

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

PAUL MALLIAVIN

Calcul symbolique dans quelques algèbres de Banach

Séminaire N. Bourbaki, 1960, exp. n° 197, p. 405-413

http://www.numdam.org/item?id=SB_1958-1960__5__405_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CALCUL SYMBOLIQUE DANS QUELQUES ALGÈBRES DE BANACH

par Paul MALLIAVIN

1. Calcul symbolique individuel.

Soit A une algèbre de Banach commutative, semi-simple, avec élément unité. A peut être identifié à une algèbre de fonctions continues définies sur un espace compact X , la norme d'un élément $a \in A$, $\|a\|$, vérifiant $|a(x)| \leq \|a\|$ pour tout $x \in X$. On suppose que $a(x) \in A$ entraîne $\overline{a(x)} \in A$ et on note par $A_{\mathbb{R}}$ la sous-algèbre des fonctions réelles de A . Si $a \in A$ on note par $sp(a)$ l'image de X par l'application $x \rightarrow a(x)$. On dit qu'une fonction définie sur $sp(a)$ opère sur a si $f(a(x)) \in A$. On note par O_a l'ensemble des fonctions qui opèrent sur a . O_a est une algèbre de Banach pour la norme $\|f\| = \|f(a(x))\|$. On note par O_a^* la plus petite sous-algèbre fermée de O_a contenant x .

Un théorème classique de WIENER-LÉVY-GELFAND affirme que l'ensemble des fonctions holomorphes au voisinage de $sp(a)$ soit $H(sp(a))$ vérifie

$$H(sp(a)) \subset O_a^* .$$

D'autre part si $C(sp(a))$ dénote les fonctions continues sur $sp(a)$ on a

$$O_a \subset C(sp(a)) .$$

Un énoncé de calcul symbolique individuel a pour but de préciser ces deux inclusions. On introduira des espaces intermédiaires entre H et C en utilisant des classes de fonctions différentiables. M_n étant une suite donnée ($0 < M_n \leq \infty$), ρ un nombre > 0 , Ω un ouvert de \mathbb{R} , on note par $\mathcal{C}_\rho(M_n, \Omega)$ les fonctions f définies sur Ω telles que

$$\sup_{n,x} \frac{|f^{(n)}(x)|}{M_n \rho^n} < \infty .$$

On note par $\mathcal{C}(M_n, \Omega) = \bigcup_{\rho} \mathcal{C}_\rho$. Enfin si F est une partie compacte, on note $\mathcal{C}(M_n, F) = \bigcup_{\Omega \supset F} \mathcal{C}(M_n, \Omega)$.

On dit qu'une classe est non quasi analytique si elle possède des partitions

de l'unité arbitrairement fines. La quasi analyticité de $\mathcal{C}(M_n, \Omega)$ ne dépend que des nombres M_n . On dit que la classe $\mathcal{C}(M_n, \Omega)$ est une algèbre inversible si $f, f_1 \in \mathcal{C}$ entraîne $ff_1 \in \mathcal{C}$ et si $f \in \mathcal{C}$, $f(x) \neq 0$ $x \in \bar{\Omega}$, entraîne $\frac{1}{f(x)} \in \mathcal{C}$. On peut montrer que $\mathcal{C}(M_n, \Omega)$ est une algèbre inversible si $\log \frac{M_n}{n!}$ est une suite croissante.

A un élément $a \in A_r$ nous allons associer la suite

$$(1.1) \quad M_n = \sup_{u>0} \frac{u^{n-2}}{\|e^{iua}\|} .$$

D'autre part si μ est une mesure sur X , $e^{iua(x)} d\mu(x)$ définit une forme linéaire sur A ; on notera par $\|e^{iua}\|'_\mu$ la norme de cette forme linéaire et par

$$(1.2) \quad M'_n = \sup_{u>0} \|e^{iua}\|'_\mu u^{n+2}$$

On a alors l'énoncé

Si M_n est non quasi analytique, alors

$$(1.3) \quad \mathcal{C}_1(M_n, \text{sp}(a)) \subset O_a^* .$$

Si M'_n est non quasi analytique, $M'_0 \neq 0$, ∞ et si $\mathcal{C}(M'_n, \Omega)$ est une algèbre inversible, alors E notant le support de l'image dm de μ par l'application $x \rightarrow a(x)$, $\overset{\circ}{E}$ est non vide et

$$(1.4) \quad O_a \subset \mathcal{C}(M'_n, F) \quad \text{pour tout } F \subset \overset{\circ}{E} .$$

La preuve résulte du calcul des transformées de Fourier des fonctions qui opèrent. Par exemple, pour (1.4), soit $f \in O_a$; posons :

$$g(u) = \int_{\mathbb{R}} f(\xi) e^{iu\xi} dm(\xi) = \int_X f(a(x)) e^{iua(x)} d\mu(x) ,$$

alors

$$|g(u)| < \|f(a)\| \|e^{iua}\|'_\mu$$

d'où

$$fdm \in \mathcal{C}(M'_n, \mathbb{R}) .$$

Prenant en particulier $f = 1$, on en déduit que $dm(\xi) = \varphi(\xi) d\xi$ où $\varphi \in \mathcal{C}(M'_n, \mathbb{R})$. Ceci entraîne $\varphi^{-1} \in \mathcal{C}(M'_n, \Omega)$ pour tout Ω tel que $\bar{\Omega} \subset \overset{\circ}{E}$ d'où $f = (f\varphi) \varphi^{-1} \in \mathcal{C}(M'_n, \Omega)$.

Les conditions de non quasi analyticité sur M_n peuvent être traduites en termes de croissance de la résolvante au voisinage du spectre.

Posons : $\gamma(\eta) = \sup_{\xi} \|(\xi + i\eta - a)^{-1}\|$; alors si

$$(1.5) \quad \int_0^1 \log |\log \gamma(\eta)| d\eta < \infty$$

la classe M_n définie en (1.1) est non quasi analytique.

Ceci s'obtient en remarquant que posant $q(y) =$ borne convexe $\log \|e^{iua}\|$, $q(y)$ est majoré en fonction de γ par l'expression

$$q(y) \leq \inf_{\eta > 0} [\eta y + \log \gamma(\eta)]$$

et que (1.5) implique la convergence de $\int_1^{\infty} q(t) t^{-2} dt$.

2. Exemples.

On a le résultat suivant dans la théorie spectrale (E. BISHOP [1]).

Soit D un opérateur borné, à spectre réel, dans un espace de Banach E dont la résolvante satisfait à (1.5). Alors pour tout recouvrement ouvert G_1, G_2, G_n de son spectre, on peut trouver des sous-espaces $E_1 \dots E_n$, de E , invariants par D dont la réunion engendre E , et tels que la restriction D_k de D à E_k ait son spectre contenu dans G_k .

En effet, d'après (1.3), il existe une classe non quasi analytique de fonctions opérant sur D . Choisissons dans cette classe une partition de l'unité φ_k subordonnée au recouvrement G_k . Posons $C_k = \varphi_k(D)$, $E_k = \overline{C_k E}$. Alors $DE_k = C_k DE \subset \overline{C_k E} = E_k$: les E_k sont invariants par D . Soit $\theta_k \in \mathcal{C}(M_n, \mathbb{R})$, $\theta_k(\xi) = 1$ si $\xi \in G_k$. Soit Ω l'intérieur de $\theta_k^{-1}(0)$, soit $\mu_0 \in \Omega$,

$$\Psi_{\mu_0}(\xi) = \theta_k(\xi)(\xi - \mu_0)^{-1},$$

alors $\Psi_{\mu_0} \in \mathcal{C}(M_n, \mathbb{R})$, par suite $\Psi_{\mu_0}(D)$ existe. Pour tout x de la forme $x = \varphi_k(D)y$, on a :

$$(D - \mu_0) \Psi_{\mu_0}(D) x = \theta_k(D) \varphi_k(D) y = \varphi_k(D) y = x.$$

Ainsi $\Psi_{\mu_0}(D)$ est l'inverse de $D_k - \mu_0$ sur un sous-espace dense de E_k , par suite sur E_k entier.

Nous allons donner un autre exemple, utilisant (1.4). Soit G un groupe abélien compact infini, $A_r(G)$ dénotera l'algèbre des fonctions réelles définies sur G dont la série de Fourier est absolument convergente. On a l'énoncé [7].

(2.2). - Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R} , M_n^* une classe non quasi analytique donnée, telle que $\log \frac{n}{n!}$ soit une suite croissante, alors il existe $a \in A_r(G)$ tel que

$$0_a \subset C(M_n^*, \Omega) .$$

En particulier, l'algèbre 0_a possèdera une structure d'idéaux primaires analogue à celle d'une algèbre de fonctions indéfiniment différentiables.

Soit μ la mesure de Haar sur G , alors $\|e^{iua}\|_{\mu}' = \sup$ des coefficients de Fourier de e^{iua} .

(2.3). - Posons $p(u) = \inf_n M_n^* u^{-n-2}$; d'après (1.4), il suffit de construire des éléments g'_k du dual de G et $\alpha_k, \alpha_k > 0, \sum \alpha_k < \infty$ tels que

$$a(g) = \sum \alpha_k \operatorname{Im} \langle g, g'_k \rangle$$

vérifie

$$(2.4) \quad \|e^{iua}\|_{\mu}' \leq p(u) .$$

On a le développement

$$\exp[iv \langle g, g'_k \rangle] = \sum_r J_{r,k}(v) \langle rg, g'_k \rangle$$

où les fonctions $J_{r,k}$ ne dépendent que de l'ordre de g'_k . Si on suppose les g'_k linéairement indépendants, on obtient en faisant le produit de ces identités

$$\|e^{iua}\|_{\mu}' = \sup_{\{r_k\}} \prod_{k=1}^{\infty} J_{r_k,k}(\alpha_k u) .$$

On vérifie aisément que $|J_{r,k}(v)| \leq 1$, et qu'il existe deux constantes $\gamma > 0, \rho < 0$ telles que, quel que soient r et k

$$|J_{r,k}(v)| < e^{\rho} \quad \text{si} \quad \gamma < |v| < 2\gamma$$

d'où

$$\log \|e^{iua}\|_{\mu}' < \rho [N(\gamma u^{-1}) - N(2\gamma u^{-1})]$$

où $N(t) =$ nombre de $\alpha_k > t$, ce qui démontre (2.4) pour un choix convenable de $N(t)$. De même, on obtient

$$(2.5) \quad \inf_{\|a\|=1} \|e^{iua}\|_{\mu} < e^{\rho u} .$$

S'il n'existe pas un système de g'_k linéairement indépendant sur G , on dit alors que les g'_k sont linéairement indépendants par rapport à la suite de constantes B_k si $\sum n_k g'_k = 0$, $|n_k| < B_k$ entraîne $n_k g'_k = 0$. On montre alors aisément qu'étant donné un groupe abélien infini G' et une suite B_k , on peut toujours trouver un système d'éléments de G' indépendants par rapport à la suite B_k . En choisissant de façon convenable les B_k , on obtient la même évaluation de (2.4), ce qui prouve (2.2).

On peut d'autre part, traduire sur $A(G)$ l'énoncé (1.3). On obtient une réciproque incomplète de (2.2) :

Soit $a \in A_{\mathbb{R}}(G)$ tel que $a(g) = \sum \alpha_k \operatorname{Re} \langle g, g'_k \rangle + \beta_k \operatorname{Im} \langle g, g'_k \rangle$. Supposons que $\sum |\alpha_k| |\log |\alpha_k|| + \sum |\beta_k| |\log |\beta_k|| < \infty$, alors O_a^* contient une classe non quasi analytique.

On notera par O les fonctions qui opèrent sur la boule unité de l'algèbre,

$$\bigcap_{\|a\| \leq 1} O_a = O .$$

Dans le cas particulier où $A = A(G)$, (2.2) permet de dire que O est l'intersection de toute une famille de classes non quasi analytiques, d'où on peut déduire que

$$O \subset \mathcal{C}((n \log n)^n, \Omega) .$$

Mais ce résultat est insuffisant ; pour conclure que O ne contient que les fonctions analytiques, il faut utiliser un principe de majoration uniforme, obtenu par KATZNELSON, d'abord en utilisant le principe de BAIRE [5], puis dans un cadre plus général [6].

3. Le théorème de borne uniforme de Katznelson.

$A_{\mathbb{R}}$ notant toujours une algèbre de fonctions continues réelles sur un compact X , on supposera que $A_{\mathbb{R}}$ est régulière, c'est-à-dire possède des partitions arbitrairement fines de l'unité.

Soit $f \in O$, $x_0 \in X$, on dit que f est localement borné en x_0 s'il existe un voisinage $V(x_0)$ et deux nombres $\varepsilon > 0$, $K < \infty$, tels que $a \in A_{\mathbb{R}}$, support de $a \subset V(x_0)$, $\|a\| < \varepsilon$ entraîne $\|f(a(x))\| < K$. Appelant irrégulier, un point au voisinage duquel f n'est pas localement borné, on a l'énoncé suivant.

(3.1) THÉORÈME de Katznelson [6]. - L'ensemble des points irréguliers est fini.

Supposons $f(0) = 0$, (on ajoute éventuellement à f une constante). Soit $x_k \in X$ une suite infinie de points irréguliers. Soit V_k une suite de voisinage de x_k et $b_k \in A_r$ tels que $b_k = 1$ sur V_k , $b_k b_{k'} = 0$ si $k \neq k'$. f étant non borné au voisinage de x_k , on peut trouver a_k dont le support soit contenu dans V_k et tel que

$$\|a_k\| < k^{-2}, \quad \|f(a_k)\| > k \|b_k\| \quad .$$

Posons $a = \sum a_k$. Alors $a \in A_r$,

$$f(a) = \sum f(a_k)$$

et

$$f(a) b_k = f(a_k)$$

de plus

$$\|f(a) b_k\| < \|f(a)\| \|b_k\|$$

d'où

$$\|f(a)\| > k$$

quel que soit k , contradiction qui prouve le théorème.

D'autre part, une technique de partition de l'unité permet de montrer que si l'ensemble des points irréguliers est vide, f est borné à l'origine c'est-à-dire qu'il existe $\varepsilon > 0$, $K < \infty$ tel que

$$(3.2) \quad a \in A_r, \quad \|a\| < \varepsilon \quad \text{entraîne} \quad \|f(a)\| < K \quad .$$

Un exemple d'application du théorème de Katznelson ([6], p. 103). - Soit A_r une algèbre telle que $a \in A_r$, $a(x) \geq 0$ entraîne $\sqrt{a(x)} \in A_r$. Soit X^* une partie compacte de X ne rencontrant pas l'ensemble fini des points irréguliers. Alors notons par A^* l'algèbre des restrictions à X des fonctions de A , par $\|\cdot\|^*$ la norme de A^* ; il existe $\varepsilon > 0$, et K tel que

$$\|a\|^* < \varepsilon \quad \text{entraîne} \quad \|\sqrt{a}\|^* < K$$

ce qui se lit

$$\|b^2\|^* \geq K^{-1} \varepsilon^{1/2} \|b\|^*{}^2 \quad .$$

Par suite $(\lim_n \|b^n\|^*{}^{1/n}) \geq K' \|b\|^*$; d'après l'expression de la norme spectrale

de Gelfand, la norme $\| \cdot \|^{*}$ est équivalente avec celle des fonctions continues sur X^{*} : A^{*} s'identifie à l'algèbre des fonctions continues sur X^{*} . KATZ-NELSON a réussi récemment à montrer que dans ce cas, les points irréguliers forment toujours un ensemble vide et a obtenu le résultat ci-dessus avec $X^{*} = X$ qui s'énonce comme suit.

(3.3) THÉORÈME (KATZNELSON). - Soit A_r une algèbre de Banach de fonctions réelles sur un espace compact X , dense dans $C(X)$. Supposons que $a \in A_r$, $a(x) \geq 0$, entraîne $\sqrt{a(x)} \in A_r$, alors A_r est l'algèbre de toutes les fonctions continues sur X .

4. Calcul symbolique dans $A(G)$. Théorème de Kahane-Katznelson [5].

Soit $A = A(G)$, $f \in 0$. Alors si g_0 est un point irrégulier pour f , $g + g_0$ sera un point irrégulier puisque les translations commutent avec le calcul symbolique. Par suite, s'il existait un seul point irrégulier, tous les points de G seraient irréguliers. (3.1) montre alors que l'ensemble des points irréguliers est vide, donc que (3.2) est satisfait.

THÉORÈME (KAHANE-KATZNELSON). - Si $f \in 0$, alors f est holomorphe au voisinage du segment $[-1 + \epsilon, 1 - \epsilon]$ quel que soit $\epsilon > 0$.

Montrons l'analyticité de f au voisinage de zéro. Pour tout a tel que $\|a\| < 1$ et pour tout λ réel

$$\|\sin(a + \lambda)\| < \|\sin a\| + \|\cos a\| < e.$$

Par suite, si on prend $\alpha > 0$ tel que $e\alpha < \epsilon$ et si on utilise (3.2) on obtient, posant $f_1(\xi) = f(\alpha \sin \xi)$, $\|f_1(a + \lambda)\| < K$ quels que soient a , $\|a\| < 1$ et λ .

f_1 est une fonction périodique de période 2π . p étant un entier fixé, posons

$$s_{n,p}(a) = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} f_1\left(a + \frac{2r\pi}{n}\right) \exp\left(-\frac{2\pi i r p}{n}\right)$$

(4.1) Alors $\|s_{n,p}(a)\| < K$ pour tout n et p .

D'autre part, quel que soit $g \in G$

$$(4.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n,p}(a(g)) = \beta_p e^{i p a(g)}$$

où β_p désigne le coefficient de Fourier d'ordre p de $f_1(\xi)$.

Il résulte de (4.1) et de (4.2) que $s_{n,p}(a(g))$ converge faiblement dans

$L_1(G')$ vers un élément b .

Alors, on a d'après (4.1)

$$\|b\| < K$$

d'après (4.2)

$$b(g) = \beta_p e^{ipa(g)}$$

d'où

$$|\beta_p| < K (\|e^{ipa}\|)^{-1} .$$

D'autre part

$$1 = \|e^{iua} e^{-iua}\|_{\mu}' < \|e^{iua}\| \|e^{-iua}\|_{\mu}'$$

d'où

$$|\beta_p| < K \|e^{ipa}\|_{\mu}' .$$

Ceci étant vrai pour tout a tel que $\|a\| < 1$ on obtient en appliquant (2.5)

$$(4.3) \quad |\beta_p| < e^{p|p|}$$

d'où l'analyticité de f_1 , dont on déduit celle de f , d'où le théorème.

Remarquons que si l'on peut trouver une suite $\xi_n \rightarrow \omega$ telle que (3.2) soit vérifié pour une suite convenable $K_n \rightarrow \omega$, alors on pourra prendre α arbitrairement grand ce qui permet de déduire en utilisant (4.3) que f est entière, d'où le corollaire.

COROLLAIRE. - Si f opère sur $A(G)$ et est bornée sur toute boule, alors f est entière.

5. HELSON et KAHANE ont obtenu ([3]) l'équivalent du théorème 4, lorsque $G = Z$. Dans [2], on trouve un exposé d'ensemble de la question.

Pour les algèbres de mesures, KAHANE et RUDIN ont obtenu un résultat plus puissant ([2] et [4]) :

Soit $M_r(G)$ l'algèbre pour le produit de composition des mesures portées par un groupe abélien compact infini dont les transformées de Fourier sont réelles. Alors si f opère sur $M_r(G)$, f est entière.

Si $D_r(G)$ dénote la partie de $M_r(G)$ constituée par les mesures sommes de masses de Dirac, f opère sur $D_r(G)$, ce qui est équivalent de dire que f opère sur $A_r(G_1)$, où G_1 désigne le groupe dual du groupe G muni de la topologie discrète. Par une construction délicate, du type de Szidon, ([2],

pages 152-154), on peut montrer que, si f opère sur $M_r(G)$, f est bornée sur toute boule. Ceci entraîne que f est bornée sur toute boule de $A_r(G_1)$ et (4.4) donne la conclusion.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BISHOP (Errett). - A duality theorem for an arbitrary operator, Pacific J. of Math., t. 9, 1959, p. 389-397.
- [2] HELSON (Henry), KAHANE (Jean-Pierre), KATZNELSON (Yitzhak) and RUDIN (Walter). - The functions which operate on Fourier transforms, Acta math., t. 102, 1959, p. 135-157.
- [3] HELSON (Henry) et KAHANE (Jean-Pierre). - Sur les fonctions opérant dans les algèbres de transformées de Fourier de suites ou de fonctions sommables, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 247, 1958, p. 626-628.
- [4] KAHANE (Jean-Pierre) et RUDIN (Walter). - Caractérisation des fonctions qui opèrent sur les coefficients de Fourier-Stieljes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 247, 1958, p. 773-775.
- [5] KATZNELSON (Yitzhak). - Sur les fonctions opérant dans l'algèbre des séries de Fourier absolument convergentes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 247, 1958, p. 404-406.
- [6] KATZNELSON (Yitzhak). - Sur le calcul symbolique dans quelques algèbres de Banach, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., t. 76, 1959, p. 83-123.
- [7] MALLIAVIN (Paul). - Calcul symbolique et sous-algèbres de $L_1(G)$, Bull. Soc. math. France, t. 87, 1959, p. 181-186.