

# SÉMINAIRE N. BOURBAKI

JEAN-PIERRE SERRE

## Travaux d'Hirzebruch sur la topologie des variétés

*Séminaire N. Bourbaki*, 1954, exp. n° 88, p. 351-356

<[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1951-1954\\_\\_2\\_\\_351\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__351_0)>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

TRAVAUX D'HIRZEBRUCH SUR LA TOPOLOGIE DES VARIÉTÉS

par Jean-Pierre SERRE

1. Le formalisme algébrique.

Soit  $A$  un anneau commutatif à élément unité, et  $Q(x) = \sum \gamma_i \cdot x^i$  une série formelle,  $\gamma_i \in A$ ,  $\gamma_0 = 1$  (toutes les séries formelles considérées vérifieront cette dernière condition). Si  $C(x) = \sum c_i \cdot x^i$  est une autre série formelle, on va lui associer la série :

$$(1) \quad K_Q(C) = \sum_{j=0}^{\infty} K_j(c_1, \dots, c_j) \cdot x^j,$$

obtenue de la façon suivante :

Pour tout entier  $m$ , on décompose formellement  $1 + c_1 x + \dots + c_m x^m$  en produit  $(1 + \alpha_1 x) \dots (1 + \alpha_m x)$  et on considère le produit  $Q(\alpha_1 x) \dots Q(\alpha_m x)$ ; ce produit est une série formelle en  $x$ , dont les coefficients sont symétriques en les  $\alpha_i$ , donc peuvent être écrits comme polynômes en les fonctions symétriques élémentaires  $c_1, \dots, c_m$  :

$$Q(\alpha_1 x) \dots Q(\alpha_m x) = \sum_{j=0}^{\infty} K_{j,m}(c_1, \dots, c_m) \cdot x^j.$$

On voit tout de suite que les  $K_{j,m}$  sont indépendants de  $m$  dès que  $m \geq j$ , et on les note  $K_j$ . La série (1) est donc bien définie.

**PROPRIÉTÉS des  $K_j$ .** - Ce sont des polynômes isobares de poids  $j$  en les  $c_i$ , chaque  $c_i$  étant affecté du poids  $i$ . En particulier  $K_j$  ne contient que  $c_1, \dots, c_j$ .

L'opération  $C \longrightarrow K_Q(C)$  est multiplicative, i.e.  $K_Q(C \cdot D) = K_Q(C) \cdot K_Q(D)$ , si  $C$  et  $D$  sont deux séries formelles (commençant par 1, comme toujours).

La connaissance de  $K_Q$  détermine  $Q$  car  $K_Q(1 + x) = Q(x)$ .

**EXEMPLES.**

1.1. -  $Q(x) = 1 + x$  donne  $K_j = c_j$ .

1.2. -  $Q(x) = \frac{x}{1 - e^{-x}}$  donne pour  $K_j$  les polynômes de Todd, notés  $T_j(c_1, \dots, c_j)$ . On a par exemple :

$$T_1 = \frac{1}{2} c_1 \quad , \quad T_2 = \frac{1}{12} (c_1^2 + c_2) \quad , \quad T_3 = \frac{1}{24} c_1 c_2 \quad ,$$

$$T_4 = \frac{1}{720} (-c_4 + c_3 c_1 + 3 c_2^2 + 4 c_2 c_1^2 - c_1^4) \quad .$$

LEMME 1. - Le coefficient de  $x^n$  dans  $Q(x)^{n+1}$  est égal à 1 pour tout  $n \geq 0$ , si  $Q(x) = x/(1 - e^{-x})$ .

(En effet, ce coefficient est égal à

$$\text{Res}_0 [dx/(1 - e^{-x})^{n+1}] = \text{Res}_0 [du/(1-u)u^{n+1}] = 1 \quad ,$$

en posant  $u = 1 - e^{-x}$ ).

1.3. -  $Q(x) = \frac{\sqrt{x}}{\text{tgh} \sqrt{x}}$  donne pour  $K_j$  des polynomes notés  $L_j(p_1, \dots, p_j)$ :

$$L_1 = \frac{1}{3} p_1 \quad , \quad L_2 = \frac{1}{45} (7p_2 - p_1^2) \quad , \quad L_3 = \frac{1}{3^3 \cdot 5 \cdot 7} (62p_3 - 13p_1 p_2 + 2p_1^3) \quad .$$

(On a noté les variables  $p_i$  au lieu de  $c_i$  parce que, dans les applications-topologiques, elles correspondent à des classes de Pontrjagin, et non à des classes de Chern).

Le lemme suivant se démontre comme le lemme 1 :

LEMME 2. - Le coefficient de  $x^n$  dans  $Q(x)^{2n+1}$  est égal à 1 pour tout  $n \geq 0$ , si  $Q(x) = \sqrt{x/\text{tgh} \sqrt{x}}$ .

En utilisant le théorème de Clausen-von Staudt sur la divisibilité des nombres de Bernoulli, on peut démontrer :

LEMME 3. - Pour tout entier  $r$ , les polynomes  $p^r T_{r(p-1)}(p \text{ premier})$  et  $p^r L_{r(p-1)/2}(p \text{ premier} \neq 2)$  ont des dénominateurs premiers à  $p$ .

## 2. L'indice d'inertie d'une variété différentiable compacte.

Si  $V$  est une variété orientable, on sait définir (cf. [8]) ses classes de Pontrjagin  $p_1, p_2, \dots$ , qui sont des classes de cohomologie entières de dimensions  $4, 8, \dots$ . Supposons que la dimension de  $V$  soit  $4k$ , et que  $V$  soit compacte ; alors on peut former le polynome  $L_k(p_1, \dots, p_k)$  qui est un multiple rationnel, soit  $L(V)$ , de la classe fondamentale de  $V$  supposée orientée. D'autre part, le cup-produit définit une forme bilinéaire symétrique sur  $H^{2k}(V, \mathbb{R})$  ; nous désignerons l'indice d'inertie de cette forme (différence entre le nombre de carrés positifs et le nombre de carrés négatifs) par  $I(V)$ . On a alors ([2], Théorème 3.1) :

THÉORÈME 1. - Pour toute variété  $V$ , différentiable, compacte, orientée, et de dimension divisible par 4, on a  $L(V) = I(V)$ .

(En particulier, si  $\dim V = 4$ , on a  $I(V) = p_1/3$ , cf. [5], [7]).

La démonstration repose de façon essentielle sur les résultats de THOM concernant les variétés bords (cf. [5]). THOM définit l'algèbre graduée  $\Omega$  des classes de variétés différentiables compactes orientées modulo la relation d'équivalence du cobordisme, et montre que l'algèbre  $\Omega \otimes \mathbb{Q}$  ( $\mathbb{Q}$ , corps des rationnels) est une algèbre de polynômes engendrée par les classes des espaces projectifs complexes  $P_{2k}(\mathbb{C})$ ,  $k \geq 1$ . Étendons alors les définitions de  $I(V)$  et  $L(V)$  en posant  $I(V) = L(V) = 0$  si  $\dim V \not\equiv 0 \pmod{4}$ . On montre que  $I(V)$  et  $L(V)$  sont invariants par cobordisme, donc définissent des applications de  $\Omega$  dans  $\mathbb{Q}$ ; de plus ce sont des homomorphismes d'anneaux ( $L(V \times W) = L(V) \cdot L(W)$  résulte de la formule  $K_Q(C \cdot D) = K_Q(C) \cdot K_Q(D)$ , et du fait que les classes de Pontrjagin rationnelles vérifient un "théorème de dualité", cf. [1] par exemple). Donc  $I(V)$  et  $L(V)$  définissent des homomorphismes de  $\Omega \otimes \mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{Q}$ , et pour voir que ces homomorphismes coïncident il suffit de montrer que  $L(V) = I(V)$  lorsque  $V = P_{2k}(\mathbb{C})$ ; or on a évidemment  $I(P_{2k}(\mathbb{C})) = 1$ ; d'autre part on sait que le polynôme de Pontrjagin  $P(t) = \sum p_i \cdot t^{4i}$  de  $P_{2k}(\mathbb{C})$  est égal à  $(1 + u^2 t^4)^{2k+1}$ , où  $u$  désigne la classe de cohomologie de dimension 2 duale d'un hyperplan; le fait que  $L(P_{2k}(\mathbb{C})) = 1$  résulte alors du lemme 2.

APPLICATION ([3]). - Il n'y a pas de variété différentiable compacte  $V$  de dimension 12, admettant pour polynôme de Poincaré réel le polynôme  $1 + t^6 + t^{12}$ .

En effet, on aurait  $1 = I(V) = L(V) = \frac{62 \cdot p_3}{3^3 \cdot 5 \cdot 7}$ , ce qui est impossible puisque  $3^3 \cdot 5 \cdot 7$  n'est pas divisible par 62.

Résultat analogue pour les variétés de dimension 20.

### 3. Le genre de Todd.

Soit  $E$  un espace fibré de base  $V$  et de groupe structural le groupe unitaire  $U(n)$ . Les classes de Chern  $c_1, \dots, c_n$  de  $E$  sont des classes de cohomologie entières de dimensions 2, ...,  $2n$  de la base  $V$ . On peut former les polynômes  $T_j(c_1, \dots, c_j)$  et l'on obtient les classes de Todd du fibré  $E$ .

Ceci s'applique en particulier au cas d'une variété presque-complexe  $V$  de dimension  $2k$ . La classe de cohomologie  $T_k(c_1, \dots, c_k)$  est un multiple rationnel, soit  $T(V)$ , de la classe fondamentale de  $V$ . Le nombre rationnel  $T(V)$  est

appelé genre de Todd de  $V$ .

PROPRIÉTÉS du genre de Todd. - On a  $T(V \times W) = T(V) \cdot T(W)$ , cela se voit comme pour  $L(V)$ . On a  $T(P_k(C)) = 1$ , car le polynôme de Chern de  $P_k(C)$  est  $(1 + ut^2)^{k+1}$ , avec les notations du n° 2, et l'on applique le lemme 1.

Les propriétés de  $T(V)$  sont très analogues à celles de  $L(V)$ . Il y a cependant une différence importante : alors que le théorème 1 montre que  $L(V)$  est un entier, on ignore s'il en est de même de  $T(V)$ . On a toutefois :

THÉORÈME 2. - ([2], Théorème 4.1). -  $2^{k-1} \cdot T(V)$  est un entier si  $\dim V = 2k$ .

THÉORÈME 3. - (THOM, cité dans [3], c), Théorème 8.3). - Si  $\dim V = 2, 4$  ou  $6$ ,  $T(V)$  est un entier.

Pour démontrer le théorème 3, il suffit d'examiner le cas où  $\dim V = 6$ . On choisit alors une variété  $W \subset V$ , de dimension 4, dont la classe d'homologie soit duale de la classe  $c_1$ . En appliquant la dualité de Whitney, on voit que la classe  $W_2$  de  $W$  est nulle, donc la classe  $p_1(W)$  est divisible par 48, d'après un théorème de Rokhlin. Comme  $p_1(W) = -2c_1c_2$ ,  $c_1c_2$  est divisible par 24,

C.Q.F.D.

Genre de Todd et genre arithmétique. - Soit  $V$  une variété algébrique sans singularités, de dimension complexe  $k$ , et soit  $\mathcal{O}$  le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur  $V$ . Posons :

$$\begin{aligned} \pi(V) &= \sum_{q=0}^{q=k} (-1)^q \cdot \dim_{\mathbb{C}} H^q(V, \mathcal{O}) \\ &= \sum_{q=0}^{q=k} (-1)^q \cdot \dim_{\mathbb{C}} \left\{ \text{espace vectoriel des formes de l'espèce de degré } q \right\}. \end{aligned}$$

On démontre (cf. [4] par exemple) que  $\pi(V)$  est égal au genre arithmétique de  $V$  (défini au moyen de la formule de postulation de Hilbert), et l'on conjecture que  $\pi(V) = T(V)$  (l'égalité  $\pi(V) = T(V)$  a été démontré par TODD, mais en s'appuyant sur un raisonnement insuffisant de SEVERI).

Lorsque  $k = 1, 2, 3$ , on sait démontrer que  $\pi(V) = T(V)$  (pour  $k = 1$ , ce n'est rien d'autre que la relation bien connue entre le genre et la caractéristique d'Euler-Poincaré, pour  $k = 2, 3$ , il faut utiliser des résultats moins triviaux, notamment le théorème 1).

On sait également démontrer que  $\pi(V) = T(V)$  lorsque  $V$  est une intersection complète d'hypersurfaces sans singularités et se coupant proprement.

#### 4. Les puissances réduites de Steenrod.

Soit  $V$  une variété compacte différentiable, de dimension  $m$ . Soit  $p$  un nombre premier  $\neq 2$ . Les puissances de Steenrod (cf. [1], par exemple) sont des homomorphismes :

$$\mathcal{P}_p^r : H^k(V, \mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^{k+2r(p-1)}(V, \mathbb{Z}_p).$$

Supposons  $V$  orientée ; alors, si  $k + 2r(p-1) = m$ , la dualité de Poincaré montre qu'il existe des classes bien déterminées  $s_p^r \in H^{2r(p-1)}(V, \mathbb{Z}_p)$  telles que :

$$\mathcal{P}_p^r(u) = s_p^r \cdot u \quad \text{pour tout } u \in H^k(V, \mathbb{Z}_p).$$

**THÉOREME 4.** ([2], Théorème 2.1, voir aussi [7]). - Les classes  $s_p^r$  peuvent être exprimées comme polynômes en les classes de Pontrjagin  $p_i$  de  $V$ . De façon précise :

$$s_p^r \equiv p^r \cdot L_{r(p-1)/2}(p_1, \dots, p_{r(p-1)/2}) \pmod{p},$$

le second membre ayant un sens à cause du lemme 3.

[Pour  $p = 2$ , on a un résultat tout à fait analogue : les classes  $U_i$  de WU ([6]) s'expriment en fonction des classes de Stiefel-Whitney  $W_i$  par les formules :  $U^i \equiv 2^i \cdot T_i(W_1, \dots, W_i) \pmod{2}$  ].

Le théorème 4 se déduit sans trop de difficulté du lemme suivant :

**LEMME 4.** ([3], b), Théorème 4.3). -  $\sum_{r,t} \mathcal{P}_p^t(s_p^r) = \sum_{j=0}^{\infty} B_{p,j}(p_1, \dots, p_j)$ , où les polynomes  $B_{p,j}$  sont les polynomes associés à la série  $Q(x) = 1 + x^{(p-1)/2}$ .

Le lemme 4 se démontre par une méthode analogue à celle de WU dans [6] ; on considère la diagonale  $\Delta$  de  $V \times V$ , et on calcule de deux façons différentes les  $\mathcal{P}_p^t(U)$ , où  $U$  désigne la classe duale de  $\Delta$  dans  $V \times V$ . Pour plus de détails, voir [3], b).

Lorsque  $V$  est presque-complexe, on peut calculer les classes de Pontrjagin  $p_i$  en fonction des classes de Chern, et le théorème 4 donne :

**THÉOREME 4'.** - Si  $V$  est presque-complexe, on a :

$$s_p^r \equiv p^r \cdot T_{r(p-1)}(c_1, \dots, c_{r(p-1)}) \pmod{p}.$$

Soit  $2n$  la dimension de  $V$ . On a :

$$\mathcal{P}_p^1(c_{n-p+1}) \equiv c_{n-p+1} \cdot s_p^1 \equiv c_{n-p+1} \cdot \sum u_1^{p-1} \quad (2 \leq p \leq n+1),$$

en convenant de désigner par  $\sum u_1^{p-1}$  le polynome symétrique  $\sum u_1^{p-1} + \dots + u_n^{p-1}$ , exprimé au moyen des fonctions symétriques élémentaires  $c_i = \sum u_1 \dots u_i$ .

Mais d'autre part, on sait exprimer les  $\mathcal{P}_p^r(c_i)$  en fonction des  $c_i$ , cf. [1]. En faisant  $r = 1$  et  $i = n - p + 1$  et comparant avec le résultat précédent, on obtient certaines congruences entre classes de Chern ([3], c), Théorème 5.3):

THÉORÈME 5. - Les classes de Chern  $c_i$  d'une structure presque-complexe de la variété  $V$  de dimension  $2n$  vérifient les relations suivantes modulo  $p$  ( $p$  premier  $\leq n+1$ ) :

$$c_{n-p+2} \sum u_1^{p-2} - c_{n-p+3} \sum u_1^{p-3} + \dots + c_{n-1} c_1 - n c_n \equiv 0 \pmod{p}.$$

En particulier  $n c_n \equiv 0 \pmod{2}$ ,  $c_{n-1} c_1 - n c_n \equiv 0 \pmod{3}$ , etc.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOREL (Armand) et SERRE (Jean-Pierre). - Groupes de Lie et puissances réduites de Steenrod, Amer. J. of Math., t. 75, 1953, p. 409-448.
- [2] HIRZEBRUCH (Friedrich). - On Steenrod's reduced powers, the index of inertia and the Todd genus, Proc. nat. Acad. Sc. U.S.A., t. 39, 1953, p. 951-956.
- [3] a), b), c) HIRZEBRUCH (Friedrich). - Notes polycopiées, Princeton 1953.
- [4] KODAIRA (K.) and SPENCER (D.C.). - On arithmetic genera of algebraic varieties, Proc. nat. Acad. Sc. U.S.A., t. 39, 1953, p. 641-649.
- [5] THOM (R.). - Variétés différentiables cobordantes, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 236, 1953, p. 1733-1735 ; Sur les variétés-bords, Séminaire Bourbaki, t. 6, 1953/54 ; Quelques propriétés globales des variétés différentiables, Comm. Math. Helv., t. 28, 1954, p. 17-86.
- [6] WU WEN-TSUN. - Classes caractéristiques et i-carrés, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 230, 1950, p. 508-511.
- [7] WU WEN-TSUN. - Sur les puissances de Steenrod. - Colloque de Topologie, Strasbourg 1951.
- [8] WU WEN-TSUN. - Sur les classes caractéristiques des structures fibrées sphériques, Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, n° 11 : Sur les espaces fibrés et les variétés feuilletées. - Paris, Hermann, 1952 (Actual. scient. et ind. n° 1183).

\* \* \*

Pour les paragraphes 1, 2, 3 et la démonstration de la conjecture  $\mathcal{T}(V) = T(V)$  (pour toute variété algébrique  $V$ , projective et non singulière), voir :

HIRZEBRUCH (Friedrich). - Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie. - Berlin, Springer, 1956 (Ergebnisse der Mathematik, neue Folge, Heft 9).

[Avril 1957]