Bernard Malgrange

Division des distributions

Séminaire N. Bourbaki, 1960, exp. nº 203, p. 477-481
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1958-1960__5__477_0>

Séminaire BOURBAKI
12e année, 1959/60, n° 203

Mai 1960

DIVISION DES DISTRIBUTIONS

par Bernard MALGRANGE

L. SCHWARTZ, dans la "Théorie des distributions", avait posé le problème suivant : soient Ω un ouvert $\subset \underset{\sim}{R}^n$, f une fonction analytique réelle dans Ω , et T une distribution dans Ω ($T \in \mathcal{D}'_\Omega$) ; existe-t-il $S \in \mathcal{D}'_\Omega$ tel qu'on ait $fS = T$? Par dualité, ce problème est équivalent au suivant : soit $\mathcal{E}_\Omega$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables dans Ω ; $f\mathcal{E}_\Omega$ est-il un idéal <u>fermé</u> de $\mathcal{E}_\Omega$?

L. HÖRMANDER [1] et S. ŁOJASIEWICZ [2] ont résolu indépendamment ce problème par l'affirmative, le premier dans le cas où f est un polynôme, le second dans le cas général ; plus exactement, tous les deux ramènent le problème à la démonstration d'une inégalité (cf. n° 2 ci-dessous), que HÖRMANDER démontre pour les polynômes, tandis que ŁOJASIEWICZ la démontre dans le cas général. Leurs méthodes diffèrent aussi en ceci, que HÖRMANDER travaille sur $\mathcal{E}$ (i. e. sur le second problème dont il vient d'être question), tandis que ŁOJASIEWICZ travaille directement sur $\mathcal{D}'$, i. e. sur le "problème de division".

J'ai suivi ici essentiellement la méthode de ŁOJASIEWICZ, qui permet, moyennant quelques modifications, d'arriver à un "théorème de division" plus général (théorème 3). On trouvera les détails des démonstrations dans le séminaire Schwartz, 1959/60, exposés n° 21-25.

1. Distributions prolongeables.

A et B étant des bornés $\subset \underset{\sim}{R}^n$, et Λ un compact $\subset \underset{\sim}{R}^n$, on dira que " A et B sont régulièrement séparés par Λ " s'il existe $C > 0$, $\rho > 0$ tels que, $\forall x \in A$, on ait :

$$d(x\ ,\ B) \geqslant C d(x\ ,\ \Lambda)^{\rho} \qquad (\ d = \text{distance})\quad .$$

Il est immédiat que cette relation est symétrique par rapport à A et B .

L'intérêt de cette notion réside dans le théorème suivant :

THÉORÈME 1. - <u>A et B étant deux compacts $\subset \underset{\sim}{R}^n$, les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

1° A *et* B *sont régulièrement séparés par* $A \cap B$;

2° *Toute distribution* T *de support* $\subset A \cup B$ *est de la forme* $T_1 + T_2$, *avec support* $(T_1) \subset A$, *support* $(T_2) \subset B$.

(En langage canonique : $\mathcal{E}'_{A \cup B} = \mathcal{E}'_A + \mathcal{E}'_B$).

Il est facile de voir que $2° \Rightarrow 1°$(supposer que A et B ne sont pas régulièrement séparés par $A \cap B$, et prendre une suite $(x_n , y_n) \subset A \times B$, telle que $d(x_p , y_p)$ tende très vite vers zéro, mais non $d(x_n , A \cap B)$, et considérer une distribution de la forme

$$\Sigma\, \alpha_p[\delta(x - x_p) - \delta(x - y_p)] \qquad ,$$

les α_n étant des scalaires convenables).

La démonstration du fait que $1° \Rightarrow 2°$ va être esquissée dans un instant. Soit Ω un ouvert $\subset \underset{\sim}{R}^n$, $b\Omega$ sa frontière ; on dira que $T \in \mathcal{D}'_\Omega$ est "prolongeable" (on notera : $T \in \mathcal{P}'_\Omega$) s'il existe $\overline{T} \in \mathcal{D}'_{\underset{\sim}{R}^n}$ tel que la restriction à Ω de $\overline{T}$ soit égale à T ; on dira d'autre part que $f \in \mathcal{E}_\Omega$ est "à croissance lente dans Ω" (on notera : $f \in \mathcal{O}_\Omega$) si, $\forall k \in \underset{\sim}{N}^n$, il existe $C_k > 0$ et $\rho_k > 0$ tels que $\forall x \in \Omega$, on ait $|D^k f(x)| \leqslant C_k\, d(x , b\Omega)^{-\rho_k}$.

Si Ω est borné (c'est le seul cas qui nous intéresse) le théorème de Hahn-Banach montre ceci : " $T \in \mathcal{P}'_\Omega$ " équivaut à la propriété suivante : $\exists C > 0$ et $m \in \underset{\sim}{N}$ tel que, $\forall \varphi \in \mathcal{D}_\Omega$, on ait $|< T , \varphi >| \leqslant C\|\varphi\|_m$ (on pose $\|\varphi\|_m = \sup\limits_{x \in \Omega} \sum\limits_{|k| \leqslant m} |D^k \varphi(x)|$).

De là résulte qu'on peut supposer $\overline{T}$ à support dans $\overline{\Omega}$ (prolonger la distribution égale à T sur Ω et 0 sur $\complement\overline{\Omega}$) ; de là résulte aussi (calcul élémentaire) que l'on a : $\mathcal{O}_\Omega\, \mathcal{P}'_\Omega \subset \mathcal{P}'_\Omega$.

Cela étant, pour démontrer que $2° \Rightarrow 1°$, on s'appuie sur le résultat suivant (non trivial) : supposons que A et B soient régulièrement séparés par $A \cap B = \Lambda$, et soit $\Omega = R^n - \Lambda$; il existe $f \in \mathcal{O}_\Omega$, $f = 1$ au voisinage de $A - \Lambda$, $f = 0$ au voisinage de $B - \Lambda$. Cela étant, soient T' la restriction de T à Ω , et $T'_1 = fT'$: comme $f \in \mathcal{O}_\Omega$ et $T' \in \mathcal{P}'_\Omega$, on a $T'_1 \in \mathcal{P}'_\Omega$; il suffit alors de prendre pour T_1 un prolongement de T'_1 , et de poser $T_2 = T - T_1$ pour obtenir la décomposition cherchée de T .

2. L'inégalité de Łojasiewicz.

THÉORÈME 2. - *Soient* Ω *un ouvert* $\subset \underset{\sim}{R}^n$, f *une fonction analytique dans* Ω , *et* V *l'ensemble des zéros de* f ; *pour tout compact* $K \subset \Omega$ *il existe* $C > 0$,

$\rho > 0$ tels qu'on ait, $\forall x \in K$: $|f(x)| \geqslant C d(x , V)^{\rho}$ (autrement dit : si $\Omega_1 \subset \Omega$ est un ouvert relativement compact dans Ω, on a : $\frac{1}{f} \in \mathcal{O}_{\Omega_1 - V}$).

On en déduit immédiatement le corollaire suivant :

COROLLAIRE. - Si E et F sont deux sous-ensembles analytiques de Ω, et si K et L sont deux compacts $\subset \Omega$, $(K \subset \overset{\circ}{L})$, $E \cap K$ et $F \cap K$ sont régulièrement séparés par $E \cap F \cap L$.

Le principe de la démonstration est le suivant :

a. Supposant vrai le théorème pour $n - 1$ variables, on montre, par récurrence sur k, la propriété suivante : si E est un sous-ensemble analytique de Ω, de dimension $k \leqslant n - 1$, il existe C' et ρ' tels que, $\forall x \in K \cap E$, on ait

$$|f(x)| \geqslant C' \, d(x , V \cap E)^{\rho'} .$$

(La question étant locale, on peut se placer au voisinage d'un point a ; et l'on peut supposer le germe E_a irréductible et $\not\subset V_a$; en utilisant un dévissage classique, on montre alors facilement qu'il existe un sous-ensemble analytique $W \subset E$ au voisinage de a, $\dim W_a < k$ tel qu'on ait sur E dans un voisinage de a :

$$|f(x)| \geqslant C'' \, d(x , W)^{\rho''} ;$$

comme l'inégalité analogue est vraie sur W, par hypothèse de récurrence, on en déduit immédiatement le résultat).

b. Pour démontrer le théorème, on se place au voisinage d'un point a, et l'on suppose que f est un polynôme distingué en $x_n - a_n$, de degré p. Soit W l'ensemble des zéros de $\frac{\partial f}{\partial x_n}$; comme (par l'hypothèse de récurrence, et (a)), l'inégalité cherchée est vraie sur W, il suffit de montrer que l'on a, dans un voisinage de a :

$$|f(x)| \geqslant C' \, d(x , V \cup W)^{\rho'} ;$$

or, si $d(x , V \cup W) > \delta$, f et $\frac{\partial f}{\partial x_n}$ ne s'annulent pas sur les segments joignant $(x_1 , \dots , x_n)$ à $(x_1 , \dots , x_{n-1} , x_n \pm \delta)$, et, sur l'un des deux segments, on a :

$$|f(x_1 , \dots , x_{n-1} , \xi)| \leqslant |f(x_1 , \dots , x_n)| .$$

On en déduit l'inégalité cherchée en remarquant que $\frac{\partial^p f}{\partial x_n^p} = p!$ s'obtient par une formule d'interpolation portant sur $(p + 1)$ points de ce segment (ou par toute autre astuce du même genre).

3. Le "théorème de division".

THÉORÈME 3. - Soient Ω un ouvert $\subset \mathbb{R}^n$ et f_{ij} $(1 \leq i \leq p,\ 1 \leq j \leq m)$ des fonctions analytiques réelles dans Ω. Soient T_j des distributions $\in \mathcal{D}'_\Omega$, vérifiant la condition suivante : au voisinage de tout point $a \in \Omega$, toute relation à coefficient analytique entre les F_j $(F_j = (f_{1j}, \dots, f_{pj})$ est une relation entre les T_j (i. e., si $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ analytiques au voisinage de a vérifient

$$\forall i \quad \Sigma\, \varphi_j\, f_{ij} = 0$$

au voisinage de a, elles vérifient : $\Sigma\, \varphi_j\, T_j = 0$ au voisinage de a).
Alors il existe $S_1, \dots, S_p \in \mathcal{D}'_\Omega$ telles qu'on ait

$$\forall j \quad \Sigma\, f_{ij}\, S_i = T_j \quad .$$

(En fait, en utilisant le "théorème A" de la théorie des faisceaux analytiques cohérents, il suffirait d'imposer les "conditions de compatibilité" pour les relations globales dans Ω entre les F_j).

Le théorème résulte aussitôt, par localisation et récurrence de l'énoncé suivant : supposons que les T_j soient portés au voisinage de 0 par un ensemble analytique E de dimension k, et qu'ils vérifient les "conditions de compatibilité", sauf sur F, ensemble analytique de dimension $< k$; alors il existe au voisinage de 0 des S_j portées par E, et F_1, ensemble analytique de dimension $< k$ tel qu'on ait, en dehors de F_1 : $\Sigma\, f_{ij}\, S_i = T_j$.
On peut supposer le germe E_0 irréductible (d'après le théorème 1 et le corollaire du théorème 2). Si $g_1, \dots, g_N$ sont des fonctions analytiques dont les germes en 0 engendrent l'idéal de E_0, on a certainement, pour un certain q : $g_\ell^q\, T_j = 0$; on voit alors qu'il existe un entier q' tel que si l'on rajoute aux équations proposées les conditions : $g_\ell^{q'}\, S_i = 0$, les "conditions de compatibilité" continuent d'être satisfaites en dehors de F (utiliser le fait que l'anneau des germes de fonctions analytiques est noethérien, et le théorème de cohérence d'Oka), on opère alors à peu près comme suit : ce fait permet en dehors d'un F_1 contenant F et la partie singulière de E (i. e. les points qui ne sont pas des points réguliers où E soit de dimension k) de chercher les S_i sous forme d'une somme finie de dérivées transversales d'ordre borné de distributions sur E, i. e. de se ramener à un système fini d'équations à coefficients fonctions analytiques sur E ;

en vidant encore les zéros d'un "déterminant principal" on est ramené à la méthode traditionnelle de résolution des équations linéaires (comme si l'on était sur un corps) : il reste à montrer que les distributions obtenues sont bien prolongeables, et qu'elles admettent des prolongements portés par E ; or, cela résulte facilement des résultats établis aux numéros 1 et 2.

4. Conséquences.

THÉORÈME 4. - f_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant p\ ,\ 1 \leqslant j \leqslant m)$ étant des fonctions analytiques dans $\Omega \subset R^n$, et φ_i des fonctions $\subset \mathcal{E}_\Omega$, pour qu'il existe des $\psi_j \in \mathcal{E}_\Omega$ telles qu'on ait $\varphi_i = \Sigma f_{ij}\ \psi_j$, il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée :

En tout point $a \in \Omega$, le développement de Taylor formel de $\Phi = (\varphi_1\ , \ldots , \varphi_p)$ est combinaison linéaire à coefficients séries formelles, des développements de Taylor des $F_j = (f_{1j}\ , \ldots , f_{pj})$.

D'après le théorème de Whitney sur les idéaux de fonctions différentiables, il suffit de démontrer que l'image de $[\mathcal{E}_\Omega]^p$ dans $[\mathcal{E}_\Omega]^m$ par l'application $(\psi_j) \to (\Sigma f_{ij}\ \psi_j)$ est fermée, i. e. que l'application en question est un homomorphisme. Il suffit donc par dualité, de démontrer que l'image de $[\mathcal{E}'_\Omega]^m$ dans $[\mathcal{E}'_\Omega]^p$ par l'application $(S_j) \to (\Sigma f_{ij}\ S_i)$ est fermée : or, cela résulte aussitôt du théorème 3 (qui s'applique visiblement aussi bien à $\mathcal{E}'_\Omega$ qu'à $\mathcal{D}'_\Omega$!)

COROLLAIRE (pour faire plaisir à SERRE !). - Au voisinage de tout point $a \in \Omega$, le sous-$\mathcal{E}_\Omega$-module de $[\mathcal{E}'_\Omega]^p$ formé des systèmes $(\psi_1\ , \ldots , \psi_p)$ vérifiant $\Sigma f_{ij}\ \psi_j = 0$ est $\mathcal{E}_\Omega$-engendré par les systèmes analytiques qu'il contient (résulte immédiatement du théorème 4 et du théorème de cohérence d'Oka).

Si l'on suppose maintenant que les $\Omega = R^n$, et que les f_{ij} sont des polynômes on déduit facilement (par transformation de Fourier) du théorème 3, le théorème suivant :

THÉORÈME 5. - D_{ij} étant des opérateurs différentiels à coefficients constants et T_j des distributions $\in \mathcal{S}'$, pour qu'il existe des $S_i \in \mathcal{S}'$ telles qu'on ait $\Sigma D_{ij}\ S_i = T_j$, il suffit (et il faut !) que toute relation à coefficients polynômes différentiels entre les $\Delta_j = (D_{1j}\ , \ldots , D_{pj})$ soit une relation entre les T_j.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HÖRMANDER (Lars). - On the division of distributions by polynomials, Arkiv för Mat., t. 3, 1958, p. 555-568.

[2] ŁOJASIEWICZ (S.). - Sur le problème de la division, Studia Mathematica, t. 18, 1959, p. 87-136.