STATISTIQUE ET ANALYSE DES DONNÉES

RAYMOND MOCHÉ

Sur la détection d'un signal d'alarme dans un bruit gaussien markovien centré

Statistique et analyse des données, tome 16, nº 2 (1991), p. 81-105
<http://www.numdam.org/item?id=SAD_1991__16_2_81_0>

Statistique et Analyse des Données
1990 - Vol. 16 n° 2 p. 81 - 105

SUR LA DETECTION D'UN SIGNAL D'ALARME DANS UN BRUIT GAUSSIEN MARKOVIEN CENTRE

Raymond MOCHÉ

U.F.R. de Mathématiques (M 2)
Université des Sciences et Technologies de Lille
59655 - VILLENEUVE D'ASCQ CEDEX (France)
et CNRS URA 1321 : Statistique et modèles aléatoires

Résumé.

Un dispositif de surveillance travaillant en temps continu peut envoyer un signal d'alarme si l'installation qu'il contrôle cesse de fonctionner correctement à un certain instant d. Il s'agit de détecter ce signal, que l'on reçoit superposé à un bruit gaussien markovien centré de covariance connue, en respectant un délai de détection maximum imposé, ainsi qu'un seuil imposé pour la probabilité de fausse alarme et pour la probabilité de non détection. Il s'agit aussi d'estimer d.

On présente dans cet article deux solutions complètes de ces problèmes. La première est d'inspiration classique, tandis que la seconde, originale, présente l'avantage de s'appliquer aussi à des bruits non gaussiens. Ces solutions supposent que l'on peut tout programmer à l'avance : la nature et l'instant de déclenchement des signaux, et l'échantillonnage de l'observation. L'accent est mis en particulier sur le cas d'un bruit blanc gaussien, et le cas d'un bruit de Ornstein-Uhlenbeck.

Classification AMS : 62M02, 60G15

Mots-clés : signal d'alarme, détection, processus gaussien, processus markovien.

Abstract : *A surveillance device working in continuous time sends an alarm signal if what is under surveillance stops working correctly at any time, which we will call d. It is a matter of detecting this signal which is received superposed on a centered Markovian Gaussian noise of known covariance within a given detection period, as well as an imposed threshold for the probability of false alarm and of non-detection. We also have to estimate d.*

Manuscrit reçu sous forme définitive le 22 janvier 1992.

In this article we set out two complete solutions to these problems. The first is of classical inspiration, while the second, which is highly original, has the advantage of being able to be applied to non-Gaussian noises. These solutions presume that the signal, the instant the signal is set off and the sampling of the observation can be programmed beforehand. Particular attention is given to a Brownian noise and an Ornstein-Uhlenbeck noise.

AMS Classification : 62M02, 60G15

Key-words : alarm signal, signal detection, Gaussian processes, Markovian processes.

1 - PRESENTATION DES RESULTATS

1) Description du modèle

Imaginons une machine M surveillée à partir de l'instant $t = 0$ par un dispositif D qui enverra à l'instant δ un signal d'alarme $A_\delta \neq 0$ si le fonctionnement de la machine cesse d'être acceptable à partir d'un certain instant d. On a évidemment $\delta \geq d \geq 0$:

d est l'instant du début du mauvais fonctionnement de la machine,
δ est l'instant du déclenchement du signal de A_δ.

Le signal d'alarme éventuel n'est pas reçu tel quel puisqu'un bruit aléatoire lui est superposé. Plus précisément, on fait l'hypothèse que l'on enregistre une seule trajectoire :

$$X(t,\omega_0) = \theta(t) + B(t_0+t,\omega_0),\ t \geq 0 \tag{1}$$

d'un processus $X(t,\omega) = \theta(t) + B(t_0+t,\omega),\ t \geq 0,\ \omega \in \Omega$, où :
- θ est un signal appartenant à $\{0\} \cup \{A_\delta, \delta \geq 0\}$,
- t_0 est un instant ≥ 0 connu,
- $B = (B(t)\ ;\ t \geq 0) = (B(t,\omega)\ ;\ t \geq 0, \omega \in \Omega)$ est une f.a.r. de la forme :

$$\forall\, t \geq 0,\ B(t) = \psi(t)\, W\left(\frac{\varphi(t)}{\psi(t)}\right), \tag{2}$$

où φ et ψ sont deux fonctions connues, continues sur $[0,+\infty[$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall\ t \geq 0,\ \varphi(t) \geq 0 \text{ et } \psi(t) > 0 \\ \zeta = \dfrac{\varphi}{\psi} \text{ est strictement croissante sur } [0,+\infty[\end{cases} \tag{3}$$

et où $W = (W(t), t \geq 0)$ est un mouvement brownien ou, suivant un abus de langage très répandu en théorie du signal en temps continu (cf. [4], chap. VII), un bruit blanc gaussien, c'est-à-dire une f.a.r. gaussienne centrée dont la covariance est donnée par :

$$\forall\ t, s\ \geq 0, \quad E(W(t).W(s)) = \mathrm{Min}(t,s) \tag{4}$$

Il en résulte que la covariance K du processus observé X est une covariance triangulaire :

$$\forall\ t, s \geq 0,\ K(t,s) = E(B(t_0+t)B(t_0+s)) = \begin{cases} \psi(t_0+t)\varphi(t_0+s) \text{ si } s \leq t, \\ \psi(t_0+s)\varphi(t_0+t) \text{ si } t \leq s. \end{cases} \tag{5}$$

La classe des bruits B envisagés, définie par (2), comprend donc toutes les f.a.r. gaussiennes markoviennes centrées sur l'espace-temps $[0,+\infty[$ qui vérifient certaines hypothèses naturelles de régularité (cf. [8], 3.2). Des exemples sont donnés au paragraphe 3 ci-dessous.

2) Position du problème - Présentation des solutions

Les réels $\alpha \in]0,1[$ et $r > 0$ étant donnés, le problème est de détecter l'alarme éventuelle avec un retard de détection qui ne doit pas excéder r, autrement dit de détecter l'alarme avant l'instant $d + r$ si la machine a cessé de fonctionner correctement à l'instant inconnu d, et ceci de manière à ce que la probabilité de fausse alarme et la probabilité de non détection soient inférieures à α. On désire également estimer d.

r et α sont imposés a priori par la nature des installations, les exigences des utilisateurs, etc...

Comme α peut être arbitrairement petit, on peut penser qu'il s'agit d'un problème de détection singulière (cf. [5]), c'est-à-dire que les lois P_θ de X sous l'hypothèse "$\theta = 0$" et sous l'hypothèse "$\theta = A_\delta$" doivent être étrangères, quel que soit $\delta \geq 0$. En fait, il n'en est rien.

En effet, nous donnons dans ce papier deux solutions au problème posé en imaginant que l'on peut choisir les signaux et les instants d'observation du signal reçu $X(.,\omega_0)$. Ces choix sont faits en tenant compte de α et de r, et l'on verra qu'ils impliquent seulement que la distance en variations d_V des lois considérées vérifie :

$$\forall\ \delta \geq 0,\ \ d_V(P_0, P_{A_\delta}) \geq 1 - 2\alpha$$

au lieu de

$$\forall\ \delta \geq 0,\ \ d_V(P_0, P_{A_\delta}) = 1,$$

ce qui est le cas lorsque la détection est singulière.

La première solution proposée utilise une technique très classique puisqu'elle se base sur des statistiques linéaires des observations (après échantillonnage de $X(.,\omega_0)$), tandis que la seconde est originale : on montre que les lois P_0 et P_{A_δ}, $\delta \geq 0$ sont suffisamment séparées en montrant que les lois conditionnelles du modèle sous les hypothèses "$\theta = 0$" et "$\theta = A_\delta$" sont suffisamment éloignées, d'après un théorème de Geffroy (cf. [3], th. 1).

On a adopté le plan suivant : les calculs préliminaires de la première et de la deuxième méthodes sont faits au II et au III respectivement. Les tests qui en découlent utilisant ces résultats de manière quasiment identique sont présentés ensemble au IV, respectivement au IV.1 et au IV.4, qui sont donc les paragraphes les plus significatifs de ce travail dans lequel nous n'avons pas fait apparaître d'énoncés de théorème.

L'intérêt de la deuxième méthode est qu'elle conduit à des tests plus simples, et qu'elle peut s'appliquer à d'autres modèles que les modèles gaussiens, comme les modèles de Cauchy, que l'on utilise pour modéliser des bruits dont les lois instantanées sont à queue épaisse. L'étude de la détection d'un signal d'alarme dans un bruit de Cauchy markovien, pour laquelle la première méthode est totalement inopérante, sera publiée ultérieurement.

3) Exemples de bruits gaussiens markoviens

Nous nous intéresserons plus particulièrement au cas où $B = \sigma W$, $\sigma > 0$ connu, ainsi qu'au cas où B est un processus de Ornstein-Uhlenbeck, c'est-à-dire une f.a.r. gaussienne centrée de covariance :

$$\forall\ t,s \geq 0,\quad E(B(t).B(s)) = \sigma^2 e^{-\tau|t-s|}, \tag{6}$$

où σ et τ sont des réels > 0 connus.
Il s'agit bien d'un bruit du type (2) pour les fonctions φ et ψ suivantes :

$$\forall\, t \geq 0,\quad \varphi(t) = \sigma e^{\tau t},\ \psi(t) = \sigma e^{-\tau t}. \tag{7}$$

On rappelle que le processus de Ornstein-Uhlenbeck est solution de l'équation différentielle stochastique de Langevin (cf. [2], X.4.b, p. 335-336) et que c'est le processus gaussien markovien stationnaire centré le plus général (cf. [8], 3.2 ou [2], III.8.e, p. 99). Comme il s'agit d'un bruit stationnaire, l'introduction du paramètre t_0 est inutile. On supposera donc dans ce cas que $t_0 = 0$, et on écrira le modèle sous la forme :

$$\begin{cases} X(t,\omega_0) = \theta(t) + B(t,\omega_0),\ t \geq 0 \\ \qquad\quad\ = \theta(t) + \sigma e^{-\tau t} W(e^{2\tau t},\omega_0),\ t \geq 0. \end{cases} \tag{8}$$

En dehors de ces deux types de bruit aléatoire, l'étude qui suit s'applique aussi au cas où $(B(t),\ t \geq 0)$ est une famille de v.a.r. indépendantes gaussiennes centrées, et plus généralement au cas où B est un processus gaussien centré à accroissements indépendants (c'est d'ailleurs le cas du bruit blanc gaussien).

Pratiquement, on n'observe le signal reçu $X(.,\omega_0)$ que sur un intervalle de temps borné. On pourra donc aussi accepter l'hypothèse que B est le processus de Doob, ou l'un des processus W_λ et D_λ introduits par Varberg et cités dans [1]. Il s'agit des f.a.r. markoviennes gaussiennes centrées d'espace-temps $[0, A[$ définies à partir de (2) par :

- processus de Doob :

$$\forall\, t \in [0, A[,\quad \varphi(t) = \sigma \frac{t}{A},\ \psi(t) = \sigma\left(1 - \frac{t}{A}\right),$$

- processus W_λ, $0 < \lambda < \frac{\pi^2}{4}$:

$$\forall\, t \in [0, A[,\quad \varphi(t) = \sigma \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda}\,\frac{2t}{A}\right)}{\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda})},\ \psi(t) = \sigma \cos\left(\sqrt{\lambda}\left(1 - \frac{2t}{A}\right)\right),$$

- processus D_λ, $0 < \lambda < \pi^2$:

$$\forall\, t \in [0, A[,\quad \varphi(t) = \sigma \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda}\,\frac{t}{A}\right)}{\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda})},\ \psi(t) = \sigma \sin\left(\sqrt{\lambda}\left(1 - \frac{t}{A}\right)\right),$$

où les réels $\sigma > 0$, $A > 0$ et λ sont connus.

4) Echantillonnage de l'observation $X(.,\omega_0)$

On ne se soucie en fait que du bon fonctionnement de la machine entre l'instant 0 et un certain instant $T > 0$ donné. On se basera donc sur l'observation (1) réduite à l'intervalle de temps $[0, T+r]$, où r est le retard de détection maximum imposé. On supposera que : $0 < r < T$.
On échantillonnera l'observation $X(.,\omega_0)$ suivant la suite finie d'instants d'observation $(t_1,\dots,t_{n*})$ telle que :

$$\frac{r}{2} \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{n*} \leq T + r \tag{9}$$

et telle qu'en posant :

$$J = \text{Min}\,(\{j\,;j \geq 1 \text{ et } j\frac{r}{2} \geq T\}), \tag{10}$$

il y ait au moins deux instants d'observation dans chacun des intervalles $[\frac{r}{2}, r[, \dots, [J\,\frac{r}{2}, (J+1)\,\frac{r}{2}[$.
On pourra alors choisir des indices $n'(1),\dots,n'(J),n''(1),\dots,n''(J)$ tels que :

$$\begin{cases} \text{pour } j = 1,\dots,J \\ j\,\frac{r}{2} \leq t_{n'(j)} < t_{n''(j)} < (j+1)\frac{r}{2}\,. \end{cases} \tag{11}$$

5) Limitation du nombre des signaux d'alarme utilisés

Nous utiliserons seulement J signaux d'alarme notés plus simplement $A_1,\dots,A_J$ dont les instants de déclenchement éventuel seront respectivement $t_{n'(1)},\dots,t_{n'(J)}$. Plus précisément,
- si $0 \leq d \leq \frac{r}{2}$, le dispositif D déclenchera un signal d'alarme noté A_1 à l'instant $t_{n'(1)}$,
- si $(j-1)\frac{r}{2} < d \leq j\,\frac{r}{2}$, pour $j = 2,\dots,J-1$, il déclenchera un signal d'alarme noté A_j à l'instant $t_{n'(j)}$,
- si $(J-1)\frac{r}{2} < d \leq T$, un signal d'alarme noté A_J sera déclenché à l'instant $t_{n'(J)}$.

Pour le moment, on suppose seulement que :

pour $j = 1,...,J$, le signal d'alarme A_j (12)
- est nul sur $[0,t_{n'(j)}[\cup]t_{n''(j)},T+r]$,
- et n'est pas identiquement nul sur $[t_{n'(j)},t_{n''(j)}]$.

On a ainsi simplifié considérablement le problème puisque l'ensemble Θ de toutes les valeurs possibles de θ est devenu fini. Il s'agit maintenant de :

$$\Theta = \{0\} \cup \{A_j, j = 1,...,J\}. \tag{13}$$

II - CALCULS PRELIMINAIRES POUR LE TEST BASE SUR DES STATISTIQUES LINEAIRES DES OBSERVATIONS

1) Choix des signaux et des instants d'observation

Etant donné j appartenant à $\{1,...,J\}$ et puisque ζ est une fonction continue et strictement croissante, l'image de l'intervalle $[j\frac{r}{2}, (j+1)\frac{r}{2}[$ par la fonction $\zeta(t_0+.)$ est $[\zeta(t_0+j\frac{r}{2}), \zeta(t_0+(j+1)\frac{r}{2})[$. $n(j)$ désignant un entier ≥ 1 qui sera choisi ultérieurement, divisons ce dernier intervalle en $2n(j)$ sous-intervalles consécutifs de même longueur égale à :

$$p_j = \frac{1}{2n(j)}\left(\zeta(t_0+(j+1)\frac{r}{2}) - \zeta(t_0+j\frac{r}{2})\right) \tag{14}$$

à l'aide des points de subdivision $t^*_{j,1},...,t^*_{j,2n(j)}$ définis par :

$$\text{pour } n = 1,...,2n(j),\ t^*_{j,n} = \zeta(t_0+j\frac{r}{2}) + (n-1)p_j\,. \tag{15}$$

La famille

$$\bigcup_{j=1}^{J} \{t^*_{j,1},...,t^*_{j,2n(j)}\}$$

de tous ces points de subdivision rangés dans l'ordre croissant étant notée $(t_1^*,\ldots,t_{n^*}^*)$, on définira la suite $(t_1,\ldots,t_{n^*})$ des instants d'observation du signal reçu, ainsi que les suites $(n'(1),\ldots,n'(J))$ et $(n''(1),\ldots,n''(J))$ (voir (11)) par :

$$\begin{cases} \text{pour } n = 1,\ldots,n^*,\ \zeta(t_0 + t_n) = t_n^* \\ \text{pour } j = 1,\ldots,J,\ t_{n'(j)} = j\,\frac{r}{2},\ \zeta(t_0 + t_{n''(j)}) = \zeta(t_0 + (j+1)\frac{r}{2}) - p_j \end{cases} \tag{16}$$

Enfin, les signaux d'alarme A_j seront définis, pour $j = 1,\ldots,J$, par :

$$\begin{cases} \forall\ t \in [0, T+r], \\ A_j(t) = \frac{a}{2}\,\psi(t_0 + t)\sin\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{p_j}\left(\zeta(t_0+t) - \zeta(t_0 + j\,\frac{r}{2})\right)\right) 1_{[j\frac{r}{2},t_{n''(j)}]}(t) \end{cases} \tag{17}$$

où a désigne un réel > 0 donné. Par conséquent, ils vérifieront la condition (12). On utilisera donc, en gros, des signaux oscillants, ce qui est naturel. Par contre, sauf cas particulier (voir 4a ci-dessous : cas $B = \sigma W$), les instants d'observation $t_1,\ldots,t_{n^*}$ ne seront pas régulièrement espacés.

2) Choix des statistiques linéaires des observations

On considère donc le modèle général décrit par (1), (2) et (3), soit :

$$X(t,\omega_0) = \theta(t) + \psi(t_0 + t)W(\zeta(t_0 + t),\omega_0),\quad 0 \le t \le T + r, \tag{18}$$

auquel on associe les statistiques $S_1,\ldots,S_J$ suivantes :

$$\begin{cases} \text{pour } j = 1,\ldots,J, \\ S_j = \dfrac{1}{n(j)} \displaystyle\sum_{k=0}^{n(j)-1} \left(\dfrac{X(t_{n'(j)+2k+1})}{\psi(t_0 + t_{n'(j)+2k+1})} - \dfrac{X(t_{n'(j)+2k})}{\psi(t_0 + t_{n'(j)+2k})}\right) \end{cases} \tag{19}$$

Comme W est un processus gaussien à accroissements indépendants, et puisque $W(u) - W(v)$ suit la loi $\mathcal{N}(0,|u-v|)$, quel que soit j appartenant à $\{1,\ldots,J\}$ et quel que soit le signal émis θ, S_j suit, d'après (18) et (19), une loi normale dont la variance σ_j^2, indépendante de θ, est donnée par :

$$\sigma_j^2 = \frac{1}{n^2(j)} \sum_{k=0}^{n(j)-1} (\zeta(t_0 + t_{n'(j)+2k+1}) - \zeta(t_0 + t_{n'(j)+2k})),$$

soit, d'après (14), (15) et (16), par :

$$\begin{cases} \text{pour } j = 1,\dots,J, \\ \sigma_j^2 = \dfrac{\zeta(t_0 + (j+1)\frac{r}{2}) - \zeta(t_0 + j\frac{r}{2})}{2n^2(j)} \end{cases} \tag{20}$$

L'espérance $E_\theta(S_j)$ de S_j, sous l'hypothèse θ, vérifie quant à elle, d'après (17), (18) et (19) :

$$\begin{cases} \forall\, j \in \{1,\dots,J\}, \\ E_0(S_j) = 0 = E_{A_{j'}}(S_j), \text{ si } j' \neq j, \\ E_{A_j}(S_j) = a. \end{cases} \tag{21}$$

3) Régions critiques du test annoncé

Nous définissons ces régions critiques $C_1^*,\dots,C_J^*$ par :

$$\forall\, j \in \{1,\dots,J\},\ C_j^* = \{|S_j| > \tfrac{a}{2}\}\ . \tag{22}$$

D'après (20) et (21), elles vérifient bien évidemment :
$\forall\, j \in (1,\dots,J\}$,

$$\begin{cases} \mathrm{Prob}_0(C_j^*) = 2\Big(1 - F\Big(\dfrac{an(j)}{\sqrt{2(\zeta(t_0 + (j+1)\frac{r}{2}) - \zeta(t_0 + j\frac{r}{2}))}}\Big)\Big) \\ \qquad = \mathrm{Prob}_{A_{j'}}(C_j^*), \text{ si } j' \neq j, \\ \mathrm{Prob}_{A_j}(C_j^*) \geq 2F\Big(\dfrac{an(j)}{\sqrt{2(\zeta(t_0 + (j+1)\frac{r}{2}) - \zeta(t_0 + j\frac{r}{2}))}}\Big) - 1, \end{cases} \tag{23}$$

où F désigne la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.
L'usage de ces régions critiques sera précisé au IV.

4) Cas particuliers

a) Cas d'un bruit blanc gaussien $B = \sigma W$

Dans ce cas, on a $\psi(t) = \sigma$ et $\zeta(t) = t$, pour tout $t \geq 0$, et on supposera que $n(1) = ... = n(J) = N$, où N désigne un entier ≥ 1 qui sera choisi ultérieurement. On vérifie alors :

- que la suite $(t_1,...,t_{n*})$ des instants d'observation satisfait à :

$$\begin{cases} n^* = 2NJ, \\ \forall\ n \in \{1,...,2NJ\},\ t_n = \frac{r}{2} + (n-1)\frac{r}{4N} \end{cases}, \tag{24}$$

- que les signaux d'alarme utilisés sont les suivants :

$$\begin{cases} \forall\ j \in \{1,...,J\} \text{ et } \forall\ t \in [0,T+r], \\ A_j(t) = \frac{a\sigma}{2} \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{4N\pi}{r}\left(t - j\frac{r}{2}\right)\right) 1_{[j\frac{r}{2},(j+1)\frac{r}{2} - \frac{r}{4N}]}(t), \end{cases} \tag{25}$$

- et que les régions critiques $C_1^*,...,C_J^*$ données par :

$$\begin{cases} \forall\ j \in \{1,...,J\}, \\ C_j^* = \{\frac{1}{\sigma N} \left| \sum\limits_{k=0}^{N-1} \left(X\left(j\frac{r}{2} + (2k+1)\frac{r}{4N}\right) - X\left(j\frac{r}{2} + \frac{kr}{2N}\right)\right) \right| > \frac{a}{2}\} \end{cases} \tag{26}$$

vérifient :
$\forall\ j \in \{1,...,J\}$,

$$\begin{cases} \mathrm{Prob}_0(C_j^*) = 2\left(1 - F\left(\frac{aN}{\sqrt{r}}\right)\right) \\ \qquad\qquad = \mathrm{Prob}_{A_{j'}}(C^*_j),\ \text{si } j' \neq j, \\ \mathrm{Prob}_{A_j}(C_j^*) \geq 2F\left(\frac{aN}{\sqrt{r}} - 1\right). \end{cases} \tag{27}$$

Dans le cas d'un bruit blanc gaussien, nous utilisons donc des instants d'observation régulièrement espacés, et les signaux d'alarme sont exactement des sinusoïdes.

b) Cas d'un bruit de Ornstein-Uhlenbeck

On a vu que dans ce cas, il est légitime de poser $t_0 = 0$ et que pour tout $t \geq 0$, on a : $\psi(t) = \sigma e^{-\tau t}$ et $\zeta(t) = e^{2\tau t}$.

Etant donné des entiers positifs n(1),...,n(J), qui seront choisis plus tard, on vérifie que :

$$\forall\, j \in \{1,\ldots,J\},\ p_j = \frac{e^{\tau jr}(e^{\tau r} - 1)}{2n(j)}, \tag{28}$$

ainsi que

$$\begin{cases} \forall\, j \in \{1,\ldots,J\},\ n'(j) = 2\,(\sum\limits_{k=1}^{j-1} n(k)) + 1 \text{ et } n''(j) = 2 \sum\limits_{k=1}^{j} n(k), \\ \forall\, n \in \{n'(j),\ldots,n''(j)\},\ t_n = \dfrac{1}{2\tau} \lg(e^{\tau jr} + (n - n'(j))p_j), \\ n^* = n''(J). \end{cases} \tag{29}$$

Il en résulte que les signaux d'alarme et les statistiques utilisés vérifient :

$$\begin{cases} \forall\, j \in \{1,\ldots,J\} \text{ et } \forall\, t \in [0,T+r], \\ A_j(t) = \dfrac{a\sigma}{2} e^{-\tau t} \sin\left(-\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{p_j}(e^{2\tau t} - e^{\tau jr})\right) 1_{[j\frac{r}{2},\, t_{n''(j)}]}(t), \end{cases} \tag{30}$$

$$\begin{cases} \forall\, j \in \{1,\ldots,J\}, \\ S_j = \dfrac{1}{\sigma n(j)} \sum\limits_{k=0}^{n(j)-1} \Big(\sqrt{e^{\tau jr} + (2k+1)p_j}\ X\big(\tfrac{1}{2\tau} \lg(e^{\tau jr} + (2k+1)p_j)\big) \\ \qquad - \sqrt{e^{\tau jr} + 2kp_j}\ X\big(\tfrac{1}{2\tau} \lg(e^{\tau jr} + 2kp_j)\big)\Big)\ . \end{cases} \tag{31}$$

Enfin, les régions critiques $C_1^*,\ldots,C_J^*$ définies par (22) à partir de $S_1,\ldots,S_J$ satisfont à :
$\forall\, j \in \{1,\ldots,J\}$,

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{Prob}_0(C_j^*) = 2\left(1 - F\left(\dfrac{an(j)}{e^{\tau j \frac{r}{2}}\sqrt{2(e^{\tau r}-1)}}\right)\right) \\[2ex] \qquad = \mathrm{Prob}_{A_{j'}}(C_j^*), \text{ si } j' \neq j, \\[2ex] \mathrm{Prob}_{A_j}(C_j^*) \geq 2F\left(\dfrac{an(j)}{e^{\tau j \frac{r}{2}}\sqrt{2(e^{\tau r}-1)}}\right) - 1. \end{array}\right. \tag{32}$$

III - CALCULS PRELIMINAIRES POUR LE TEST BASE SUR L'ELOIGNEMENT DES LOIS CONDITIONNELLES

1) Rappel du modèle considéré

On revient au modèle général (1), la suite des instants d'observation étant décrite de (9) à (11) (ce n'est pas nécessairement une progression arithmétique), et le problème étant réduit comme en I.5. En particulier, les J signaux d'alarme possibles vérifient (12).

2) Notations relatives aux lois conditionnelles du modèle

Pour $j = 1,\dots,J$ et pour $n = n'(j) + 1,\dots,n''(j)$, on pose :

$$\Delta_n = A_j(t_n) - \frac{\psi(t_0 + t_n)}{\psi(t_0 + t_{n-1})} A_j(t_{n-1}), \tag{33}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma_n^2 = \dfrac{\psi(t_0+t_n)}{\psi(t_0+t_{n-1})}\left(\varphi(t_0+t_n)\psi(t_0+t_{n-1}) - \varphi(t_0+t_{n-1})\psi(t_0+t_n)\right) \\ \quad = \psi^2(t_0+t_n)\left(\zeta(t_0+t_n) - \zeta(t_0+t_{n-1})\right), \end{array}\right. \tag{34}$$

$$d_n = 2F\left(\frac{|\Delta_n|}{2\sigma_n}\right) - 1. \tag{35}$$

Interprétation de ces quantités

Comme $(X(t), t \geq 0)$ est une f.a.r. gaussienne, on sait que la loi conditionnelle de $X(t_n)$ sachant que $X(t_{n'(j)}) = x_{n'(j)},\ldots,X(t_{n-1}) = x_{n-1}$ est, sous l'hypothèse θ, la loi normale de variance σ_n^2 et de moyenne :

$$M_\theta(x_{n-1}) = \theta(t_n) - \frac{\psi(t_0 + t_n)}{\psi(t_0 + t_{n-1})}(\theta(t_{n-1}) - x_{n-1}). \tag{36}$$

On la notera $P_\theta^{x_{n-1}}$. Son espérance $M_\theta(x_{n-1})$ ne dépend de $(x_{n'(j)},\ldots,x_{n-1})$ que par la dernière composante x_{n-1}, parce que la f.a.r. X est markovienne. Il en résultera des calculs faciles, mais la méthode que nous employons ci-dessous s'applique en fait à un bruit gaussien quelconque, sous réserve que l'on puisse mener à bien les calculs nécessaires, et même à d'autres types de bruits, comme nous l'avons déjà signalé (cf. I.2).

En particulier, on a :

$$\begin{cases} P_0^{x_{n-1}} = P_{A_{j'}}^{x_{n-1}} = \mathcal{N}\left(\dfrac{\psi(t_0+t_n)}{\psi(t_0+t_{n-1})}x_{n-1}, \sigma_n^2\right), \text{ si } j' \neq j, \\ P_{A_j}^{x_{n-1}} = \mathcal{N}(\Delta_n + \dfrac{\psi(t_0+t_n)}{\psi(t_0+t_{n-1})}x_{n-1}, \sigma_n^2). \end{cases} \tag{37}$$

Par conséquent, la distance en variations entre ces lois conditionnelles est indépendante de x_{n-1} et égale à la quantité d_n définie par (35), soit :

$$\forall\, x_{n-1} \in \mathbb{R},\ d_n = d_V(P_0^{x_{n-1}}, P_{A_j}^{x_{n-1}}) = d_V(P_{A_{j'}}^{x_{n-1}}, P_{A_j}^{x_{n-1}}), \text{ si } j' \neq j \tag{38}$$

3) Séparation des lois conditionnelles

On sait que si P et Q sont deux mesures de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ admettant respectivement les densités f et g, on a :

$$d_V(P,Q) = P(\{f \geq g\}) - Q(\{f \geq g\}) = P(\{f > g\}) - Q(\{f > g\}).$$

En appliquant ce résultat à $P_0^{x_{n-1}}$ et $P_{A_j}^{x_{n-1}}$, on en déduit que si l'on pose :

$\forall\, x_{n-1} \in \mathbb{R}$,

$$B_n(x_{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{R}\,,\ \text{si } \Delta_n = 0, \\ ]-\infty, \frac{1}{2}\Delta_n + \dfrac{\psi(t_0+t_n)}{\psi(t_0+t_{n-1})}\, x_{n-1}],\ \text{si } \Delta_n > 0, \\ ]\frac{1}{2}\Delta_n + \dfrac{\psi(t_0+t_n)}{\psi(t_0+t_{n-1})}\, x_{n-1}, +\infty[,\ \text{si } \Delta_n < 0, \end{cases} \tag{39}$$

on a

$$\begin{cases} \text{si } j' \neq j \\ P_{A_{j'}}^{x_{n-1}}(B_n(x_{n-1})) = P_0^{x_{n-1}}(B_n(x_{n-1})) = d_n + P_{A_j}^{x_{n-1}}(B_n(x_{n-1})). \end{cases} \tag{40}$$

De plus, les probabilités $P_0^{x_{n-1}}(B_n(x_{n-1}))$ et $P_{A_j}^{x_{n-1}}(B_n(x_{n-1}))$ ne dépendant pas de x_{n-1} peuvent être notées p_n et q_n, et vérifient :

$$\text{si } \Delta_n \neq 0,\ p_n + q_n = 1.$$

4) Séparation des lois n-dimensionnelles

D'après (40), on peut appliquer le théorème de Geffroy déjà cité qui postule que si C_j^* désigne le borélien de $\mathbb{R}^{n''(j)-n'(j)+1}$ défini par :

$$C_j^* = \{(x_{n'(j)},\ldots,x_{n''(j)})\ ;\ \sum_{n=n'(j)+1}^{n''(j)} d_n 1_{B_n(x_{n-1})}(x_n) < \frac{1}{2} \sum_{n=n'(j)+1}^{n''(j)} d_n\} \tag{41}$$

on a

$$\left\{\begin{array}{l} \forall\, j,j' \in \{1,\ldots,J\} \text{ tels que } j' \neq j, \\ P_{A_j}^{(n'(j),n''(j))}(C_j^*) \geq 1 - \exp\left(-\frac{3}{8}\sum\limits_{n=n'(j)+1}^{n''(j)} d_n^2\right), \\ P_0^{(n'(j),n''(j))}(C_j^*) \leq \exp\left(-\frac{3}{8}\sum\limits_{n=n'(j)+1}^{n''(j)} d_n^2\right), \\ P_{A_{j'}}^{(n'(j),n''(j))}(C_j^*) \leq \exp\left(-\frac{3}{8}\sum\limits_{n=n'(j)+1}^{n''(j)} d_n^2\right), \end{array}\right. \tag{42}$$

où, pour tout couple d'entiers (p,q) tels que $1 \leq p \leq q \leq n''(J)$, $P_\theta^{(p,q)}$ désigne la loi du vecteur $(X(t_p),\ldots,X(t_q))$ sous l'hypothèse θ, et où le coefficient $\frac{3}{8}$ provient, non pas du théorème de Geffroy, mais d'une version améliorée de celui-ci ([4], th. 2).

Si l'on pose :

$$C_j = \mathbb{R}^{n'(j)-1} \times C_j^* \times \mathbb{R}^{n''(J)-n''(j)}, \tag{43}$$

les inégalités (42) se traduisent par :

$$\left\{\begin{array}{l} \forall\, j,j' \in \{1,\ldots,J\} \text{ tels que } j' \neq j, \\ P_{A_j}^{(1,n''(J))}(C_j) \geq 1 - \exp\left(-\frac{3}{8}\sum\limits_{n=n'(j)+1}^{n''(j)} d_n^2\right), \\ P_0^{(1,n''(J))}(C_j) \leq \exp\left(-\frac{3}{8}\sum\limits_{n=n'(j)+1}^{n''(j)} d_n^2\right), \\ P_{A_{j'}}^{(1,n''(J))}(C_j) \leq \exp\left(-\frac{3}{8}\sum\limits_{n=n'(j)+1}^{n''(j)} d_n^2\right). \end{array}\right. \tag{44}$$

Autre expression des C_j

Il est facile de vérifier que si pour $j = 1,\ldots,J$ et pour $n = n'(j) + 1,\ldots,n''(j)$, on pose :

$$\varepsilon_n(x,y) = \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2} \text{ si } y - \dfrac{\psi(t_0 + t_n)}{\psi(t_0 + t_{n-1})}\, \dot{x} \;\leq\; \frac{1}{2}\Delta_n, \\ -\frac{1}{2} \text{ sinon}, \end{array}\right. \tag{45}$$

on a, d'après (39), (41) et (43) :

$\forall$ j $\in$ {1,...,J}, C_j est l'ensemble des n"(J)-uples $(x_1,...,x_{n''(J)})$ tels que :

$$\sum_{n=n'(j)+1,\Delta_n>0}^{n''(j)} d_n\, \varepsilon_n(x_{n-1},x_n) < \sum_{n=n'(j)+1,\Delta_n<0}^{n''(j)} d_n \varepsilon_n(x_{n-1},x_n). \tag{46}$$

5) Cas particuliers

Ils seront étudiés à la fin de l'article, au IV.6.

IV - DESCRIPTION DES TESTS DE DETECTION D'UN SIGNAL D'ALARME PROPOSES

Nous utiliserons de manière analogue les résultats établis au II et au III.

1) Description du test basé sur des statistiques linéaires des observations

Ce test est basé exclusivement sur le n*-uple $(x_1,...,x_{n^*})$, où

$$n^* = 2(n(1) + ... + n(J)),$$

défini par :

$$(x_1,...,x_{n^*}) = (X(t_1,\omega_0),...,X(t_{n^*},\omega_0)). \tag{47}$$

En référence à (19) et à (20), on calcule successivement, pour j = 1,...,J, les quantités :

$$s_j = \frac{1}{n(j)} \sum_{k=0}^{n(j)-1} \left(\frac{x_{n'(j)+2k+1}}{\psi(t_0 + t_{n'(j)+2k+1})} - \frac{x_{n'(j)+2k}}{\psi(t_0 + t_{n'(j)+2k})} \right).$$

Il importe de remarquer que le calcul de s_j , qui utilise seulement les mesures $x_{n'(j)},...,x_{n''(j)}$, se fait à l'instant $t_{n''(j)}$, donné par (16) et qui vérifie :

$$t_{n''(j)} < (j + 1)\frac{r}{2}. \tag{48}$$

On applique le test comme suit :

Si $|s_1| \leq \frac{a}{2}$,..., $|s_J| \leq \frac{a}{2}$, on accepte à l'instant $t_{n''(j)}$, successivement pour $j = 1,...,J$, l'hypothèse que le signal d'alarme A_j ne s'est pas déclenché. On conclut donc que la machine M a fonctionné correctement jusqu'à l'instant T.

Sinon, et si j_0 désigne le premier indice j tel que $|s_j| > \frac{a}{2}$, on accepte à l'instant $t_{n''(j_0)}$ l'hypothèse que le signal A_{j_0} s'est déclenché, et on estimera l'instant d où la machine a cessé de fonctionner correctement par :

$$\bar{d} = t_{n'(j_0)} = j_0 \frac{r}{2} . \tag{49}$$

2) Propriétés statistiques de ce test

Pour $j = 1,...,J$, considérons l'ouvert C_j de $\mathbb{R}^{n^*}$, ensemble des n^*-uples $(x_1,...,x_{n^*})$ tels que :

$$\frac{1}{n(j)} \left| \sum_{k=0}^{n(j)-1} \left(\frac{x_{n'(j)+2k+1}}{\psi(t_0 + t_{n'(j)+2k+1})} - \frac{x_{n'(j)+2k}}{\psi(t_0 + t_{n'(j)+2k})} \right) \right| > \frac{a}{2}$$

et notons P_θ^* la loi du vecteur aléatoire $(X(t_1),...,X(t_{n^*}))$ sous l'hypothèse θ. On déduit de (19), (22), (23) et (47) que :

pour $j = 1,...,J$,

$$\left\{ \begin{aligned} P_0^*(C_j) &= 2(1 - F(\frac{an(j)}{\sqrt{2(\zeta(t_0 + (j+1)\frac{r}{2}) - \zeta(t_0 + j\frac{r}{2}))}})) \\ &= P_{A_{j'}}^*(C_j), \text{ si } j' \neq j, \\ P_{A_j}^*(C_j) &\geq 2F(\frac{an(j)}{\sqrt{2(\zeta(t_0 + (j+1)\frac{r}{2}) - \zeta(t_0 + j\frac{r}{2}))}}) - 1. \end{aligned} \right. \tag{50}$$

Probabilité de fausse alarme α_{fa}

Par construction du test, et d'après (50), on a évidemment :

$$\alpha_{fa} = P_0^*\left(\bigcup_{j=1}^{J} C_j\right) \leq A \tag{51}$$

où l'on a posé :

$$A = 2\sum_{j=1}^{J}\left(1 - F\left(\frac{an(j)}{\sqrt{2(\zeta(t_0 + (j+1)\frac{r}{2}) - \zeta(t_0 + j\frac{r}{2}))}}\right)\right). \tag{52}$$

Probabilité de non détection α_{nd}

Si le signal d'alarme A_j se déclenche, ce signal sera détecté à l'instant $t_{n''(j)}$ vérifiant (48) si $|s_1| \leq \frac{a}{2}, \ldots, |s_{j-1}| \leq \frac{a}{2}$ et $|s_j| > \frac{a}{2}$. Le domaine de détection de A_j est donc le borélien D_j de $\mathbb{R}^{n^*}$ suivant :

$$D_j = \left(\bigcap_{k=1}^{j-1} (\mathbb{R}^{n^*} - C_k)\right) \cap C_j . \tag{53}$$

Il en résulte que la probabilité de non détection du signal d'alarme A_j sous l'hypothèse "$\theta = A_j$" vérifie :

$$P_{A_j}^*(\mathbb{R}^{n^*} - D_j) \leq 2 \sum_{k=1}^{j}\left(1 - F\left(\frac{an(k)}{\sqrt{2(\zeta(t_0 + (k+1)\frac{r}{2}) - \zeta(t_0 + k\frac{r}{2}))}}\right)\right),$$

ce qui montre que :

$$P_{A_j}^*(\mathbb{R}^{n^*} - D_j) \leq A , \tag{54}$$

d'après (50) et (52), et donne, pour la probabilité de non détection :

$$\alpha_{nd} = \mathrm{Max}(\{P_{A_j}^*(\mathbb{R}^{n^*} - D_j) \ ; j = 1,\ldots,J\}) \leq A. \tag{55}$$

Retard de détection et estimation de d

Soit $j \in \{1,...,J\}$. Si le signal A_j est déclenché, d appartient nécessairement à l'intervalle $[(j-1)\frac{r}{2}, j\frac{r}{2}]$, d'après I.5. De plus, si l'événement D_j est réalisé (ce qui, d'après (54), a lieu avec une probabilité au moins égale à $1 - A$, sous l'hypothèse "$\theta = A_j$"), ce signal A_j est détecté à l'instant $t_{n''(j)}$, et d'après (49), on a :

$$|d - \bar{d}| \le \frac{r}{2}. \tag{56}$$

Par conséquent, avec une probabilité au moins égale à $1 - A$, le retard de détection maximum est respecté, d'après (48) et d est estimé par excès avec une erreur majorée par $\frac{r}{2}$.

En résumé, si l'on choisit les entiers $n(1),...,n(J)$ de manière à ce que l'on ait :

$$A \le \alpha, \tag{57}$$

le test que nous venons de décrire répond entièrement au problème posé en I.2. En effet, d'après (51) et (55), les probabilités de fausse alarme et de non détection sont alors majorées par α, tout signal qui se déclencherait est détecté dans un délai majoré par r avec une probabilité au moins égale à $1 - \alpha$ et son instant de déclenchement est estimé par excès avec une erreur inférieure à $\frac{r}{2}$.

3) Cas particuliers

a) On rappelle que dans le cas d'un bruit blanc gaussien (cf. II.4.a), σ est supposé connu, $a > 0$ et N (valeur commune de $n(1),...,n(J)$) sont à choisir, tandis que $\alpha \in]0,1[$ et r sont imposés.

[ ] désignant la fonction partie entière, il suffit que l'on ait :

$$N = 1 + [\frac{\sqrt{r}}{a} F^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2J})] \tag{58}$$

pour que la condition-clef (57) soit satisfaite.

On constate alors que le test considéré conduit à un résultat particulièrement simple puisque, d'après (26), on a :

$$\begin{cases} \text{pour } j = 1,\dots,J, \\ s_j = \dfrac{1}{\sigma N} \left| \sum_{k=0}^{N-1} (x_{2N(j-1)+2k+2} - x_{2N(j-1)+2k+1}) \right| \end{cases} .$$

b) Le cas d'un bruit de Ornstein-Uhlenbeck (cf. II.4.b) est lui aussi très simple. Notons seulement que d'après (32), il suffira, pour que la condition (57) soit satisfaite, que les entiers $n(1),\dots,n(J)$ soient choisis de manière à ce que l'on ait :

$$\sum_{j=1}^{J} \left(1 - F\left(\frac{an(j)}{e^{\tau j \frac{r}{2}} \sqrt{2(e^{\tau r} - 1)}}\right)\right) \leq \frac{\alpha}{2}, \tag{59}$$

où $\tau > 0$ est supposé connu et où $a > 0$ est choisi quand on choisit les signaux $A_1,\dots,A_J$.

4) Description du test basé sur l'éloignement des lois conditionnelles

On peut supposer que la suite des instants d'observation $(t_1,\dots,t_{n^*})$ (voir (9), (10) et (11)) est exactement la suite :

$$(t_{n'(1)},\dots,t_{n''(1)},t_{n'(2)},\dots,t_{n''(2)},\dots,t_{n'(J)},\dots,t_{n''(J)}) ,$$

si bien que $n'(1) = 1$ et $n''(J) = n^*$.
Le deuxième test repose sur le n^*-uple :

$$(x_1,\dots,x_{n^*}) = (X(t_1,\omega_0),\dots,X(t_{n^*},\omega_0)).$$

En référence à (46), pour $j = 1,\dots,J,$ on calcule à l'instant $t_{n''(j)}$ vérifiant (48) les quantités :

$$a_j = \sum_{n=n'(j)+1,\Delta_n>0}^{n''(j)} d_n\varepsilon_n(x_{n-1},x_n) \quad \text{et} \quad b_j = \sum_{n=n'(j)+1,\Delta_n<0}^{n''(j)} d_n\varepsilon_n(x_{n-1},x_n).$$

Si $a_1 \geq b_1,\dots,a_J \geq b_J$, on accepte successivement à chacun des instants $t_{n''(j)}, j = 1,\dots,J$ l'hypothèse que le signal d'alarme A_j ne s'est pas déclenché. Sinon, et si j_0 désigne le premier indice j tel que $a_j < b_j$, on rejette à l'instant $t_{n''(j_0)}$ l'hypothèse "$\theta = 0$", on admet l'hypothèse que le signal d'alarme A_{j_0} s'est déclenché à l'instant $t_{n'(j_0)}$ et on pose :

$$\hat{d} = t_{n'(j_0)} ,$$

valeur estimée de l'instant d où la machine M a cessé de fonctionner correctement.

5) Propriétés statistiques du deuxième test

a) Ce test s'appliquant de manière analogue au précédent, on évalue les probabilités de fausse alarme et de non détection comme ci-dessus, à partir de (44) et de (46), et on obtient :

$$\alpha_{fa} \leq S \quad \text{et} \quad \alpha_{nd} \leq S,$$

où

$$S = \sum_{j=1}^{J} \exp\Big(-\frac{3}{8} \sum_{n=n'(j)+1}^{n''(j)} d_n^2\Big). \tag{60}$$

On peut faire exactement les mêmes considérations que pour le premier test en ce qui concerne le retard de détection et l'estimation de d.

Finalement, le second test est solution du problème posé si :

$$S \leq \alpha . \tag{61}$$

Il reste à démontrer que cette condition peut toujours être satisfaite par un choix convenable des signaux et des instants d'observation.

Etant donné J entiers $n(1),\dots,n(J) \geq 1$, posons :

$$\begin{cases} \forall\ j \in \{1,\dots,J\},\ n'(j) = 2\,\Big(\sum_{k=1}^{j-1} n(k)\Big) + 1 \ \text{ et } \ n''(j) = 2 \sum_{k=1}^{j} n(k) \\ \forall\ n \in \{n'(j),\dots,n''(j)\},\ t_n = j\,\frac{r}{2} + (n - n'(j))\,\frac{r}{4n(j)} \\ n^* = n''(J), \end{cases} \tag{62}$$

ce qui donne la suite des instants d'observation, et définissons les signaux d'alarme par :

$$\begin{cases} \forall\ j \in \{1,\dots,J\} \text{ et } \forall\ t \in [0,T+r], \\ A_j(t) = \frac{a}{2} \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{4n(j)\pi}{r}\left(t - \frac{jr}{2}\right)\right) 1_{[j\frac{r}{2}, t_{n''(j)}]}(t) \end{cases} \quad (63)$$

D'après (33) et (35), nous en déduisons que :

$$\begin{cases} \forall\ j \in \{1,\dots,J\} \text{ et } \forall\ n \in \{n'(j)+1,\dots,n''(j)\} \\ d_n = 2F\left(\dfrac{a\left(1 + \frac{\psi(t_0+t_n)}{\psi(t_0+t_{n-1})}\right)}{4\psi(t_0+t_n)\sqrt{\zeta(t_0+t_n) - \zeta(t_0+t_{n-1})}}\right) - 1. \end{cases} \quad (64)$$

Les fonctions ψ et ζ étant continues sur $[t_0+j\frac{r}{2}, t_0+(j+1)\frac{r}{2}]$, pour $j = 1,\dots,J$, on peut poser :

- $m_j = \mathrm{Min}(\{\psi(t)\ ;\ t_0 + j\frac{r}{2} \le t \le t_0 + (j+1)\frac{r}{2}\})$,
- $M_j = \mathrm{Max}(\{\psi(t)\ ;\ t_0 + j\frac{r}{2} \le t \le t_0 + (j+1)\frac{r}{2}\})$,
- $\forall\ u > 0,\ w_j(u) =$

$$\mathrm{Max}(\{|\zeta(x) - \zeta(y)|\ ;\ t_0 + j\tfrac{r}{2} \le x, y \le t_0 + (j+1)\tfrac{r}{2}, |x-y| \le u\}).$$

Il est clair, d'après (3), que pour $j = 1,\dots,J$, on a :

$$m_j > 0 \text{ et } w_j(u) \underset{u\to 0_+}{\longrightarrow} 0. \quad (65)$$

A l'aide de ces quantités, on peut minorer la distance en variations d_n, donnée en (64), par :

$$d_n \ge 2\,F\left(\frac{a\left(1 + \frac{m_j}{M_j}\right)}{4M_j\sqrt{w_j\left(\frac{r}{4n(j)}\right)}}\right) - 1,$$

ce qui donne pour S la majoration suivante :

$$S \le \sum_{j=1}^{J} \exp\left(-\frac{3(2n(j)-1)}{8}\left(2F\left(\frac{a\left(1 + \frac{m_j}{M_j}\right)}{4M_j\sqrt{w_j\left(\frac{r}{4n(j)}\right)}}\right) - 1\right)^2\right) \quad (66)$$

et montre qu'il suffit de choisir $n(1),\dots,n(J)$ assez grands pour que la condition (61) soit satisfaite, d'après (65).

6) Cas particuliers

a) Cas d'un bruit blanc gaussien

On va choisir des instants d'observation équirépartis en supposant que l'on a, en plus de (62) :

$$n(1) = \ldots = n(J) = N.$$

D'après (64), les distances d_n entre les lois conditionnelles vérifient :

$$\begin{cases} \forall\, j \in \{1,\ldots,J\} \ \text{ et } \ \forall\, n \in \{n'(j)+1,\ldots,n''(j)\}, \\ d_n = 2F\,(\frac{a\sqrt{N}}{\sigma\sqrt{r}}) - 1, \end{cases}$$

ce qui implique, d'après (60), que :

$$S = J \exp\left(-\frac{3}{8}(2N-1)\left(2F\left(\frac{a\sqrt{N}}{\sigma\sqrt{r}}\right) - 1\right)^2\right),$$

et montre qu'il suffit de choisir l'entier $N \geq 1$ assez grand pour que la condition (61) soit satisfaite.

On obtient ainsi un résultat particulièrement facile à mettre en oeuvre puisque d'après (33) et (63), on a :

$$\begin{cases} \forall\, j \in \{1,\ldots,J\} \ \text{ et } \ \forall\, n \in \{n'(j)+1,\ldots,n''(j)\}, \\ \Delta_n = a(-1)^{n-n'(j)+1}, \end{cases}$$

si bien que pour $j = 1,\ldots,J$, la région critique C_j est, d'après (46), l'ensemble des (2NJ)-uples $x^{(2NJ)} = (x_1,\ldots,x_{2NJ})$ tels que :

$$\alpha_{1,j}(x^{(2NJ)}) + \alpha_{2,j}(x^{(2NJ)}) \leq N,$$

où $\alpha_{1,j}(x^{(2NJ)})$ (respectivement $\alpha_{2,j}(x^{(2NJ)})$) est le nombre des indices n tels que :

- $n'(j) + 1 \leq n \leq n''(j)$,
- $n - n'(j)$ est impair (respectivement pair),
- $x_{n-1} - x_n \leq \frac{a}{2}$ (respectivement $> -\frac{a}{2}$).

b) Cas d'un bruit de Ornstein-Uhlenbeck

Les instants d'observation satisfaisant à (62), on vérifie, d'après (7), (33), (63) et (64), que l'on a :

$$\begin{cases} \forall\, j \in \{1,\dots,J\} \text{ et } \forall\, n \in \{n'(j)+1,\dots,n''(j)\} \\[2mm] \Delta_n = \frac{a}{2}(-1)^{n-n'(j)+1}\left(1 + e^{-\frac{\tau r}{2n(j)}}\right), \\[2mm] d_n = 2F\left(\dfrac{a\left(1+e^{-\frac{\tau r}{2n(j)}}\right)}{4\sigma\sqrt{1-e^{-\frac{\tau r}{2n(j)}}}}\right) - 1 \end{cases}$$

si bien que le seuil S est égal à :

$$S = \sum_{j=1}^{J} \exp\left(-\frac{3}{8}(2n(j)-1)\left(2F\left(\dfrac{a\left(1+e^{-\frac{\tau r}{2n(j)}}\right)}{4\sigma\sqrt{1-e^{-\frac{\tau r}{2n(j)}}}}\right) - 1\right)^2\right),$$

et qu'il suffit de choisir les entiers $n(1),\dots,n(J)$ assez grands pour que la condition-clef (61) soit satisfaite.

On obtient une nouvelle fois un test très simple à mettre en oeuvre puisqu'il est facile de vérifier que, pour $j = 1,\dots,J$, la région critique C_j est l'ensemble des n^*-uples $x^{(n^*)} = (x_1,\dots,x_{n^*})$ tels que :

$$\beta_{1,j}(x^{(n^*)}) + \beta_{2,j}(x^{(n^*)}) < n(j),$$

où $\beta_{1,j}(x^{(n^*)})$ (respectivement $\beta_{2,j}(x^{(n^*)})$) est le nombre des indices n tels que :

- $n'(j) + 1 \leq n \leq n''(j)$,
- $n - n'(j)$ est impair (respectivement pair),
- $x_{n-1} - e^{-\frac{\tau r}{2n(j)}} x_n \leq \frac{a}{4}\left(1 + e^{-\frac{\tau r}{2n(j)}}\right)$ (respectivement $> -\frac{a}{4}\left(1 + e^{-\frac{\tau r}{2n(j)}}\right)$).

References

[1] **J. Beekman**, (1965) *Gaussian Processes and Generalized Schroedinger Equations.* J. Math. Mech. **14**, 789-806.

[2] **W. Feller**, (1966) *An Introduction to Probability Theory and Its Applications ; Vol. II.* Wiley, New-York (2nd Ed.).

[3] **J. Geffroy**, (1976) *Inégalités pour le niveau de signification et la puissance de certains tests reposant sur des données quelconques.* C.R. Acad. Sc. Paris, Ser. A, t. 282, 1299-1301.

[4] **I.A. Ibragimov and R.Z. Has'minskii**, (1981) *Statistical Estimation - Asymptotic Theory.* Springer, Berlin.

[5] **N. Kailath**, (1966) *Some Results on Singular Detection* . Information and Control **9**, 130-152.

[6] **R. Moché**, (1988) *La décantation en estimation asymptotique.* Pub. Inst. Stat. Univ. Paris. Vol. XXXIII, fasc. 2, 39-77.

[7] **R. Moché**, (1991) *Quelques tests relatifs à la détection d'un signal dans un bruit gaussien.* Actes des "Jornadas de Probabilidades e Estatistica 1989" Département de Mathématiques de l'Université de Coimbra.

[8] **J. Neveu**, (1968) *Processus aléatoires gaussiens.* Presses de l'Université de Montréal.