$

Alors $T(y) \to T(u(x))$ est un isomorphisme de $\Omega'_o(Y)$ sur son image.

b. Distributions régulières en certaines variables.

Définition. - Soit $X = Y \times Z$ avec $Y = \underset{\sim}{R}^p$, $Z = \underset{\sim}{R}^q$; nous dirons que $T \in \mathcal{D}'(X)$ est régulière en z si, localement, elle peut se mettre sous la forme :

$$\Sigma\, h_\nu (\partial/\partial x)^\nu F_\nu$$

où $h_\nu \in \mathcal{E}(X)$ et où F_ν est une fonction continue dont toutes les dérivées partielles en z sont des fonctions continues.

Alors T peut encore s'écrire localement

$$\Sigma\, (\partial/\partial y)^\nu G_\nu \tag{1}$$

où les G_ν ont la même propriété que les F_ν.

L'intérêt de cette notion réside dans la possibilité de généraliser certaines opérations.

Multiplication :

PROPOSITION 1. – Soit $X = Y \times Z \times U$; soient $T_1 \in \mathcal{D}'(X)$ régulière en $(z\,,\,u)$, $T_2 \in \mathcal{D}'(X)$ régulière en $(y\,,\,u)$: alors on peut définir $T_1\, T_2$ qui est un élément de $\mathcal{D}'(X)$ régulier en u.

La démonstration repose essentiellement sur le fait que les décompositions du type (1) permettent de poser localement :

$$\langle T_1\, T_2\,,\,\varphi\rangle$$

$$= \Sigma\, (-1)^{|\mu|+|\nu|} \int (\partial/\partial y)^\mu\, (\partial/\partial z)^\nu\, G_{1,\nu}(\dot{y},z,u)\, G_{2,\nu}(y,\dot{z},u)\, \varphi(y,z,u)\, dy\, dz\, du$$

où

$$T_1 = \sum_\nu (\partial/\partial y)^\nu G_{1,\nu}\,, \qquad T_2 = \sum_\nu (\partial/\partial z)^\nu G_{2,\nu}$$

et où un point au-dessus d'une variable indique qu'on ne dérive pas par rapport à cette variable.

Restriction : pour restreindre à une sous-variété, il nous faut :

Définition. – Soient X et Z deux variétés, v une submersion de X dans Z : nous dirons que $T \in \Omega'_0(X)$ est régulière en z, si on peut, localement, l'écrire sous la forme (1), où $(z_1\,,\,\ldots\,,\,z_q)$ sont des coordonnées locales sur Z et $(y_1\,,\,\ldots\,,\,y_p\,,\,z_1\,,\,\ldots\,,\,z_q)$ des coordonnées locales sur X.

Alors la proposition 1 montre aisément que :

PROPOSITION 2. - Si $T \in \Omega'_0(X)$ est régulière en z, on peut définir la restriction

$$T|v^{-1}(z) \text{ , élément de } \Omega'_0(v^{-1}(z))$$

et si $S \in \Omega'_0(Z)$, on peut définir le produit

$$T(x)\ S(v(x)) \in \Omega'_0(X) \qquad .$$

Si l'on considère un changement de variables sur $Y \times Z$: $(y , z) \to (y' , z')$ où y' est fonction de y seul, il est immédiat que si T est une distribution régulière en z, c'est une distribution régulière en z' après changement de variables.

Cette remarque permet d'étudier la situation suivante, où l'on introduit un paramètre λ décrivant une variété Λ : v devient une application de $X \times \Lambda$ dans Z telle que, pour un certain λ_0, l'application partielle $x \to v(x , \lambda_0)$ soit une submersion. Alors, à partir de coordonnées locales z sur Z, on peut fabriquer deux systèmes de coordonnées locales sur $X \times \Lambda$: l'un de la forme $(y , z(v(x , \lambda_0)) , \lambda)$ et l'autre de la forme $(y , z(v(x , \lambda)) , \lambda)$. Alors on démontre aisément, grâce à notre remarque, que :

PROPOSITION 3. - Si $T \in \Omega'_0(X \times \Lambda)$ est régulière en $(z(v(x , \lambda_0)) , \lambda)$ pour λ proche de λ_0, et si $S \in \Omega'_0(Z \times \Lambda)$ est régulière en λ pour λ proche de λ_0, alors, étant donné un ouvert V relativement compact de X, $T|V \times \Lambda$ est régulière en $(z(v(x , \lambda)) , \lambda)$ pour λ proche de λ_0 et le produit

$$T(x , \lambda)\ S(v(x , \lambda) , \lambda)$$

est régulier en λ pour λ proche de λ_0.

COROLLAIRE. - Pour ω fixée, la fonction de λ

$$\langle T(x , \lambda)\ S(v(x , \lambda) , \lambda) , \omega(x) \rangle$$

est régulière pour λ proche de λ_0.

3. Distributions homogènes.

Définition. - Soit U un cône ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $T \in \mathcal{D}'(U)$: on dit que T est homogène de degré α , $\alpha \in \mathbb{C}$, si

$$T(\lambda x) = \lambda^{\alpha}\, T(x) \qquad \forall\ \lambda > 0 \quad .$$

Exemple. - Une dérivée partielle d'ordre p de δ est homogène de degré $-n-p$ sur $\mathbb{R}^n$.

On note $\Phi_\alpha(U)$ l'espace des distributions sur U homogènes et de degré α : c'est un sous-espace fermé de $\mathcal{D}'(U)$. On note $F_\alpha(U)$ le sous-espace de $\Phi_\alpha(U)$ formé des éléments qui sont de classe C^∞ en dehors de 0 : si $0 \notin U$, $F_\alpha(U)$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{E}(U)$.

Pour étudier $\Phi_\alpha(U)$, on utilise le fait qu'une distribution homogène de degré 0 , à n variables, est en fait une distribution à $n-1$ variables. Principe : on se donne $\gamma \in F_1(\dot{\mathbb{R}}^n)$ $(\dot{\mathbb{R}}^n = \complement\{0\})$, $\gamma > 0$; on applique Φ_α sur Φ_0 par $T \to \gamma^{-\alpha}\, T$, puis on ramène Φ_0 sur l'espace des distributions sur la variété $\gamma^{-1}(1)$ à $n-1$ dimensions ; on obtient d'ailleurs le même résultat en remarquant que $T \in \Phi_\alpha$ est régulière par rapport à la variable d'homogénéité λ et en prenant sa restriction à $\gamma^{-1}(1)$. On peut ainsi démontrer :

PROPOSITION 4. - Si $0 \notin U$, $F_\alpha(U)$ est dense dans $\Phi_\alpha(U)$.

a. Distributions homogènes sur $\dot{\mathbb{R}}^n$. - Nous voulons établir une dualité remarquable entre $\Phi_\alpha(\dot{\mathbb{R}}^n)$ et $F_{\alpha'}(\dot{\mathbb{R}}^n)$ pour $\alpha + \alpha' = -n$. Soient d'abord $f_\alpha \in F_\alpha(\dot{\mathbb{R}}^n)$, $f_{\alpha'} \in F_{\alpha'}(\dot{\mathbb{R}}^n)$: alors $f_\alpha\, f_{\alpha'}$ est homogène de deg $-n$, et si l'on pose

$$\sigma(x) = \sum (-1)^{j-1}\, x_j\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \dots \wedge dx_n$$

la formule d'Euler montre que $d(f_\alpha\, f_{\alpha'}\, \sigma) = 0$. Par conséquent

$$\int_{\gamma^{-1}(1)} f_\alpha(x)\, f_{\alpha'}(x)\, \sigma(x)$$

est une forme bilinéaire sur $F_\alpha(\dot{\mathbb{R}}^n) \times F_{\alpha'}(\dot{\mathbb{R}}^n)$, indépendante de γ , que nous noterons dans la suite

$$\langle f_\alpha\ ,\ f_{\alpha'} \rangle_\sigma$$

Mais, pour $T_\alpha \in \Phi_\alpha(\dot{\underset{\sim}{R}}^n)$, on peut encore poser :

$$\langle T_\alpha \, , \, f_{\alpha'} \rangle_\sigma = \langle T_\alpha | \gamma^{-1}(1) \, , \, f_{\alpha'} \, \sigma \rangle$$

la proposition 4 montre que cette forme bilinéaire sur $\Phi_\alpha(\dot{\underset{\sim}{R}}^n) \times F_\alpha(\dot{\underset{\sim}{R}}^n)$ est encore indépendante de γ . Alors

THÉORÈME 1. – La forme bilinéaire $\langle T_\alpha \, , \, f_{\alpha'} \rangle_\sigma$ permet d'identifier chacun des deux espaces $\Phi_\alpha(\dot{\underset{\sim}{R}}^n)$ et $F_{\alpha'}(\dot{\underset{\sim}{R}}^n)$ au dual de l'autre, muni de sa topologie naturelle.

Ceci résulte immédiatement de ce que, σ étant partout non nulle, on est ramené à considérer la dualité entre $\Omega'_0(\gamma^{-1}(1))$ et l'espace des formes de degré maximum sur la variété compacte $\gamma^{-1}(1)$.

Nous voulons maintenant ramener l'étude des distributions homogènes sur $\underset{\sim}{R}^n$ à l'étude que nous venons de faire : pour cela, nous chercherons s'il est possible de prolonger à tout l'espace une distribution homogène sur $\dot{\underset{\sim}{R}}^n$, et dans quels cas le prolongement est homogène. Pour construire le prolongement, on définit préalablement une transformation fonctionnelle.

b. <u>La transformation</u> H_α . – Si $f_\alpha \in F_\alpha(\dot{\underset{\sim}{R}}^n)$ et si $g \in \mathcal{S} = \mathcal{S}(\underset{\sim}{R}^n)$ est nulle au voisinage de 0 , alors

$$\int f_\alpha(x) \, g(x) \, dx = \langle f_\alpha \, , \, H_{\alpha'} \, g \rangle_\sigma \tag{2}$$

où

$$H_{\alpha'} \, g(x) = \int_0^\infty r^{-\alpha'} \, g(rx) \, \frac{dr}{r}$$

$H_{\alpha'}$ est alors une application continue dans $F_{\alpha'}(\dot{\underset{\sim}{R}}^n)$ du sous-espace de $\mathcal{S}$ formé des fonctions nulles au voisinage de 0 . Nous allons dès lors prolonger $H_{\alpha'}$ à $\mathcal{S}$ tout entier de façon à prolonger, à l'aide de (2), toute distribution homogène sur $\dot{\underset{\sim}{R}}^n$ en une distribution tempérée.

Auparavant, remarquons que toute distribution homogène sur $\underset{\sim}{R}^n$ est tempérée : si $T_\alpha \in \Phi_\alpha(\underset{\sim}{R}^n)$, on peut écrire pour $\varphi \in \mathcal{D}(\underset{\sim}{R}^n)$:

$$\langle T_\alpha \, , \, \varphi \rangle = \langle T_\alpha \, , \, h\varphi \rangle + \langle T_\alpha \, , \, H_{\alpha'}(1 - h)\,\varphi \rangle_\sigma$$

où h est une fonction de $\mathcal{D}$ égale à 1 au voisinage de 0 ; alors chacun des deux termes au second membre peut se prolonger en une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}$.

Prolongement de H_α : pour $\mathcal{R}(\alpha) < 0$, on peut poser

$$H_\alpha\, g(x) = \int_0^\infty r^{-\alpha}\, g(rx)\, \frac{dr}{r} \qquad \forall \quad g \in \mathcal{S}$$

et on a alors, après intégration par parties :

$$H_\alpha\, g(x) = \int_0^\infty \frac{r^{k-\alpha}}{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k)} \frac{d^{k+1}}{dr^{k+1}}\, g(rx)\, dr \qquad .$$

Alors si α n'est pas entier $\geqslant 0$, cette formule peut servir à définir $H_\alpha\, g$ en prenant k assez grand. On voit alors que $H_\alpha g(x)$ est, pour x fixé, une fonction méromorphe de α présentant les pôles simples $\alpha = p$ (entier $\geqslant 0$). On complète alors la définition de H_α en posant

$$H_p\, g(x) = \left[\frac{d}{d\alpha}\, (\alpha - p)\, H_\alpha\, g(x)\right]_{\alpha=p} \qquad .$$

Le calcul montre alors que

(3)
$$H_\alpha\, g(\lambda x) = \lambda^\alpha H_\alpha\, g(x) \quad \text{pour} \quad \alpha \neq p$$
$$H_p\, g(\lambda x) = \lambda^p\, H_p\, g(x) - \frac{\lambda^p}{p!} \log \lambda \sum_{|\nu|=p} x^\nu\, \partial_\nu\, g(0) \qquad .$$

En outre, H_α est une application bornée de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{E}(\mathring{R}^n)$.

c. Distributions homogènes sur R^n. — En posant

$$\langle \tilde{T}_{\alpha,g} \rangle = \langle T_\alpha | \gamma^{-1}(1)\ ,\ H_{\alpha'}\, g(x)\ \sigma(x) \rangle \quad \text{où} \quad g \in \mathcal{S} \qquad ,$$

on prolonge toute $T_\alpha \in \Phi_\alpha(\mathring{R}^n)$ en une distribution tempérée sur R^n. Les formules (3) montrent alors que ce prolongement est homogène de degré α si $\alpha \neq p'$ (où p' désigne un entier tel qu'il existe un entier $p \geqslant 0$ vérifiant $p + p' = -n$), et que, si $\alpha = p'$, ce prolongement sera homogène dès que

$$\langle T_{p'}\ ,\ N_p \rangle_\sigma = 0$$

où N_p désigne l'espace des polynômes homogènes de degré p .

Supposons maintenant que S_α soit un prolongement de T_α homogène de degré α dans tout l'espace. Alors, S_α et le prolongement défini ci-dessus diffèrent d'une distribution de la forme

$$Q(\partial/\partial x)\,\delta$$

où Q est un polynôme. On en conclut, si $\alpha \neq p'$, que cette distribution doit être homogène de degré α , ce qui entraîne $Q = 0$. Si $\alpha = p'$, on en tire, compte tenu de (3),

$$\langle T_{p'} , x^\nu \rangle_\sigma = 0$$

pour tout ν de longueur p .

On est ainsi amené à introduire l'espace N_α , formé des éléments de $\Phi_\alpha(\underset{\sim}{R}^n)$ qui sont soit des polynômes, soit des distributions dont le support est l'origine : N_α est donc l'espace des polynômes Q_p homogènes de degré p si $\alpha = p$, l'espace des distributions de la forme $Q_p(\partial/\partial x)\, S$ si $\alpha = p'$, le sous-espace $\{0\}$ dans tous les autres cas. On peut alors énoncer :

PROPOSITION 5. - Soit $T_\alpha \in \Phi_\alpha(\dot{\underset{\sim}{R}}^n)$. Si $\alpha \neq p'$, T_α admet un prolongement unique en une distribution de $\Phi_\alpha(\underset{\sim}{R}^n)$. Si $\alpha = p'$, $T_{p'}$ est prolongeable en une distribution de $\Phi_{p'}(\underset{\sim}{R}^n)$ si et seulement si

$$\langle T_{p'} , N_p \rangle_\sigma = 0$$

et alors le prolongement est unique modulo $N_{p'}$.

Alors, si l'on pose

$$\Psi_\alpha = \Phi_\alpha(\underset{\sim}{R}^n)/N_\alpha , \qquad G_\alpha = F_\alpha(\underset{\sim}{R}^n)/N_\alpha \qquad ,$$

il est immédiat que

THÉORÈME 2. - La forme bilinéaire $\langle T_\alpha , f_{\alpha'} \rangle_\sigma$ permet d'identifier chacun des deux espaces Ψ_α et $G_{\alpha'}$ au dual de l'autre.

Remarque. - Si $T_\alpha \in \Phi_\alpha(\underset{\sim}{R}^n)$, et si nous considérons sa restriction T'_α à $\overset{\bullet}{\underset{\sim}{R}}{}^n$, nous pouvons, en appliquant à cette dernière le procédé de prolongement, définir une nouvelle distribution $T_\alpha^{(\gamma)} \in \Phi_\alpha(\underset{\sim}{R}^n)$ par

$$\langle T_\alpha^{(\gamma)} , g\rangle = \langle T_\alpha , g\rangle - \langle T'_\alpha | \gamma^{-1}(1) , H_{\alpha'} \, g(x) \, \sigma(x)\rangle \qquad g \in \mathcal{S}$$

$T_\alpha^{(\gamma)}$ admet l'origine pour support et est nulle si $\alpha \not\leq p'$.

4. Transformée de Fourier d'une distribution homogène.

Si on considère une fonction f_α homogène de degré α et qu'on fasse un calcul formel sur l'expression de sa transformée de Fourier :

$$\mathcal{F}f_\alpha(x) = \int \exp(ix\xi) \, f(\xi) \, d\xi$$

montre que

$$\mathcal{F}f_\alpha(x) = \int_{\gamma^{-1}(1)} \left(\int_0^\infty r^{-\alpha'-1} \exp(irx\xi) \, dr\right) f_\alpha(\xi) \, d\xi \qquad (4)$$

Nous nous proposons maintenant de justifier, pour toute $T_\alpha \in \Phi_\alpha(\underset{\sim}{R}^n)$, une formule du même genre donnant explicitement sa transformée de Fourier $\mathcal{F}T_\alpha$,

Pour cela, nous introduisons les fonctions

$$\chi_\alpha(s) = \exp(-\pi i\alpha) \, \Gamma(-\alpha) \, s^\alpha \qquad \alpha \neq p$$

où s est un nombre complexe tel que $\Im(s) \geqslant 0$, $s \neq 0$ et où l'on choisit $0 \leqslant \arg s \leqslant \pi$. Pour $\alpha = p$, on pose

$$\chi_p(s) = \left[\frac{d}{d\alpha}(\alpha - p) \, \chi_\alpha(s)\right]_{\alpha=p} \quad .$$

Alors

$$\chi'_{\alpha+1} = \chi_\alpha \quad \text{pour tout } \alpha$$

$$\begin{cases} \chi_\alpha(\lambda s) = \lambda^\alpha \chi(s) & \text{pour } \alpha \neq p \\ \chi_p(\lambda s) \equiv \lambda^p \chi_p(s) & (\text{mod } s^p) \end{cases} \quad .$$

Pour parvenir à notre résultat il nous faudra considérer les χ_α comme des distributions tempérées sur $\underset{\sim}{R}$ en posant :

$$\langle \chi_\alpha , \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int \chi_\alpha(s + i\varepsilon) \, \varphi(s) \, ds \quad .$$

Il est immédiat que, pour $\Re(\alpha) > -1$ cette limite existe et définit une distribution (et même une mesure). Dans les autres cas

$$\int \chi_\alpha(s + i\varepsilon) \, \varphi(s) \, ds = (-1)^k \int \chi_{\alpha+k}(s + i\varepsilon) \, \varphi^{(k)}(s) \, ds$$

montre encore que la limite existe et définit une distribution (en la donnant comme dérivée de fonction). On montre aisément que, pour α non entier, cette distribution est une pseudo-fonction définie par partie finie.

La formule (4) conduit à l'étude de transformations fonctionnelles faisant l'objet de la :

PROPOSITION 6. - La transformation $\mathcal{C}_\alpha$, définie par

$$\mathcal{C}_\alpha \, g(x) = \langle \chi_\alpha(x\xi) \, , \, g(\xi) \rangle \quad ,$$

est continue de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{E}(\dot{\underset{\sim}{R}}^n)$.

La transformation $\mathcal{C}_\alpha^{(\gamma)}$ définie par

$$\mathcal{C}_\alpha^{(\gamma)} \, f_{\alpha'}(x) = \langle\!\langle \chi_\alpha(x\xi) | \gamma^{-1}(1) \, , \, f_{\alpha'}(\xi) \, \sigma(\xi) \rangle\!\rangle$$

est continue de $F_{\alpha'}(\dot{\underset{\sim}{R}}^n)$ dans $\mathcal{E}(\dot{\underset{\sim}{R}}^n)$ et se prolonge en une application continue de $\Phi_{\alpha'}(\dot{\underset{\sim}{R}}^n)$ dans $\mathcal{S}'$. Dans les deux cas, on peut dériver "sous le signe d'intégration" :

$$\frac{\partial \mathcal{C}_\alpha \, g}{\partial x_j}(x) = \langle \chi_{\alpha-1}(x\xi) \, , \, \xi_j \, g(\xi) \rangle$$

$$\frac{\partial \mathcal{C}_{\alpha}^{(\gamma)} f_{\alpha'}}{\partial x_j}(x) = \langle \chi_{\alpha-1}(x\xi) | \gamma^{-1}(1) \; , \; \xi_j \; f_{\alpha'}(\xi) \; \sigma(\xi) \rangle \quad .$$

La continuité de ces deux transformations, et la propriété de dérivabilité résultent de la considération du changement de variable $\eta_j = \xi x$ et $\eta_k = \xi_k$ pour $k \neq j$, où l'on suppose $x_j \neq 0$.

Pour prolonger $\mathcal{C}_{\alpha}^{(\gamma)}$, on remarque que, pour $f_{\alpha'} \in F_{\alpha'}(\underset{\sim}{R}^n)$, $g \in \mathcal{S}$ nulle au voisinage de 0

$$\int \mathcal{C}_{\alpha}^{(\gamma)} f_{\alpha'}(x) \; g(x) \; dx = \int_{\gamma^{-1}(1)} \mathcal{C}_{\alpha} \, g(x) \; f_{\alpha'}(x) \; \sigma(x) \qquad ;$$

pour $T_{\alpha'} \in \Phi_{\alpha'}(\underset{\sim}{\dot{R}}^n)$, on pose alors

$$\langle \mathcal{C}_{\alpha}^{(\gamma)} T_{\alpha'} \; , \; g \rangle = \langle T_{\alpha'} | \gamma^{-1}(1) \; , \; \mathcal{C}_{\alpha} \, g(x) \; \sigma(x) \rangle \; , \qquad g \in \mathcal{S} \quad .$$

PROPOSITION 7. - Soit $g \in \mathcal{S}$: pour $x \neq 0$, on a

- si $\alpha \notin p$,

$$H_{\alpha} \, \mathcal{F}g(x) = e(\alpha) \; \langle \chi_{\alpha}(x\xi) \; , \; g(\xi) \rangle$$

avec $e(\alpha) = \exp(i\pi\alpha/2)$, c'est-à-dire

$$H_{\alpha} \, \mathcal{F}g = e(\alpha) \; \mathcal{C}_{\alpha} \, g$$

- si $\alpha = p$, la même relation modulo N_p.

On considère le cas $\Re(\alpha) < 0$ et on se donne $\varepsilon > 0$: un calcul classique de variable complexe montre alors que :

$$\int_0^{\infty} r^{-\alpha-1} \; e^{-\varepsilon r} \; \mathcal{F}g(rx) \; dr = e(\alpha) \int \chi_{\alpha}(x\xi + i\varepsilon) \; g(\xi) \; d\xi$$

une intégration par parties donne

$$\int_0^{\infty} \frac{r^{k-\alpha}}{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k)} \left(\frac{d}{dr}\right)^{k+1} \left(e^{-\varepsilon r} \; \mathcal{F}g(rx)\right) dr = e(\alpha) \int \chi_{\alpha}(x\xi + i\varepsilon) \; g(\xi) \; d\xi$$

le premier membre définit alors, en prenant k assez grand, une fonction méromorphe de α admettant les pôles simples $\alpha = p$; le second membre ayant la même propriété, l'égalité, vérifiée pour $\Re(\alpha) < 0$, se prolonge pour tout $\alpha \neq p$. En passant à la limite sur ε on obtient le résultat cherché. Si $\alpha = p$, on fait opérer $\frac{d}{d\alpha}(\alpha - p)$ sur les deux membres, on fait $\alpha = p$ et on passe à la limite en ε.

Considérons alors une distribution $T_\alpha \in \Phi_\alpha(\underset{\sim}{R}^n)$, et soit $g \in \mathcal{S}$:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}T_\alpha , g\rangle &= \langle T_\alpha , \mathcal{F}g\rangle \\ &= \langle T_\alpha|\gamma^{-1}(1) , H_{\alpha'} \mathcal{F}g(x)\ \sigma(x)\rangle + \langle T_\alpha^{(\gamma)} , \mathcal{F}g\rangle \\ &= e(\alpha') \langle T_\alpha|\gamma^{-1}(1) , \mathcal{C}_{\alpha'}\ g(x)\ \sigma(x)\rangle + \langle \mathcal{F}T_\alpha^{(\gamma)} , g\rangle \end{aligned}$$

or le premier terme est justement $\langle \mathcal{C}_{\alpha'}^{(\gamma)}\ T_\alpha , g\rangle$, d'où :

THÉORÈME 3. - Pour $T_\alpha \in \Phi_\alpha(\underset{\sim}{R}^n)$, on a :

$$\mathcal{F}T_\alpha = e(\alpha')\ \mathcal{C}_{\alpha'}^{(\gamma)}\ T_\alpha + \mathcal{F}T_\alpha^{(\gamma)} \tag{5}$$

où le second terme est nul dès que $\alpha \neq p'$.

En outre $\mathcal{F}$ induit un isomorphisme Λ_α de Ψ_α sur $\Psi_{\alpha'}$ et un isomorphisme M_α de G_α sur $G_{\alpha'}$; Λ_α et $M_{\alpha'}$ sont adjoints l'un de l'autre.

On vérifie aisément que $\mathcal{F}$ passe au quotient et donne bien les isomorphismes voulus.

$$\langle \Lambda_\alpha\ T_\alpha , f_{\alpha'}\rangle_\sigma = \langle T_\alpha , M_{\alpha'}\ f_{\alpha'}\rangle_\sigma$$

résulte de la proposition 6 et de la formule (5).

5. Singularités de la transformée de Fourier d'une distribution homogène.

Utilisant la formule explicite (5), on peut maintenant étudier les singularités de $\mathcal{F}T_\alpha$ pour T_α donnée.

Tout d'abord nous remarquerons que si T_α est régulière au voisinage de l'hyperplan $x_0\ \xi = 0$ pour un certain x_0, alors $\mathcal{F}T_\alpha$ est régulière près de x_0 ; il suffit même que T_α soit régulière en $x_0\ \xi$ dans l'hyperplan $x_0\ \xi = 0$, car la proposition 3 montre que $\mathcal{F}T_\alpha$ est donnée par

$$e(\alpha') \langle \chi_{\alpha'}(x\xi)\ T_\alpha(\xi) | \gamma^{-1}(1)\ ,\ \sigma(\xi)\rangle$$

et le corollaire enseigne que c'est là une fonction régulière du paramètre x voisin de x_0 .

Supposons maintenant que s soit une fonction réelle, régulière, homogène et de degré $m \neq 1$ et que T_α soit régulière hors de la variété $s^{-1}(0)$ supposée régulière, et se présente, au voisinage de cette variété, sous la forme

$$T_\alpha(\xi) = \chi_\beta(s(\xi))\ P_\mu(\xi)$$

où P_μ est une fonction régulière homogène et de degré μ . Alors il est immédiat que si l'hyperplan $x_0\ \xi = 0$ ne touche pas la variété $s^{-1}(0)$, $\mathcal{F}T_\alpha$ est régulière au voisinage de x_0 ; en d'autres termes $\mathcal{F}T_\alpha$ est régulière en dehors du dual de $s^{-1}(0)$.

Si maintenant on considère x_0 tel que $x_0\,\xi = 0$ touche la variété $s^{-1}(0)$ en un seul point η_0 , $\mathcal{F}T_\alpha$ a un développement asymptotique de la forme :

$$e(\alpha')(2\pi)^{n/2}\ |m-1|^{-1}(\text{Hess } s'(x))^{1/2}\ \theta_0(-\varepsilon)\ i^\nu$$

$$\times \sum_0^\infty R_k(x)\ \chi_{\alpha+\beta+\frac{n}{2}+k}(\varepsilon s(x)) + \text{ fonctions régulières}$$

où les R_k sont des fonctions régulières, où $s'(x) = 0$ est l'équation du dual de $s^{-1}(0)$, où ν est la signature positive de la matrice $\left(\dfrac{\partial^2 s'}{\partial x_i\, \partial x_j}\right)$ en x_0 (on suppose cette matrice non singulière), où ε est le signe du quotient $\dfrac{x_0\ \xi}{s(\xi)}$ en η_0 et où $\theta_0(t) = 1/2(1 + \operatorname{sgn} t) = Y(t)$. Il est remarquable que les singularités de T_α et de $\mathcal{F}T_\alpha$ soient en correspondance ponctuelle, ce qui n'est pas le cas pour une distribution non homogène.

Application aux solutions élémentaires. – On suppose que s est un polynôme homogène de degré m et que $s^{-1}(0)$ n'a pas de singularité. Soit p un entier > 0 . Alors

$$E(x) = \frac{\mathcal{R}(e\pi i)^{-p}}{(p-1)!}(-1)^p \langle \chi_{mp-n}(x\xi) | \gamma^{-1}(1) \ , \ s(\xi) \ \sigma(\xi) \rangle$$

est une solution élémentaire de $s(\partial/\partial x)^p$.

On peut alors voir que E est régulière au voisinage de x si l'hyperplan $x\xi = 0$ ne touche pas $s^{-1}(0)$ (E est même analytique). Si au contraire l'hyperplan $x_0\ \xi = 0$ touche la variété aux deux points $\pm \eta_0$, on obtient pour E le développement suivant au voisinage de x_0 :

$$E(x) = \varphi(x)\ P_0(x)\ \mathcal{R}(i^{-\nu}\ \chi_{(m-1)p\ -(n/2)}(s'(x))) + R(x)$$

où

$$\varphi(x) = (-1)^{\theta_0(-\varepsilon)^{mp}} (2\pi)^{-n/2} \frac{(m-1)^{-1}}{(p-1)!} |\mathrm{Hess}\ s'(x)|^{1/2}$$

et où P_0 et R sont réelles et régulières.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOROVIKOV (V. A.). - La solution élémentaire des équations linéaires aux dérivées partielles à coefficients constants [en russe], Trudy Moskovskogo matematičeskogo Obščestva, t. 8, 1959, p. 199-257.

[2] GÅRDING (L.). - Transformation de Fourier des distributions homogènes, Bull. Soc. math. France, t. 89, 1961, p. 381-428.

[3] GEL'FAND (I. M.) i ŠAPIRO (Z. Ja.). - Les fonctions homogènes et leurs applications [en russe], Usp. Mat. Nauk U. S. S. R., t. 10, 1955, n° 3, p. 3-70.

[4] LERAY (Jean). - Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe (Problème de Cauchy, III), Bull. Soc. math. France, t. 87, 1959, p. 81-180.

[5] LERAY (Jean). - Un prolongement de la transformation de Laplace qui transforme la solution unitaire d'un opérateur hyperbolique en sa solution élémentaire (Problème de Cauchy, IV), Bull. Soc. math. France, t. 90, 1962, p. 39-156.

[6] SCHWARTZ (Laurent). - Distributions semi-régulières et changements de coordonnées, J. Math. pures et appl., 9e série, t. 36, 1957, p. 109-127.