SÉMINAIRE N. BOURBAKI

PIERRE DOLBEAULT

Le théorème de Riemann-Roch sur les surfaces kählériennes compactes

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. n° 63, p. 133-143

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__133_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mai 1952)

LE THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH SUR LES SURFACES KÄHLÉRIENNES COMPACTES.

(d'après KODAIRA [1])

par Pierre DOLBEAULT.

Soit V une variété analytique complexe. On appelle sous-variété principale Γ un sous-ensemble fermé de V tel que, pour tout point $\mathfrak{p} \in V$, il existe un voisinage $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$ de $\mathfrak{p}$ et une fonction holomorphe $r_{\mathfrak{p}}$ dans $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$ dont $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}} \cap \Gamma$ soit l'ensemble des zéros. $r_{\mathfrak{p}} = 0$ est dite équation locale minimale si les facteurs irréductibles d'un polynôme distingué équivalent à $r_{\mathfrak{p}}$ sont tous différents. Γ est irréductible si elle n'est pas réunion de 2 sous-variétés principales distinctes.

On appelle diviseur (resp. diviseur positif) toute combinaison linéaire formelle finie de sous-variétés principales irréductibles à coefficients entiers (resp. entiers positifs) : $D = \sum_k m_k \Gamma_k$. Si $r_k = 0$ est une équation locale minimale de Γ_k en $\mathfrak{p}$, $R_{\mathfrak{p}} = \prod_k r_k^{m_k}$ est une fonction méromorphe dans un voisinage $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$ de $\mathfrak{p}$; $D \cap \mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$ est l'ensemble des variétés de zéros de $R_{\mathfrak{p}}$ diminué de l'ensemble des variétés polaires de $R_{\mathfrak{p}}$ affectées respectivement de multiplicités égales aux $|m_k|$. Si $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}} = V$, le diviseur est défini par une fonction F méromorphe sur V et est noté (F).

PROBLÈME. - V étant une variété kählérienne compacte de dim 2, D un diviseur, on cherche à exprimer la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(D)$ des fonctions méromorphes sur V multiples de $-D$, i.e. telles que $(F) + D$ soit un diviseur positif, à l'aide des "caractères de D" comme le nombre d'intersection de D avec lui-même, etc.

Un diviseur D est linéairement équivalent à 0 s'il existe une fonction méromorphe Φ sur V avec $D = (\Phi)$; dim $\mathcal{F}(D)$ ne dépend que de la classe d'équivalence linéaire de D, on la note dim $\{D\}$.

1. Généralités.

Un courant (de degré p) sur une variété indéfiniment différentiable, de dim n est un élément du dual $(\mathcal{D}')$ de l'espace $(\mathcal{D})$ des formes différentielles (de degré $n - p$) indéfiniment différentiables à support compact. (voir L. SCHWARTZ [2]). $|T|$ désigne le support du courant T. En particulier, toute forme différentielle ω localement sommable définit un courant :

$$\omega[\varphi] = \int_V \omega \wedge \varphi$$

Les opérateurs agissant sur les formes différentielles sont étendus aux courants, en particulier $dT[\varphi] = (-1)^{p+1} T[d\varphi]$, T étant de degré p. Sur une variété complexe de dim $2m$, un courant est dit pur de type (r, s) si $T[\varphi^{(r',s')}] = 0$ pour $r' \neq m - r$; $s' \neq m - s$.

Une <u>variété kählérienne</u> de dimension complexe m, V_m, est une variété analytique complexe possédant une métrique hermitienne définie localement par :

$$ds^2 = \sum_{\nu=1}^{m} \omega_\nu \cdot \bar{\omega}_\nu \text{ telle que } \Omega = \sum_{\nu=1}^{m} \omega_\nu \wedge \bar{\omega}_\nu \text{ soit fermée.}$$

Les propriétés suivantes sont démontrées dans l'exposé 1 du Séminaire CARTAN, t. 4, 1951/52 : les opérateurs d et ∂ se décomposent en $d = d' + d''$; $\partial = \partial' + \partial''$ (d', d'', ∂', ∂'' sont respectivement de type $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$. $e(\Omega)$, resp. $i(\Omega)$ désignant les opérateurs de multiplication extérieure, resp. intérieure par Ω, on a :

$$i(\Omega)d' - d'i(\Omega) = -2\partial'' ;$$

$$i(\Omega)d'' - d''i(\Omega) = 2\partial' ;$$

$$i(\Omega)\partial - \partial i(\Omega) = 0 ;$$

et les formules qui s'en déduisent par transposition. Il en résulte :

(1) $$d'\partial'' + \partial'' d' = 0 ;$$

(1') $$d''\partial' + \partial' d'' = 0 ;$$

(2) $$\Delta = 2(d'\partial' + \partial' d') = 2(d''\partial'' + \partial'' d'')$$

et, si la variété est compacte, ce qu'on suppose désormais, la formule de décomposition, valable pour les courants :

(3) $$T = HT + 2\, d''\partial'' GT + 2\, \partial'' d'' GT .$$

THÉORÈME 1. - <u>Soit</u> T <u>un courant de type</u> $(p, 1)$ <u>défini sur</u> V_m <u>tel que</u> $dT = 0 = HT$, $(0 \leqslant p$ <u>entier</u> $\leqslant m)$, <u>alors il existe un</u> $(p, 0)$ - <u>courant</u> $\Theta = 2\partial'' GT$ <u>tel que</u> $d\Theta = T$ <u>qui est une</u> p-<u>forme holomorphe dans</u> $V - |T|$. <u>Soit</u> Q <u>un</u> p-<u>courant arbitraire tel que</u> $T = dQ$, <u>alors, pour tout cycle</u>

$$Z \subset V - |T| : \int_Z \Theta := \langle *Z , Q \rangle - Q[HZ] .$$

DÉMONSTRATION. - $d''\Theta = T$; $d'\Theta = 2\, d'\partial'' GT = -2\partial'' Gd' T = 0$;

$\partial'' \Theta = d'' \Theta = 0$ dans $V - |T|$, donc Θ holomorphe dans $V - |T|$;

$$Q = \Theta + dU + HQ \;; \quad \int_Z \Theta = \langle \bar{\Theta} , *Z \rangle = \langle \bar{Q} , *Z \rangle - \langle H\bar{Q} , *Z \rangle = \langle \bar{Q} , *Z \rangle - \overline{Q[HZ]}$$

2. Diviseurs caractéristiques.

V est désormais une variété kählérienne compacte de dim 2 . Une courbe sur V est une sous-variété principale de V : $\Gamma = \sum_{\nu=1}^{M} \Gamma_\nu$ où les Γ_ν sont irréductibles. Γ_ν est l'image holomorphe d'un modèle $\mathfrak{C}_\nu$ sans singularité : $\Gamma_\nu = \Phi(\mathfrak{C}_\nu)$. Soit $\mathfrak{C} = \sum_{\nu=1}^{M} \mathfrak{C}_\nu$ la somme directe des $\mathfrak{C}_\nu$; l'application $\Phi : \mathfrak{C} \to \Gamma$ est holomorphe et établit une correspondance biunivoque entre les points de $\mathfrak{C}$ et les branches irréductibles aux points de Γ .

Γ est définie en chaque point $\mathfrak{p}$ de V par une équation locale minimale $R_{\mathfrak{p}}(z^1 , z^2) = 0$. Pour chaque point $p \in \mathfrak{C}$, on choisit un voisinage U_p de p tel que $\overline{\Phi(U_p)} - \Phi(p)$ ne contienne pas de point singulier de Γ et que l'équation $R_{\mathfrak{p}}(z^1 , z^2) = 0$ soit valable dans $\overline{\Phi(U_p)}$. Alors, si $U_p \cap U_q \neq \emptyset$, $T_{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}(z) = R_{\mathfrak{p}}(z)/R_{\mathfrak{q}}(z)$ est une fonction holomorphe inversible dans un voisinage de $\overline{\Phi(U_p \cap U_q)}$. τ_p étant une coordonnée locale sur $\mathfrak{C}$ en p , $t_{pq} = T_{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}(\Phi(\tau_p))$ et

(4) $$t_{pq} \cdot t_{qr} \cdot t_{rp} = 1 \quad \text{dans} \quad U_p \cap U_q \cap U_r \neq \emptyset \,.$$

THÉORÈME 2 (A. WEIL). - t_{pq} étant un système de fonctions holomorphes sur $U_p \cap U_q$ satisfaisant à (4), il existe un système de fonctions méromorphes h_p sur U_p telles que $h_p/h_q = t_{pq}$ sur $U_p \cap U_q$.

Enoncé équivalent : Tout espace fibré analytique complexe de base $\mathfrak{C}$, de fibre S^2 de groupe structural C^* admet une section analytique.

DÉMONSTRATION. - On ramène la donnée à celle de fonctions holomorphes t_{jk} définies sur $U_j \cap U_k \neq \emptyset$ telles que $t_{jk} t_{k\ell} t_{\ell j} = 1$ dans $U_j \cap U_k \cap U_\ell \neq \emptyset$, $\{U_j\}$ étant un système d'ouverts situés chacun dans un voisinage de coordonnées et tels que U_j et $U_j \cap U_k$ soient simplement connexes. Alors, si $\rho_{jk} = \frac{1}{2\pi i} \log t_{jk}$, les entiers $\rho_{jk} + \rho_{k\ell} + \rho_{\ell j} = \mathfrak{C}_{jk\ell}$ associés aux

$U_j \cap U_k \cap U_\ell$ définissent un 2-cocycle entier, modulo un cobord sur le nerf N du recouvrement, donc une 2-classe de cohomologie de N, soit J. Si $J = 0$, on détermine, à l'aide du théorème 1, des fonctions holomorphes η_j telles que $\rho_{jk} - \eta_j + \eta_k = \lambda_{jk}$ constant. Les λ_{jk} définissent une 1-classe de cohomologie de $\mathfrak{C}$ à coefficients complexes d'où un caractère du 1er groupe de Betti de $\mathfrak{C}$ auquel appartient une fonction méromorphe multiplicative f sur $\mathfrak{C}$; f_j étant la restriction à U_j d'une détermination de f, $h_j = f_j \exp 2\pi i(\eta_j + \lambda_j)$, λ_j constante. Si $J \neq 0$, τ_j et τ_k étant des coordonnées locales nulles aux points p_j, p_k de U_j, U_k respectivement, on détermine les entiers m_j pour que la classe J' associée aux

$$t'_{jk}(\tau) = t_{jk}(\tau)\, \tau_j^{m_j} / \tau_k^{m_k}$$

soit nulle.

Soit $f(\tau_p) = \tau_p^m(a_o + a_1 \tau_p + \dots)$ $(a_o \neq 0)$ une fonction méromorphe définie dans U_p, $v_p(f) = m$; $\delta = \sum_p v_p(h_p).p$ <u>est un diviseur caractéristique de</u> Γ : sa classe d'équivalence linéaire est définie de façon unique.

THÉORÈME 3. - <u>Le degré</u> $(\sum_p v_p(h_p))$ <u>du diviseur caractéristique</u> δ <u>de</u> Γ <u>est égal au nombre d'intersection</u> $I(\Gamma, \Gamma)$ <u>du cycle</u> Γ <u>avec lui-même</u>.

Il suffit de remarquer que les classes de cohomologie duales des classes d'homologie de Γ et de δ sur V et $\mathfrak{C}$ respectivement sont images l'une de l'autre.

REMARQUE. - Sur une surface algébrique, il existe toujours une fonction méromorphe Φ ayant chaque composante de Γ comme courbe polaire simple, alors $\delta = ((\Phi) + \Gamma).\Gamma$: δ est un élément de la série caractéristique de Γ.

3. <u>Courant défini par une fonction méromorphe</u>.

LEMME. - <u>La distribution "valeur principale de Cauchy" définie par une fonction méromorphe est indépendante du choix de la coordonnée complexe locale de</u> z.

<u>Enoncé équivalent</u> : $G(z)$ <u>étant une fonction méromorphe au voisinage de</u> $z = 0$, $\varphi \in \mathcal{D}$, <u>pour toute fonction</u> $\zeta(z)$ <u>holomorphe nulle en</u> 0 $(\zeta'(0) \neq 0)$,

$$T[\varphi] = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|\zeta(z)| > \varepsilon} G(z)\varphi \; dz \wedge d\bar{z} \qquad (5)$$

existe et est indépendante du choix de $\zeta(z)$.

$$T[\varphi] = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|\zeta|>\varepsilon} G(z(\zeta))\varphi z'(\zeta)\, \overline{z'(\zeta)}\, d\zeta \wedge d\bar{\zeta} .$$

D'où l'existence de la limite. G est la somme d'une fonction ayant un pôle d'ordre 1 pour laquelle l'intégrale est absolument convergente et d'une fonction ayant un pôle d'ordre m sans résidu, donc de la forme $F'(z)$, F ayant un pôle d'ordre $m - 1$:

$$T[\varphi] = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|\zeta|>\varepsilon} F(z(\zeta)) \frac{\partial}{\partial \zeta} (\varphi \overline{z'(\zeta)}) d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|\zeta(z)|>\varepsilon} F(z) \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \wedge d\bar{z}$$

intégrale du même type que (5), la fonction méromorphe ayant un pôle d'odre $m - 1$. On obtient le théorème par récurrence sur m . (L. SCHWARTZ)

a. $\frac{1}{R_{\mathfrak{p}}}$ définit un 0-courant sur $\mathfrak{U}_{\mathfrak{p}}$, voisinage de $\mathfrak{p}$ sur V :

$$\frac{1}{R_{\mathfrak{p}}}[Y\, dz^1 \wedge d\bar{z}^1 \wedge dz^2 \wedge d\bar{z}^2] = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|z^2|>\varepsilon} \frac{1}{R_{\mathfrak{p}}} Y\, dz^1 \wedge d\bar{z}^1 \wedge dz^2 \wedge d\bar{z}^2 .$$

Si $\mathfrak{p}$ est un point simple de Γ , l'intégrale est absolument convergente.
Si $\mathfrak{p}$ est un point singulier de Γ , on utilise la représentation paramétrique de chaque branche Γ_s de Γ en $\mathfrak{p}$:

$$z^1 = \mathfrak{g}_s(\tau_s) = \tau_s^{k_s}(a_{so} + a_{s1}\tau_s + \dots) ;$$

$$z^2 = \tau_s^{m_s}(a_{so} \neq 0 , k_s \geqslant 1) .$$

Soit

$$\rho_s(\tau_s) = 1/\frac{\partial R_{\mathfrak{p}}}{\partial z^1} (\mathfrak{g}_s(\tau_s) , \tau_s^{m_s})$$

et

$$\psi(v , z) = \int Y (v + w , z) w^{-1}\, dw \wedge d\bar{w} .$$

Cette dernière intégrale converge absolument vers une fonction C^{∞} en $\Re v$, $\Im v$, $\Re z$, $\Im z$ et

$$\frac{1}{R_{\mathfrak{p}}} [Y\, dz^1 \wedge d\bar{z}^1 \wedge dz^2 \wedge d\bar{z}^2] = \sum_s \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|\tau_s|>\varepsilon} \rho_s \psi(\mathfrak{g}_s , \tau_s^{m_s}) |\tau_s|^{2m_s-2} m_s^2 d\tau_s \wedge d\bar{\tau}_s$$

c'est une valeur principale de Cauchy.

b. Ψ étant une 3-forme arbitraire, C^{∞}, avec $|\Psi| \subset \mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$

$$(6) \quad d''\left(\frac{1}{R_{\mathfrak{p}}}\right)[\Psi] = -\lim_{\substack{\delta \to 0 \\ \varepsilon \to 0}} \int_{|z^2|>\varepsilon} \int_{|R|>\delta} \frac{1}{R} d''\Psi = -\lim_{\substack{\delta \to 0 \\ \varepsilon \to 0}} \left\{ \int_{\substack{|R|=\delta \\ |z^2| \quad \varepsilon}} \frac{\psi^{(2,1)}}{R} + \int_{\substack{|R|>\delta \\ |z^2|=\varepsilon}} \frac{\psi^{(2,1)}}{R} \right\}$$

soit

$$\sigma_p = \frac{d\,\Phi_p^2}{\partial R_{\mathfrak{p}}(\Phi_p)/\partial z^1} = -\frac{d\,\Phi_p^2}{\partial R_{\mathfrak{p}}(\Phi_p)/\partial z^2}$$

alors :

THÉORÈME 4. -

$$(7) \qquad d''\left(\frac{1}{R_{\mathfrak{p}}}\right)[\Psi] = 2\pi i \sum_{\Phi(p)=\mathfrak{p}} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|\tau_p|>\varepsilon} \sum_{\beta} \psi_{12\beta}(\Phi_p)\, \sigma_p\, d\,\overline{\Phi}_p^{\beta}$$

COROLLAIRE. - <u>Soit</u> $B_{\mathfrak{p}} = B_{12}(z)\, dz^1 \wedge dz^2$ <u>une 2-forme holomorphe dans</u> $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$, <u>alors, pour une 1-forme</u> X <u>arbitraire</u> C^{∞} <u>à support dans</u> $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$:

$$(8) \qquad d(B_{\mathfrak{p}}/R_{\mathfrak{p}})[X] = 2\pi i \sum_{\Phi(p)=\mathfrak{p}} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|\tau_p|>\varepsilon} B_{12}(\Phi_p)\, \sigma_p \wedge \mathfrak{X}$$

<u>où</u> $\mathfrak{X}$ <u>désigne la forme induite par</u> X <u>sur</u> Γ_p.

D'après le lemme, les expressions (7) et (8) sont indépendantes du choix du paramètre local τ.

THÉORÈME 5. - <u>Pour une 2-forme holomorphe</u> $B_{\mathfrak{p}} = B_{12}(z)\, dz^1 \wedge dz^2$,

$$(9) \qquad \sum_{\Phi(p)=\mathfrak{p}} \mathrm{Rés}_p[B_{12}(\Phi_p)\sigma_p] = 0 .$$

Si $\mathfrak{p}$ est simple, le 2e terme de (6) est nul, d'où le théorème 4 ; le théorème 4 pour $\mathfrak{p}$ simple entraîne le théorème 5 pour $\mathfrak{p}$ singulier, il en résulte : le 2e terme de (6) est nul et le théorème 4 est valable pour $\mathfrak{p}$ singulier.

CONSÉQUENCE. - $\frac{1}{R_{\mathfrak{p}}}$ <u>est indépendant du choix des coordonnées.</u>

C'est évident si $\mathfrak{p}$ est un point simple de Γ. Si $\mathfrak{p}$ est singulier, il résulte facilement de (7) que $d''(\frac{1}{R_{\mathfrak{p}}})$ est indépendant des coordonnées. Soit $S_{\mathfrak{p}} = \frac{1}{R_{\mathfrak{p}}}$ dans $\mathfrak{U}_{\mathfrak{p}} - \Gamma$ et $d''S_{\mathfrak{p}} = d''(\frac{1}{R_{\mathfrak{p}}})$. Comme V est kählérienne, $\frac{1}{R_{\mathfrak{p}}} - S_{\mathfrak{p}}$ est holomorphe, donc identiquement nul sur $\mathfrak{U}_{\mathfrak{p}}$.

Si $W = W_{12}(z)dz^1 \wedge dz^2$ est une 2-forme définie dans un domaine $D \subset V$, telle que, pour tout point $\mathfrak{p} \in D$, $R_{\mathfrak{p}} W$ soit holomorphe en $\mathfrak{p}$, alors, $R_{\mathfrak{p}} W_{12}(\phi_p)\sigma_p$ est la restriction à U_p d'une forme ξ définie sur $\mathfrak{C} \cap \phi^{-1}(D)$ dite <u>résidu de</u> W (POINCARÉ) ; $dW[X] = 2\pi i \int_{\mathfrak{C}} \xi \wedge X$ pour toute forme C^{∞} avec $|X| \subset D$; de plus $\sum_{\phi(p)=\mathfrak{p}} \text{Rés}\ |\xi| = 0$.

4. <u>Dimension de</u> $\mathfrak{F}(\Gamma)$.

Si $F \in \mathfrak{F}(\Gamma)$, $R_{\mathfrak{p}} F$ est une fonction holomorphe sur $\mathfrak{U}_{\mathfrak{p}}$; donc $f(\tau) = R_{\mathfrak{p}} F(\phi_p(\tau))/h_p(\tau)$ est la restriction à U_p d'une fonction méromorphe sur $\mathfrak{C}$, soit $\mathcal{S}_h(F)$; f possède les propriétés :

(α) $(f) + \mathfrak{d} \geq 0$;

(β) $\sum_{\phi(p)=\mathfrak{p}} \text{Rés}_p[(\phi_p^1)^k(\phi_p^2)^{\ell} f h_p \sigma_p] = 0 \quad (k, \ell = 0, 1, \ldots)$

(d'après le théorème 5). Soit $\mathcal{F}(\Gamma, \mathfrak{d})$ l'espace vectoriel des fonctions méromorphes f sur $\mathfrak{C}$ satisfaisant à (α) et (β). L'application $F \to f = \mathcal{S}_h(F)$ est un <u>homomorphisme de</u> $\mathfrak{F}(\Gamma)$ <u>dans</u> $\mathcal{F}(\Gamma, \mathfrak{d})$ <u>dont le noyau est formé des constantes.</u>

Soit $\mathfrak{A}(\Gamma)$ l'espace vectoriel des fonctions méromorphes additives (ou intégrales simples de Picard de seconde espèce) <u>multiples de</u> $-\Gamma$. A toute $F \in \mathfrak{A}(\Gamma)$, on peut associer $f = \mathcal{S}_h(F)$ telle que $R_{\mathfrak{p}} F/h_p = f|U_p$ où f est une fonction méromorphe uniforme appartenant à $\mathcal{F}(\Gamma, \mathfrak{d})$; de plus, Ψ étant une 3-forme C^{∞} arbitraire $d''F[\Psi] = 2\pi i \int_{\mathfrak{C}} \sum_{\beta} \Psi_{12\bar{\beta}}(\phi_p) f h_p \sigma_p d\bar{\phi}_p^{\beta}$ l'intégrale étant une valeur principale de Cauchy quand elle ne converge pas absolument.

THÉORÈME 6. - <u>L'homomorphisme</u> $\mathfrak{A}(\Gamma) \to \mathcal{F}(\Gamma, \mathfrak{d})$ <u>est sûr.</u>

DÉMONSTRATION. - Soit $f \in \mathcal{F}(\Gamma, \mathfrak{d})$, considérons

$$Q_f[\Psi] = -\int_{\mathfrak{C}} \sum_{\beta} \Psi_{12\bar{\beta}}(\phi_p) f h_p \sigma_p d\bar{\phi}_p^{\beta}$$

1° $\sum_{\beta} \Psi_{12\bar{\beta}}(\phi_p) f h_p \sigma_p d\bar{\phi}_p^{\beta}$ est la restriction à U_p d'une 2-forme définie sur $\mathfrak{C}$;

2° le support de Q_f est Γ ;

3° Q_f est de type $(0, 1)$;

4° $dQ_f = d'Q_f$, en effet :

$$d''Q_f[\varphi^{(2,0)}] = -Q_f[d''\varphi^{(2,0)}] = \int_{\mathfrak{C}} \sum_{\beta} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\beta}} (\varphi_{12})\, fh_p \sigma_p d\bar{\Phi}_p^{\beta} = \int_{\mathfrak{C}} d(\varphi_{12} fh_p \sigma_p) = 0$$

(condition (β)).

Soit $\theta_f = 2\,\delta''GdQ_f$; d'après le théorème 1, c'est une forme holomorphe dans $V - \Gamma$ et, pour tout cycle $Y \subset V - \Gamma$: $\int_Y \theta_f = -\overline{Q}_f[\overline{HY}]$; $F_f(z) = 2\pi i \int^z \theta_f$ est une fonction holomorphe additive dans $V - \Gamma$. Pour tout $\mathfrak{p} \in \Gamma$, $R_{\mathfrak{p}} F_f$ est holomorphe dans $\mathfrak{U}_{\mathfrak{p}}$. En effet : si $\mathfrak{p}$ est un point simple de Γ, $R_{\mathfrak{p}} = z^1$; $z^2 = \tau_p$, la fonction holomorphe $N(z) = f(z^2).h_p(z^2)$ prolonge $f(\tau)h_p(\tau)$ sur $\mathfrak{U}_{\mathfrak{p}}$ et $d''(N/R_{\mathfrak{p}}) = -2\pi i Q_f$; $T = 2\pi i \theta_f - d'(N/R_{\mathfrak{p}})$ est une 1-forme holomorphe fermée sur $\mathfrak{U}_{\mathfrak{p}}$ et $L(z) = \int^{(z)} T$ est holomorphe sur $\mathfrak{U}_{\mathfrak{p}}$, donc $F_f = N/R_{\mathfrak{p}} + L + \text{Cte}$ dans $\mathfrak{U}_{\mathfrak{p}} - \Gamma$, donc, $R_{\mathfrak{p}} F_f$ est holomorphe dans $\mathfrak{U}_{\mathfrak{p}}$; de plus, $R_{\mathfrak{p}} F_f\,(\phi_p)/h_p = f$ dans $\mathfrak{U}_{\mathfrak{p}}$. Si $\mathfrak{p}$ est un point singulier de Γ , $R_{\mathfrak{p}} F_f$ est holomorphe dans $\mathfrak{U}_{\mathfrak{p}} - \mathfrak{p}$, donc dans tout $\mathfrak{U}_{\mathfrak{p}}$ (HARTOGS) ; donc $F_f \in \mathcal{A}(\Gamma)$ et $\mathcal{S}(F_f) = f$.

C.Q.F.D.

Si $A_1, \dots, A_q$ est une base orthogonale de l'espace vectoriel des 1-formes holomorphes sur V, toute $F(z) \in \mathcal{A}(\Gamma)$ satisfaisant à $\mathcal{S}_h(F) = f$ s'écrit :

$$F(z) = \int^z 2\pi i\, \theta_f + \sum_{\nu=1}^{q} \gamma_\nu \int^z A_\nu + \gamma_0 \qquad (\gamma_\nu = \text{Ctes})$$

et

$$dF(z) = 2\pi i \theta_f + \sum_\nu \gamma_\nu A_\nu - 2\pi i Q_f .$$

Soit $\{Y_1, \dots, Y_{2q}\}$ un système de représentants d'une base du premier groupe de Betti de V :

$$HY_j = \sum \alpha_{j\mu} * A_\mu + \sum \beta_{j\mu} * \bar{A}_\mu \quad ;$$

$$*A_\mu = i\,\Omega \wedge A_\mu \ ; \int_{Y_j} \theta_f = -\overline{Q}_f[\overline{HY_j}] = -\sum_\mu \overline{\alpha_{j\mu} Q_f[*A_\mu]} = +i \sum_\mu \overline{\alpha_{j\mu} Q_f[\Omega \wedge A_\mu]};$$

$$\sum_{\nu=1}^{q} \eta_\nu A_\nu [Y_j] = \sum_{\nu=1}^{q} \eta_\nu < A_\nu , * Y_j > = - \sum_{\nu=1}^{q} \eta_\nu \cdot \beta_{j\nu} < A_\nu , A_\nu >$$

THÉORÈME 7 (Théorème d'existence). - Soit f arbitraire $\in \mathcal{F}(\Gamma , \mathcal{S})$. Alors, il existe, sur V, une fonction $F \in \mathfrak{F}(\Gamma)$ telle que $\mathfrak{S}_h(F) = f$ si et seulement si :

(10) $$Q_f[\Omega \wedge A_\lambda] = 0 \quad (\lambda = 1 , \dots , q)$$

et, dans ce cas $F(z) = 2\pi i \int^z \theta_f + \text{Cte}.$

Soit j la dimension de l'espace vectoriel des 1-formes holomorphes A telles que $Q_f[\Omega \wedge A] = 0$ pour tout $f \in \mathcal{F}(\Gamma , \mathcal{S})$, puisque $F \in \mathfrak{F}(\Gamma)$ est déterminée par $f = \mathfrak{S}_h(F)$ à une constante additive près, $\dim \mathfrak{F}(\Gamma) - 1$ est égal à la dimension j de l'espace vectoriel des fonctions $\mathcal{F}(\Gamma , \mathcal{S})$ satisfaisant à (10) :

$$\dim \{\Gamma\} = \dim \mathcal{F}(\Gamma , \mathcal{S}) - q + j + 1 .$$

$D.C.(\Gamma) = \dim \mathcal{F}(\Gamma , \mathcal{S}) - \dim \{\Gamma\} + 1 = q - j \geq 0$ est appelé défaut caractéristique de Γ : $D.C.(\Gamma) \leq q$; $\dim \mathfrak{X}(\Gamma) = \dim \mathcal{F}(\Gamma , \mathcal{S}) + q + 1$.

THÉORÈME 8. - La dimension de l'espace vectoriel des classes d'intégrales simples de Picard de seconde espèce (modulo les fonctions méromorphes uniformes) qui sont multiples de $-\Gamma$ est $q + D.C.(\Gamma)$.

5. Le théorème de Riemann-Roch sur les courbes réductibles.

$\xi_p = f d\tau_p$ étant une forme différentielle méromorphe définie au voisinage de $p \in \mathfrak{C}$, soit $v_p(\xi) = v_p(f)$; $\mathfrak{m}$ étant un diviseur arbitraire sur $\mathfrak{C}$, $\mathcal{F}(\mathfrak{m})$ (resp. $\mathfrak{H}(\mathfrak{m})$) est l'espace des fonctions f (resp. des différentielles ξ) méromorphes satisfaisant à $(f) + \mathfrak{m} \geq 0$ (resp$(\xi) + \mathfrak{m} \geq 0$) ;

$$\mathcal{F}^*(\mathfrak{m}) = \mathcal{F}(\mathfrak{m}) + \mathcal{F}(0) \; ; \; \mathfrak{H}^*(\mathfrak{m}) = \mathfrak{H}(\mathfrak{m}) + \mathfrak{H}(0) .$$

Soient $\mathfrak{E}$ un ensemble fini de points, $\mathfrak{m} = \sum_p m_p p$ un diviseur sur $\mathfrak{C}$ et $\{\xi_p | p \in \mathfrak{E}\}$ un système de différentielles définies resp. au voisinage de $p \in \mathfrak{E}$,

$\xi \equiv \sum_{p \in \mathfrak{E}} \xi_p (\mathfrak{m}) \Leftrightarrow v_p(\xi - \xi_p) \geq m_p$ pour $p \in \mathfrak{E}$ et $v_p(\xi) \geq m_p$ pour $p \notin \mathfrak{E}$. Les sommes formelles $\sum_p \xi_p^{(\nu)}$ en nombre fini sont indépendantes modulo $\mathfrak{m}$ si

$$0 \equiv \sum a_\nu \sum_p \xi_p^{(\nu)} (\mathfrak{m}) \Rightarrow a_\nu = 0 .$$

Pour chaque point singulier $\mathfrak{p}$ de Γ soit $\ell_{\mathfrak{p}}$ le nombre de sommes formelles $\sum_{\Phi(p)=\mathfrak{p}} (\phi_p^1)^k (\phi_p^2)^\ell \sigma_p$ $(k, \ell = 0, 1, 2 \ldots)$ indépendantes mod 0 . C'est aussi le nombre de conditions linéairement indépendantes imposées par

$$(\beta_{\mathfrak{p}}) \quad \sum_{\phi(p)=\mathfrak{p}} \text{Rés}_p[(\phi_p^1)^k . (\phi_p^2)^\ell f h_p \sigma_p] = 0$$

Soit $\mathfrak{H}(\Gamma, -\delta) = \left\{ \xi \mid \xi \doteq \sum_{\mathfrak{p}} \sum_{k,\ell} a_{\mathfrak{p}k\ell} \sum_{\Phi(p)=\mathfrak{p}} (\phi_p^1)^k (\phi_p^2)^\ell h_p \sigma_p(\delta) \right\}$,

$a_{\mathfrak{p}k\ell}$ = Ctes arbitraires.

THÉORÈME 9. - $\dim \mathcal{F}(\Gamma, \delta) = \deg \delta - \sum_{\nu=1}^{\mu} \pi_\nu + \mu - \sum_{\mathfrak{p}} \ell_{\mathfrak{p}} + i$, avec μ = nombre de composantes irréductibles de Γ ; π_ν , genre de $\mathbb{C}_\nu$ et $i = \dim \mathfrak{H}(\Gamma, -\delta)$.

$c = -\sum_p v_p(\sigma_p)p$ est le conducteur de Γ , si $\delta = \delta^+ - \delta^-$ ($\delta^+ \geq 0$, $\delta^- \geq 0$) , on choisit δ tel que $|\delta| \cap |c| = \emptyset$ et $|\delta^-| \cap \mathbb{C}_\nu \neq \emptyset$, on montre que $\mathcal{F}(\delta^*)/\mathcal{F}^*(\delta - c)$ et $\mathfrak{H}(\delta^- + c)/\mathfrak{H}^*(c - \delta)$ sont en dualité par rapport au produit $(\xi f) = \sum_{q \in |\delta + c|} \text{Rés}_q[f\xi]$ et on applique Riemann-Roch à chaque $\mathbb{C}_\nu$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] KODAIRA (Kunihiko). - The theorem of Riemann-Roch on compact analytic surfaces, Amer. J. Math., t. 73, 1951, p. 813-875.

[2] SCHWARTZ (Laurent). - Mémoire de K. Kodaira : Harmonic fields in Riemann manifolds, Séminaire Bourbaki, t. 2, 1949/50.

ADDITIF

Le théorème fondamental, dont l'établissement et les conséquences devaient faire l'objet d'un autre exposé d'après le mémoire cité de KODAIRA, est le suivant :

THÉORÈME de Riemann-Roch. - La dimension de la classe de diviseurs $\{\Gamma\}$ d'une courbe Γ (réductible ou non) est donnée par :

$$\dim \{\Gamma\} = I(\Gamma, \Gamma) - \pi_\Gamma - q + i + j + 2$$

où $2q$ est le premier nombre de Betti de V , le nombre π_Γ le genre virtuel de Γ (défini comme en géométrie algébrique classique) et où $I(\Gamma, \Gamma)$, i et j ont été définis ci-dessus.

Le théorème de Riemann-Roch ci-dessus a été généralisé dès 1952 ; il est connu (avec des généralisations) sur une variété algébrique quelconque depuis la fin de 1953, voir à ce sujet :

HIRZEBRUCH (F.). - Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie. - Berlin, Springer, 1956 (Ergebnisse der Mathematik ..., Neue Folge, 9).

La construction d'un courant associé canoniquement à une fonction méromorphe donnée au n° 3 a été généralisée, voir :

SCHWARTZ (Laurent). - Courant associé à une forme différentielle méromorphe sur une variété analytique complexe, Géométrie différentielle [1953. Strasbourg]. - Paris, Centre national de la Recherche scientifique, 1953 (Coll. intern. C. N. R. S., 52).; p. 185-195.

DOLBEAULT (Pierre). - Formes différentielles et cohomologie sur une variété analytique complexe, II., Annals of Math., Series 2, t. 65, 1957, p. 282-330.

[Décembre 1958]