

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

RENÉ THOM

Sur les variétés-bords

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. n° 89, p. 357-364

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__357_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LES VARIÉTÉS-BORDS

par René THOM

Cet exposé reprend les notations d'un exposé précédent [4].

1. Définitions.

Un espace X^{n+1} est une variété à bord, de bord V^n , si :

1° le complémentaire $M^{n+1} - V^n$ est une variété ouverte paracompacte de dimension $n + 1$;

2° le sous-ensemble fermé V^n est une variété (compacte) de dimension n ;

3° en tout point x de V^n , il existe une carte locale (compatible avec les structures différentiables données sur $M^{n+1} - V^n$ et V^n), dans laquelle l'image de M^{n+1} est un demi-espace R^{n+1} limité par un R^n image de V^n .

Si M^{n+1} est orientable, le bord V^n de M^{n+1} est également orientable et toute orientation de M^{n+1} induit canoniquement une orientation de V^n (grâce à l'opérateur bord en homologie $\partial : H_{n+1}(M^{n+1}, V^n) \rightarrow H_n(V^n)$).

Soit V^n une variété, non nécessairement connexe, mais orientable et orientée. S'il existe une variété à bord compacte M^{n+1} , de bord V^n , et si, pour une orientation convenable de M^{n+1} , on a $\partial M^{n+1} = V^n$, on dira que V^n est une variété-bord (sans condition d'orientabilité, on dira que V^n est une variété-bord mod 2).

2. Enoncé du problème.

Une variété V^n donnée est-elle une variété-bord ? On sait depuis longtemps que seules peuvent être des bords mod 2, les variétés dont la caractéristique d'Euler-Poincaré est paire. On va donner ici des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une variété soit un bord (problème soulevé par N. STEENROD dans [1]) ; dans ce but, on va généraliser quelque peu la question.

Supposons qu'une même variété V^n soit le bord de deux variétés à bord : M_1 et M_2 ; par réunion de M_1 et M_2 , et identification de leur bord commun V^n , on obtient un espace P qu'on peut munir d'une structure de variété différentiable de dimension $n + 1$: la structure est canoniquement définie sur l'ouvert $P - V^n$; sur V^n elle-même, elle dépend de la façon dont on prolonge les cartes de V^n

sur chacune des variétés à bord M_1 et M_2 (nous laissons ici de côté la question de savoir si les diverses structures différentiables qu'on peut définir ainsi sur P sont isomorphes).

Soient deux variétés données V^n et V'^n ; si la variété $V' - V$, réunion de V' et de la variété V munie de l'orientation opposée à l'orientation donnée est une variété-bord, on dira que les variétés V et V' sont cobordantes (notation $V \simeq V'$). Si deux variétés V et V'' sont cobordantes à une même troisième V' , elles sont cobordantes entre elles (effectuer la construction d'identification décrite plus haut). L'ensemble des classes d'équivalence ainsi défini entre variétés orientées de dimension n sera noté Ω^n . La réunion de deux variétés, représentant deux classes, définit sur Ω^n une loi d'addition qui fait de Ω^n un groupe abélien ; la classe nulle est la classe des variétés-bords. Si W^r désigne une variété de dimension arbitraire r , la relation $V \simeq V'$ entraîne sur les produits $V \times W^r \simeq V' \times W^r$; le produit topologique définit ainsi sur la somme directe des Ω^n une multiplication anticommutative, distributive par rapport à l'addition ; on notera Ω l'anneau gradué ainsi défini.

Sans condition d'orientabilité, on définira de même : deux variétés cobordantes mod 2 (notation $V^k \simeq V'^k \text{ mod } 2$), le groupe $\mathcal{C}^k$ des classes mod 2, et l'anneau $\mathcal{C}$ somme directe des $\mathcal{C}^k$; tout élément de $\mathcal{C}$ est d'ordre 2 (considérer le produit $V^k \times I$).

3. Invariants numériques des variétés cobordantes.

Rappelons qu'on appelle "nombre caractéristique" d'une variété, la valeur prise par une classe caractéristique sur le cycle fondamental de la variété ; ils sont de deux espèces :

i. Pour V^n orientée, et $n \equiv 0 \text{ mod } 4$, on a des nombre caractéristiques de Pontrjagin, donnés par les classes caractéristiques de Pontrjagin $\pi(P^{4r})$ de la structure des vecteurs tangents ; ce sont des entiers.

ii. Sans condition d'orientabilité, les classes de Stiefel-Whitney donnent des nombres caractéristiques $\langle \pi(w_1), v_n \rangle$ qui sont des entiers mod 2.

PONTRJAGIN a démontré [2] que tous les nombres caractéristiques d'une variété-bord sont nuls ; par suite : les nombre caractéristiques (définis par la même classe) de deux variétés cobordantes sont égaux.

Chaque nombre caractéristique de Pontrjagin (resp. de Stiefel-Whitney) définit un homomorphisme de Ω^k (resp. $\mathcal{C}^k$) (dans $\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{Z}_2$). Mais seuls les

nombres caractéristiques associés aux classes de dimension maximum $P^{4k}(V^{4k})$ resp. $W_n(V^n)$ sont des homomorphismes de la structure multiplicative de Ω (resp. $\mathcal{U}$). Rappelons que $W_n(V^n)$ n'est autre que la caractéristique d'Euler-Poincaré, réduite mod 2.

Pour toute variété V^{4k} , orientée de dim $4k$, désignons par $\tau(V^{4k})$ l'excès du nombre des carrés positifs sur celui des carrés négatifs de la forme quadratique définie par le cup-produit sur $H^{2k}(V^{4k}; \mathbb{R})$; il résulte des théorèmes de dualité pour variétés à bord (dualité dite de Poncaré-Lefschetz), que $\tau(V^{4k}) = 0$ si V est un bord. Par suite $\tau(V) = \tau(V')$ si $V \simeq V'$; comme de plus $\tau(V \times W) = \tau(V) \times \tau(W)$ τ définit un homomorphisme de l'anneau Ω sur $\mathbb{Z}$.

4. Sous-variétés L-équivalentes.

Deux sous-variétés (orientées) W_0^k, W_1^k d'une variété V^n seront dites L-équivalentes, si, dans le produit $V^n \times I$, on peut trouver une sous-variété à bord, X^{k+1} , dont le bord est formé seulement de W^k plongée dans $(V^n, 0)$ et de W_1^k plongée dans $(V^n, 1)$, avec les conditions naturelles de compatibilité pour les orientations ($\partial X^{k+1} = W_1^k - W_0^k$). Ceci définit encore une relation d'équivalence entre sous-variétés orientées de dim k et on notera $L_k(V^n)$ l'ensemble de ces classes. Même définition sans condition d'orientation (notation $L_k(V^n; \mathbb{Z}_2)$).

Deux sous-variétés L-équivalentes sont à la fois cobordantes et homologues; il existe par suite une application canonique J de $L_k(V^n)$ dans le groupe d'homologie $H_k(V^n)$. On peut se demander s'il est possible de donner à $L_k(V^n)$ une structure de groupe abélien, de telle façon que J soit un homomorphisme. Il en est ainsi pour $k < n/2 - 1$: l'addition dans $L_k(V^n)$ est définie par la réunion des représentants de deux classes, qu'on peut toujours, alors, supposer disjoints.

Ici encore les nombres caractéristiques, définis à partir des classes caractéristiques soit de la structure tangente (nombres caractéristiques tangents), soit de la structure normale (nombres caractéristiques normaux) sont des invariants des L-classes.

Revenons maintenant à un théorème d'approximation énoncé dans l'exposé précédent [4]: soit f une application d'une variété V^n dans une variété M^p contenant une sous-variété M^{p-q} ; si f satisfait à une condition de rang maximum sur l'espace des vecteurs transverses à N^{p-q} dans M^p , alors l'image réciproque $f^{-1}(N^{p-q})$ est une sous-variété W^{n-q} , et on peut toujours se ramener à ce cas par une régularisation convenable. Supposons qu'on ait deux applications f, g de V^n dans

M^p , régulières (au sens précédent) sur la sous-variété N^{p-q} de M^p ; la notion de L-équivalence est justifiée par le théorème :

THÉOREME 1. - Si les applications f, g de V^n dans M^p , "régulières" sur N^{p-q} sont homotopes, alors les sous-variétés $f^{-1}(N^{p-q})$ sont L-équivalentes dans V^n .

En particulier, l'image réciproque "régulière" de toute sous-variété, par une application f inessentielle, est une variété-bord.

(Il suffit évidemment de régulariser l'application $F : V \times I \rightarrow M^p$ qui définit l'homotopie entre f et g).

On a montré dans [4] comment, à toute sous-variété W^{n-k} d'une variété V^n , on peut attacher une application $f : V^n \rightarrow M(SO(k))$, dont la classe d'homotopie est bien déterminée; réciproquement, toute classe d'applications $g : V \rightarrow M(SO(k))$ est la classe canoniquement attachée à une sous-variété W^{n-k} de V^n . On montre alors facilement que, si deux sous-variétés W^{n-k}, W'^{n-k} de V^n sont L-équivalentes, elles définissent des applications $f, f' : V^n \rightarrow M(SO(k))$ qui sont homotopes. (Il suffit de construire l'application canoniquement attachée à la sous-variété X^{n-k+1} dans $V^n \times I$, telle que $\partial X = W' - W$). On montre ainsi :

THÉOREME 2. - L'ensemble $L_{n-k}(V^n)$ (resp. $L_{n-k}(V^n; Z_2)$) des L-classes de V^n pour la dimension $n - k$ s'identifie à l'ensemble des classes d'applications de V^n dans $M(SO(k))$, resp. $M(O(k))$.

On notera ces ensembles de classes d'applications $f : V^n \rightarrow M(SO(k))$, resp. $M(O(k))$, par $C^k(V^n)$, resp. $C^k(V^n; Z_2)$. Pour $k > n/2 + 1$, $C^k(V^n)$ peut être munie d'une structure de groupe (abélien) de cohomotopie, car l'espace $M(SO(k))$ est asphérique pour les dimensions $< k$. On vérifie alors que le théorème 2 définit un isomorphisme du groupe $L_{n-k}(V^n)$ sur le groupe de cohomotopie $C^k(V^n)$ (même énoncé mod 2).

Le théorème 2 permet, dans une assez large mesure, de déterminer $L_{n-k}(V^n)$; comme les complexes $M(SO(1))$ et $M(SO(2))$ s'identifient respectivement à $K(Z, 1)$ et $K(Z, 2)$, les ensembles L_{n-1} et L_{n-2} de V^n s'identifient aux groupes d'homologie $H_{n-1}(V^n; Z)$ et $H_{n-2}(V^n; Z)$: Deux sous-variétés de dimension $n - 2$ de V^n sont L-équivalentes (donc cobordantes), dès qu'elles sont homologues. Il en va de même pour les sous-variétés de dimension < 4 dans toute variété, ainsi que pour les sous-variétés du groupe $H_{n-1}(V^n; Z_2)$. Mais l'application la plus intéressante s'obtient dans le cas où V^n est la sphère S^n . Les ensembles

$L_{n-k}(S^n)$ s'identifient d'après le théorème 2, aux ensembles de classes d'applications de S^n dans $M(SO(k))$, c'est-à-dire aux groupes d'homotopie $\pi_n(M(SO(k)))$; ils sont donc, pour $k > 2$, en général non triviaux; de même

$$L_{n-k}(S^n; Z_2) \simeq \pi_n(M(O(k)))$$

est en général non trivial pour $k > 1$. Pour $k > n/2 + 1$, on voit immédiatement que les groupes $L_{n-k}(S^n)$, resp. $L_{n-k}(S^n; Z_2)$ s'identifient aux groupes Ω^{n-k} et $\mathcal{U}^{n-k}$ respectivement. Cela provient du fait connu que toute variété W^r de dimension r peut être plongée dans S^n pour $n > 2r + 2$, et qu'alors deux plongements quelconques de W^r sont "isotopes", donc L -équivalents. En remarquant que la structure de groupe de cohomotopie de l'ensemble des applications $f: S^n \rightarrow M(SO(k))$ est isomorphe à celle du groupe d'homotopie correspondant (résultat classique en la théorie), nous obtenons :

THÉOREME 3. - Les groupes Ω^i , resp. $\mathcal{U}^i$ sont isomorphes aux groupes d'homotopie $\pi_{k+i}(M(SO(k)))$, resp. $\pi_{k+i}(M(O(k)))$ ($k > i + 1$).

Ceci implique que les groupes d'homotopie $\pi_{k+i}(M(SO(k)))$ (resp. $M(O(k)))$ sont indépendants de k pour $i < k - 1$. On peut vérifier directement, en effet, que les complexes $M(SO(k))$ et $M(O(k))$ vérifient, tout comme les sphères, un théorème de "suspension" à la Freudenthal.

On est donc ramené à calculer les groupes d'homotopie d'un complexe espace; on applique dans ce but la méthode standard due à H. CARTAN et J.-P. SERRE : former, par des fibrations successives et superposées de complexes d'Eilenberg-MacLane, un espace homotopiquement équivalent à l'espace donné. La méthode aboutit dans le cas mod 2; dans le cas de $M(SO(k))$ au contraire, on ne peut guère aller au delà des petites dimensions, en raison de sérieuses difficultés algébriques.

5. Cas mod 2.

Le complexe équivalent à $M(O(k))$ est, pour les dimensions $2k$, fait miraculeux, un produit de complexes d'Eilenberg-MacLane :

$$Y = K(Z_2, k) \times K(Z_2, k+2) \times \dots \times (K(Z_2, k+h))^{d(h)} \times \dots \times (K(Z_2, 2k))^{d(k)}$$

où $d(h)$ désigne le nombre de partitions de l'entier $h \leq k$ en entiers dont aucun n'est de la forme $2^m - 1$.

Cette décomposition montre de suite que le groupe $\mathcal{U}^h \simeq \pi_{k+h}(M(O(k)))$ est la somme directe de $d(h)$ groupes isomorphes à Z_2 ; de plus, on peut caractériser cohomologiquement chacun des facteurs de Y comme suit :

Soit $\sum_i W_i t^i$ le polynôme de Stiefel-Whitney de la structure fibrée des vecteurs normaux à la variété W^r (pour une immersion de W^r dans un espace euclidien R^m où $m > 2r$) ; désignons par u_j ($j = 1, 2, \dots, r$) les "racines symboliques" de ce polynôme. Les $d(r)$ facteurs de Y de dimension $k + r$ ($r < k$) correspondent biunivoquement aux $d(r)$ nombres caractéristiques normaux

$$X_\omega = \sum (u_1)^{a_1} (u_2)^{a_2} \dots (u_m)^{a_m}$$

où l'ensemble $\omega = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ parcourt les $d(r)$ partitions de l'entier r en entiers a_j dont aucun n'est de la forme $2^q - 1$.

Autrement dit : toute application $f : S^{r+k} \rightarrow M(0(k))$, qui est homologue mod 2 à 0, est inessentielle ; si l'application f est essentielle, l'un au moins des nombres X_ω de V^r n'est pas nul. Ceci donne :

THÉOREME 4. - Les nombres caractéristiques normaux (ou tangents) de Stiefel-Whitney d'une variété V^r sont des fonctions linéaires indépendantes de $d(r)$ d'entre eux. S'ils sont nuls, la variété est une variété-bord (mod 2).

De là, on déduit la structure multiplicative de l'anneau $\mathcal{U}$:

THÉOREME 5. - $\mathcal{U}$ est isomorphe à une algèbre de polynômes sur le corps Z_2 admettant un générateur U^1 pour toute dimension i telle que $i + 1$ ne soit pas une puissance de 2.

On montre facilement qu'on peut faire choix, pour les U^i de dimension paire, de la classe de l'espace projectif réel $P_1(R)$; une définition géométrique des U^i pour i impair n'est pas connue. Le générateur de U^5 est la variété de Wu Wen-Tsun, variété fibrée sur S^1 en plans projectifs complexes [5] .

6. Cas des petites dimensions.

$\mathcal{U}^2$ est isomorphe à Z_2 , engendré par U^2 classe de $P_2(R)$.

$\mathcal{U}^3$ est nul : toute variété de dimensions 3 est un bord mod 2 .

$\mathcal{U}^4$ est $Z_2 + Z_2$, engendré par U^4 classe de $P_4(R)$, et $(U_2)^2$ classe de $(P_2(R))^2$; on notera que le plan projectif complexe $P_2(C)$ est cobordant mod 2 à $(P_2(R))^2$.

$\mathcal{U}^5 = Z_2$ est engendré par U^5 classe de la variété de Wu Wen-Tsun

$\mathcal{U}^6 = Z_2 + Z_2 + Z_2$, engendré par U^6, U^4, U^2 et $(U^2)^3$

$\mathcal{U}^7 = Z_2$ engendré par U^5, U^2 .

7. Les groupes Ω^i .

La détermination des groupes d'homotopie de $M(SO(k))$ n'a pas été poussée au-delà de la dimension $k + 7$; elle donne :

THÉOREME 6. - Pour les petites dimensions, les groupes Ω^i sont :

$$\Omega^1 = \Omega^2 = \Omega^3 = 0 ; \quad \Omega^4 = \mathbb{Z} ; \quad \Omega^5 = \mathbb{Z}_2 ; \quad \Omega^6 = \Omega^7 = 0$$

Le générateur de Ω^4 est la classe du plan projectif complexe $P_2(\mathbb{C})$ comme $\simeq$ et la classe de Pontrjagin P^4 définissent tous deux des homomorphismes de Ω^4 dans $\mathbb{Z}$, on en déduit :

COROLLAIRE 7. - Pour toute variété orientée V^4 de dimension 4, le nombre caractéristique $P^4(V^4)$ est égal à 3 $\simeq(V^4)$ (c'est donc un invariant topologique).

Le générateur de Ω^5 est la classe de la variété de Wu Wen-Tsun.

On obtient de précieux renseignements sur les groupes Ω^i en appliquant au complexe $M(SO(k))$ la $\mathbb{C}$ -théorie de J.-P. SERRE [2] ; $\mathbb{C}$ désignant la classe des groupes finis, on obtient :

THÉOREME 8. - Tous les groupes Ω^i sont finis pour $i \not\equiv 0 \pmod{4}$; pour $i \equiv 0 \pmod{4}$, le rang de $\Omega^i \otimes \mathbb{Q}$ est égal au i -ième nombre de Betti de la grassmannienne $b_i(\hat{G}_k)$.

Autrement dit : étant donné un système (c_j) d'entiers en nombre égal à $b_i(\hat{G}_k)$; il existe toujours un entier non nul N tel que les produits $N \cdot c_j$ forment l'ensemble des nombres caractéristiques (tangents ou normaux) de Pontrjagin d'une variété V^i .

COROLLAIRE 9. - Si tous les nombres de Pontrjagin d'une variété V sont nuls, il existe un entier non nul N tel que la variété $N \cdot V$ soit une variété-bord.

Ce corollaire permet la détermination de la structure multiplicative de l'anneau $\Omega \otimes \mathbb{Q}$. On obtient :

THÉOREME 10. - L'anneau $\Omega \otimes \mathbb{Q}$ est isomorphe à une algèbre de polynômes admettant un générateur Y^{4k} pour toute dimension $\equiv 0 \pmod{4}$.

On peut prendre pour générateur Y^{4k} la classe de l'espace projectif de dimension complexe paire $P_{2k}(\mathbb{C})$.

REMARQUE. - Désignons par Ω_T l'idéal de Ω formé des éléments d'ordre fini. On peut se demander si les classes des espaces $P_{2k}(C)$ et leurs produits constituent un système de générateurs du $\mathbb{Z}$ -module Ω/Ω_T . Comme me l'a signalé F. HIRZEBRUCH, il n'en est rien : pour que la propriété précédente soit vraie, pour $\Omega^{4k}/\Omega_T^{4k}$, il est nécessaire que l'entier $2k + 1$ vérifie le théorème de Fermat : ce qui implique que $2k + 1$ est, soit premier, soit d'une forme arithmétique très particulière ⁽¹⁾. (La propriété est vraie pour $k = 1, 2, 3$ et fausse pour $k = 4$).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] EILENBERG (Samuel). - On the problems of topology, *Annals of Math.*, Series 2, t. 50, 1949, p. 247-260.
- [2] PONTRJAGIN (L.). - Kharakterističeskie cikly differenciruemých mnogoobrazií, *Recueil math. Soc. math. Moscou (Mat. Sbornik)*, t. 63, 1947, p. 233-284.
- [3] SERRE (Jean-Pierre). - Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens, *Annals of Math.*, Series 2, t. 58, 1953, p. 258-294.
- [4] THOM (René). - Sous-variétés et classes d'homologie des variétés différentiables, *Séminaire Bourbaki*, t. 2, 1952/53.
- [5] WU WEN-TSUN. - Classes caractéristiques et i-carrés d'une variété, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 230, 1950, p. 508-511.

ADDITIF

On trouvera une démonstration complète des résultats, présentés dans cet exposé, dans l'article suivant :

- [6] THOM (René). - Quelques propriétés globales des variétés différentiables, *Comment. Math. Helv.*, t. 28, 1954, p. 17-86.

[Février 1958]

⁽¹⁾ $2k + 1$ est le produit d'au moins trois nombres premiers $p_1 \dots p_r$ tels que $p_i - 1$ divise $2k$; le plus petit des entiers non premiers vérifiant la propriété de Fermat est le produit 3.11.17.