

STATISTIQUE ET ANALYSE DES DONNÉES

A. YOUSFATE

Décomposition canonique d'un processus qualitatif de type markovien stationnaire

Statistique et analyse des données, tome 11, n° 1 (1986), p. 64-89

http://www.numdam.org/item?id=SAD_1986__11_1_64_0

© Association pour la statistique et ses utilisations, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Statistique et analyse des données » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

DECOMPOSITION CANONIQUE D'UN PROCESSUS QUALITATIF
DE TYPE MARKOVIEN STATIONNAIRE

A. YOUSFATE*

Laboratoire de Statistique
et Probabilités
U.A.-C.N.R.S 745
Université Paul Sabatier
118, route de Narbonne
31062 Toulouse Cedex

Résumé : Pour analyser un processus qualitatif ayant un nombre fini de modalités et indicé sur $T(T \in \mathbb{Z})$, on étudie les liaisons entre les indicatrices de ses modalités. On code le processus pour le rendre quantitatif vectoriel et on justifie le choix du modèle markovien stationnaire.

Le but fixé est de transformer linéairement le processus vectoriel en un autre ayant des composantes, qui sont des processus scalaires, orthogonales.

Le problème qu'on pose équivaut à la recherche d'une décomposition du processus selon un ordre de "prévisibilité" donné. On montre que cette décomposition rejoint celles des méthodes factorielles, aussi propose-t-on de faire des études de décomposition canonique, de description et de prévision sur la même transformation du processus. Dans certains cas de processus symétriques, l'effet de distance euclidienne entre les modalités peut-être introduit pour enrichir l'étude.

Abstract : This paper deals with the class of qualitative processes with discrete-time and finite number of modalities. In order to study these kind of processes we use an appropriate transformation of the qualitative process into a multiple quantitative process.

First we explain why we consider stationary Markov models. Then we introduce a linear transformation of the obtained multiple quantitative process to a new multiple process with orthogonal components. The problem is also to find components ordered from most to least predictable. Similarly, we show that the transformation uses the principal component analysis methods. On the same transformation we study the canonical transformation, the descriptive methods and the forecasting methods.

The results of symmetric processes can be used to get a better graphical interpretation and sometimes a distance between modalities.

Mots clés : A.F.C., Chaîne de Markov, indicative, inverse généralisée, métrique, orthogonalité, prévision, processus qualitatif, processus quantitatif, symétrie.

* Adresse actuelle : INES d'Informatique. Centre Universitaire de Sidi Bel Abbès. Algérie.

Manuscrit reçu le 22.3.1985, révisé le 16.7.86

INTRODUCTION

L'analyse descriptive de processus qualitatif a suscité l'intérêt de plusieurs auteurs. Une contribution à cette analyse a été développée par BOUMAZA [3] en s'articulant sur l'A.C.P. semi linéaire de DAUXOIS et POUSSE [7]. Un aspect équivalent, dans une certaine mesure, a été étudié par DEVILLE et SAPORTA [9]. Par ailleurs, quand on a plusieurs observations indépendantes, cette analyse peut être vue aussi comme une analyse des correspondances multiple liée à la juxtaposition de plusieurs tableaux disjonctifs, cf. [2], [3], [8], [9]. Sur un autre plan, on propose, dans ce papier, une analyse canonique qui met en évidence les liaisons linéaires entre le processus qualitatif considéré et le même processus décalé dans le temps (vers les t croissants ou les t décroissants). Sur le modèle obtenu, quand la stationnarité est vérifiée, on fait des décompositions factorielles qui nous permettent de faire aussi bien de la description que de la prévision. La décomposition obtenue est similaire à celle que BOX et TIAO [4] utilisent pour traiter les processus vectoriels gaussiens.

Pour que la représentation graphique du processus ait un aspect euclidien une étude basée sur la Quasi-symétrie [6] est introduite.

I - CODAGE D'UN PROCESSUS QUALITATIF

Dans cette partie, on procède à la transformation vectorielle d'un processus qualitatif discret à k modalités.

Soit $(\tilde{X}_t)_{t \in T}$ ($T \subset \mathbb{Z}$) un processus qualitatif où :

$$\tilde{X}_t : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (E, \mathcal{E}) \quad (1)$$

E étant un ensemble quelconque et \mathcal{E} la tribu engendrée par une partition finie $\mathcal{P}(E)$ de E .

On note E_1, \dots, E_k les k éléments de la partition $\mathcal{P}(E)$ ($k < +\infty$) et $(e_i)_{i=1, \dots, k}$ la base canonique de \mathbb{R}^k

$$\text{Soit } g = (E, \mathcal{E}) \longrightarrow (\mathbb{R}^k, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^k})$$

$$E_i \hookrightarrow e_i$$

Par g , $(\tilde{X}_t)_{t \in T}$ se transforme en un processus quantitatif vectoriel

$$X_t = g \circ \tilde{X}_t = (x_{1t} \dots x_{kt})' \quad (2)$$

$$X_t : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}^k, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^k})$$

$$\omega \hookrightarrow \left(1_{\tilde{X}_t^{-1}(E_1)}(\omega) \dots 1_{\tilde{X}_t^{-1}(E_k)}(\omega) \right)'$$

$(X_t)_{t \in T}$ peut être considéré comme une v.a.

$$X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}^k)^T \quad \text{telle que}$$

$$X(\omega) : T \longrightarrow \mathbb{R}^k \\ t \longmapsto X_t(\omega)$$

II - MODELE DE RECONSTITUTION DU PROCESSUS

Pour étudier le processus X_t ($t \in T$), on propose le modèle

$$X_t = \left(\sum_{\ell \in L} A_\ell(t) X_{t-\ell} \right) + R_t \quad ; \quad L \subset \mathbb{N}$$

$A_\ell(t)$ matrice carrée d'ordre k .

Pour exprimer les $A_\ell(t)$, on utilise les prédicteurs linéaires optimaux.

II-1. Expression du prédicteur linéaire optimal.

Par construction $(X_t)_{t \in T}$ est élément de $L^2_{\mathbb{R}^k}(P)$ que nous munissons du produit scalaire

$$\langle X_{t_1}, X_{t_2} \rangle_{L^2_{\mathbb{R}^k}(P)} = E(X_{t_1}' X_{t_2}) = \text{tr } E(X_{t_1} X_{t_2}')$$

Dans la suite nous étendons certaines définitions mieux connues dans le cas de processus scalaires.

Définition 1 : Nous appelons *prédicteur linéaire optimal* de X_t connaissant X_{t-1}, X_{t-2}, \dots tout élément \hat{X}_t de $L^2_{\mathbb{R}^k}(P)$ défini par

$$(i) \quad \hat{X}_t = \sum_{\ell \geq 1} A_\ell(t) X_{t-\ell} \quad (3)$$

$$(ii) \quad \|X_t - \hat{X}_t\| = \min_{\{B_\ell(t), \ell \geq 1\}} \|X_t - \sum_{\ell \geq 1} B_\ell(t) X_{t-\ell}\|$$

(Les $A_\ell(t)$ et les $B_\ell(t)$ sont des matrices $k \times k$).

Définition 2 : Nous appelons *m-prédicteur linéaire optimal* ($m \in \mathbb{N}^*$) de X_t connaissant X_{t-1}, X_{t-2}, \dots tout élément $\hat{X}_t^{(m)}$ de $L^2_{\mathbb{R}^k}(P)$ défini par

$$(i) \quad \hat{X}_t^{(m)} = \sum_{\ell=1}^m A_\ell(t) X_{t-\ell} \quad (4)$$

$$(ii) \quad \|X_t - \hat{X}_t^{(m)}\| = \min_{\{B_\ell(t), \ell=1, \dots, m\}} \|X_t - \sum_{\ell=1}^m B_\ell(t) X_{t-\ell}\|$$

(les $A_\rho(t)$ et les $B_\rho(t)$ sont des matrices $k \times k$).

(On montre aisément l'existence et l'unicité de $\hat{X}_t(m)$; voir prop.1).

Si on considère le prédicteur $\hat{X}_t = \sum_{\ell=1}^k A_\ell(t) X_{t-\ell}$, la suite $(\|X_t - \sum_{\ell=1}^k A_\ell(t) X_{t-\ell}\|)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est convergente dans \mathbb{R} vers $\|X_t - \hat{X}_t\|$. Il existe donc pour tout seuil $\varepsilon > 0$, une valeur m telle que

$$\forall m' \geq m \quad \left| \|X_t - \sum_{\ell=1}^{m'} A_\ell(t) X_{t-\ell}\| - \|X_t - \sum_{\ell=1}^m A_\ell(t) X_{t-\ell}\| \right| < \varepsilon \quad (5)$$

Pour déterminer les $A_\rho(t)$, nous utilisons la

Proposition 1 : Soient X et Y deux vecteurs aléatoires appartenant respectivement à $L^2_{\mathbb{R}^p}(P)$ et $L^2_{\mathbb{R}^q}(P)$ tels que $[E(Y Y')]^{-1}$ existe et soit

$A = E(X Y') [E(Y Y')]^{-1}$. Alors pour toute matrice $(p \times q)$ B , $X - BY$ appartient à $L^2_{\mathbb{R}^p}(P)$ et $\min_B \|X - BY\|$ est atteint pour $B = A$.

(démonstration: voir [10] ou [16]).

Pour construire les $A_\rho(t)$ de (4) il suffit de remplacer respectivement X et Y de la proposition 1 par X_t et $(X'_{t-1} \dots X'_{t-m})'$. $A_\rho(t)$ est alors la sous-matrice carrée de A composée des colonnes $(\ell-1)k+1, \dots, \ell k$ ($\ell = 1, \dots, m$).

II-2. Propriété du 1- prédicteur optimal.

Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ défini en (2) où X_t possède un 1-prédicteur comme prédicteur linéaire optimal ; en adoptant les notations suivantes

$$E(X_t) = \bar{X}_t$$

$$E(X_t X'_{t-1}) = P(t) \text{ qui est la matrice de probabilités conjointes où l'élément } (i, j) \text{ est égal à } P(X_t = e_i, X_{t-1} = e_j)$$

$$E(X_t X'_t) = D(t) \text{ qui est une matrice diagonale des probabilités } P(X_t = e_i)$$

on montre que $A = P(t) D^{-1}(t-1)$ est -la transposée d'-une matrice de transition, elle peut donc être associée à une chaîne de Markov (A ne dépend pas de t si la chaîne est homogène).

$A X_{t-1} = P(t) D^{-1}(t-1) X_{t-1}$ est alors le 1- prédicteur linéaire optimal.

Si on est en présence d'un m -prédicteur, nous mettons en évidence le lien entre X_t (voir (1)) et son passé en prenant la variable

$$\tilde{\mathcal{X}}_t = (\tilde{X}_t, \tilde{X}_{t-1}, \dots, \tilde{X}_{t-m+1}) : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (E, \mathcal{G}) \otimes m$$

$$\omega \longmapsto (\tilde{X}_t(\omega), \dots, \tilde{X}_{t-m+1}(\omega))$$

$$\text{et } \mathcal{X}_t = \Psi \circ \tilde{\mathcal{X}}_t = \begin{pmatrix} 1_{\tilde{\mathcal{X}}_t^{-1}(E_1 \times E_1 \times \dots \times E_1)} \\ \vdots \\ 1_{\tilde{\mathcal{X}}_t^{-1}(E_i \times E_i \dots \times E_{i_m})} \\ \vdots \\ 1_{\tilde{\mathcal{X}}_t^{-1}(E_k \times E_k \times \dots \times E_k)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k^m} \quad (6)$$

où $1_{\tilde{\mathcal{X}}_t^{-1}(E_{i_1} \times E_{i_2} \times \dots \times E_{i_m})}$ est au rang $i = i_1 + (i_2 - 1)k + \dots + (i_m - 1)k^{m-1}$.

Avec ces notations le prédicteur linéaire optimal de \mathcal{X}_t connaissant son passé s'écrit

$$A \mathcal{X}_{t-1} \quad (A = E(\mathcal{X}_t \mathcal{X}'_{t-1}) [E(\mathcal{X}_{t-1} \mathcal{X}'_{t-1})]^{-1})$$

C'est un 1-prédicteur linéaire et A est encore - la transposée d'une matrice de transition, et ainsi on est ramené au cas précédent.

Remarque 1 : En prenant $(X_t - \bar{X}_t)_{t \in T}$ au lieu de $(X_t)_{t \in T}$ nous retrouvons la même matrice A (voir [16]).

Remarque 2 : Ce que nous venons de développer nous amène à conclure que si $(X_t)_{t \in T}$ est un processus qualitatif discret à k modalités (où X_t dépend d'un nombre fini d'instants passés) il peut être transformé en un processus de Markov (non homogène en général) d'ordre 1. Si X_t dépend d'un nombre infini d'instants passés, nous faisons une approximation convenable en utilisant (5).

II-3. Quelques propriétés d'un processus de Markov discret stationnaire du 1er ordre

$(X_t)_{t \in T}$ est stationnaire du 1er ordre si pour tout t de T

$$E(X_t) = E(X_{t-1}) = \bar{X}$$

• Dans ce cas, on montre que

$$\forall t \in T \quad E(X_t X'_t) = D(t) = D = \text{diag.}(\bar{X})$$

$$\forall t \in T \quad E(X_t X'_{t-1}) = P(t) = P$$

$$\forall t \in T ; \forall q \in \mathbb{N}^* \quad E(X_t X'_{t-q}) = A^q D \quad (A \text{ est la transposée de la matrice de transition})$$

• Soit $R_t = X_t - AX_{t-1}$ pour tout t de T .

Le processus résiduel $(R_t)_{t \in T}$ est centré et $E(R_{t_1} R_{t_2}') = 0$ pour tous t_1 et t_2 de T distincts (la vérification de cette assertion est immédiate).

• Pour tout t de T , on a $X_t - \bar{X}_t = A(X_{t-1} - \bar{X}_{t-1}) + R_t$ où R_t et $A(X_{t-1} - \bar{X}_{t-1})$ sont non corrélés, ainsi que les R_t entre eux, donc $(X_t - \bar{X}_t)_{t \in T}$ est un processus autorégressif vectoriel d'ordre 1.

Remarque

Comme $E(X_t) = \bar{X}$ pour tout t de T , on montre [16] que le processus $(X_t - \bar{X}_t)_{t \in T}$ est stationnaire au sens strict (il est même ergodique).

Dans la suite, on étudie uniquement le cas où $(X_t)_{t \in T}$ est stationnaire.

III - DECOMPOSITION CANONIQUE DU PROCESSUS ET REPRESENTATION

III-1. Décomposition en processus scalaires orthogonaux.

Si les composantes de X_t (resp. $X_t - \bar{X}_t$) étaient indépendantes, analyser X_t (resp. $X_t - \bar{X}_t$) reviendrait à analyser chaque composante x_{it} ($i=1, \dots, k$) (resp. $x_{it} - \bar{x}_{it}$) séparément des autres. Cette analyse pourrait être aussi celle des composantes du prédicteur de X_t (resp. $X_t - \bar{X}_t$) connaissant son passé ou celle de X_t (resp. $X_t - \bar{X}_t$) et de son prédicteur simultanément. Ainsi, on peut utiliser les techniques des séries chronologiques [0], [1], ... pour traiter le processus composante par composante.

Pour cela nous allons transformer $(X_t)_{t \in T}$ (resp. $X_t - \bar{X}_t$) de telle sorte que le processus $(Y_t)_{t \in T}$ (resp. $(Z_t)_{t \in T}$) transformé linéaire de $(X_t)_{t \in T}$ (resp. $(X_t - \bar{X}_t)_{t \in T}$) ait des composantes orthogonales (resp. non corrélées) et des composantes de prédicteur orthogonales (resp. non corrélées) pour tout t de T (notons que si $(X_t)_t$ était normal, la non corrélation et l'indépendance auraient le même sens). Aussi allons-nous introduire un opérateur régulier $U(k \times k)$ vérifiant simultanément les relations (7) et (8) (resp. (9) et (10)) suivantes

$$E(UX_t X_t' U') = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_k) = \Gamma \quad (\text{avec } \gamma_i \in \mathbb{R}_+^*, \forall i=1, \dots, k) \quad (7)$$

$$E(UAX_{t-1} (AX_{t-1})' U') = \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_k) = \Delta \quad (\text{avec } \delta_i \in \mathbb{R}_+^*; \forall i=1, \dots, k) \quad (8)$$

$$(\text{resp. } E(U(X_t - \bar{X}) (X_t - \bar{X})' U') = \text{diag}.(d_1, \dots, d_{k-1}, 0) = \Gamma_0 \quad (9)$$

$$E(UA(X_{t-1} - \bar{X}) (A(X_{t-1} - \bar{X}))' U') = \text{diag}.(d_1, \dots, d_{k-1}, 0) = \Delta_0) \quad (10)$$

Il est facile de vérifier que (7), (8), (9) et (10) s'écrivent respectivement

$$U D U' = \Gamma \quad (11)$$

$$U A D A' U' = U P A' U' = \Delta \quad (12)$$

$$U(D-\bar{X} \bar{X}') U' = \Gamma_0 \quad (13)$$

$$U(P A' - \bar{X} \bar{X}') U' = \Delta_0 \quad (14)$$

Pour construire U vérifiant (7) et (8), nous utilisons la

Proposition 2 :

Si $(X_t)_{t \in T}$ est un processus stationnaire défini par (2), alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) $(X_t)_{t \in T}$ vérifie (11) et (12)*
- ii) $U' \Gamma^{-1/2}$ porte en colonnes des vecteurs propres D -orthonormés de $D^{-1} P A'$ (où D, P et A sont définis en II.2)*

Démonstration : [i) \implies ii)] :

(11) s'écrit aussi

$$\begin{aligned} U D U' \Gamma^{-1} &= I_k \quad (\text{l'identité dans } \mathbb{R}^k) \\ \implies U P A' U' &= \Delta = U D U' \Gamma^{-1} \Delta \\ \implies D^{-1} P A' U' &= U' (\Gamma^{-1} \Delta) \end{aligned}$$

$\Gamma^{-1} \Delta$ étant diagonale, alors U' (ou $U' \Gamma^{-1/2}$) porte en colonnes des vecteurs propres de $D^{-1} P A'$ et $\Gamma^{-1} \Delta$ porte sur la diagonale les valeurs propres associées.

(11) peut s'écrire aussi

$$\Gamma^{-1/2} U D U' \Gamma^{-1/2} = I_k$$

ce qui veut dire que $U' \Gamma^{-1/2}$ porte en colonnes des vecteurs propres D -orthonormés de $D^{-1} P A'$.

[ii) \implies i)] :

$$\begin{aligned} \text{On a } D^{-1} P A' U' \Gamma^{-1/2} &= (\Delta \Gamma^{-1}) \\ \text{et } \Gamma^{-1/2} U D U' \Gamma^{-1/2} &= I \end{aligned}$$

(*)

En composant à gauche par $\Gamma^{-1/2} U D$ dans la première équation, on obtient

$$\begin{aligned}
 \Gamma^{-1/2} U P A' U' \Gamma^{-1/2} &= \Gamma^{-1/2} U D U' \Gamma^{-1/2} (\Delta \Gamma^{-1}) \\
 &= \Delta \Gamma^{-1} \\
 &= \Gamma^{-1/2} \Delta \Gamma^{-1/2} \quad (**)
 \end{aligned}$$

De (*) et (**), on tire immédiatement les équations (11) et (12).

Pour construire U vérifiant (13) et (14), on utilise la :

Proposition 3 : Soit $(X_t)_{t \in T}$ un processus stationnaire défini par (2) tel que $E(X_t X_t')$ soit régulière. Soit encore $(D - \bar{X}\bar{X}')^{-}$ l'inverse généralisée de $D - \bar{X}\bar{X}'$ au sens de Moore-Penrose. $(X_t)_{t \in T}$ vérifie (13) et (14) si et seulement si U' porte en colonne des vecteurs propres de $(D - \bar{X}\bar{X}')^{-}$ $(PA' - \bar{X}\bar{X}')$ tels que les vecteurs colonnes non nuls de $U'(\Gamma_0^-)^{1/2}$ soient $(D - \bar{X}\bar{X}')$ -semi-normés (le vecteur qui s'annule en passant de U' à $U'(\Gamma_0^-)^{1/2}$ étant proportionnel à $\mathbb{1}_k$).

Démonstration.

Soit $(X_t)_{t \in T}$ vérifiant (13) et (14) ; notons que U est régulière (cf. §III.1).

Par une démonstration similaire à celle de la proposition 2, on montre que $\Gamma_0^- \Delta_0$ porte sur la diagonale les valeurs propres de $(D - \bar{X}\bar{X}')^{-}$ $(PA' - \bar{X}\bar{X}')$, les vecteurs propres associés sont portés en colonnes par U' (la valeur propre 0 étant associée au vecteur propre $\mathbb{1}_k$) ; les vecteurs colonnes non nuls de $U(\Gamma_0^-)^{1/2}$ sont $(D - \bar{X}\bar{X}')$ -normés.

La réciproque est similaire à celle de la réciproque de la proposition 2.

Remarque 1 : En prenant exemple sur un processus à 2 états, on montre facilement que les deux décompositions (centrée et non centrée) ne sont pas équivalentes en général. L'équivalence des deux décompositions n'est vraie que si $\bar{x} = \frac{1}{k} \cdot \mathbb{1}_k$.

Remarque 2 : Si le processus X_t est exprimé selon son "avenir" (i.e. en fonction des $X_{t'}$; $t' \in T$, $t' > t$), le modèle de reconstitution de X_t s'écrit

$$X_t = B X_{t+1} + S_t \quad (16)$$

où $B = P' D^{-1}$ qui est une matrice de transition autre que A si P est non symétrique (le cas où P est symétrique est étudié ultérieurement). S_t est le processus résiduel associé à la décomposition.

Notons qu'avec le modèle (16), on peut poser de nouveau le problème du §III-1.

Remarque 3 : En notant A (resp. B) la matrice de transition avant (resp. arrière), l'opérateur $D^{-1} P A'$ de la proposition 2 s'écrit $B'A'$.

III-2. Décomposition canonique du processus et prévision.

$(X_t)_{t \in T}$ est de Markov tel que

$$\bar{X}_t = \bar{X} \text{ pour tout } t \text{ de } T$$

et

$$X_t = AX_{t-1} + R_t$$

$$(\text{resp. } X_t - \bar{X} = A(X_{t-1} - \bar{X}) + R_t).$$

Définition : On appelle transformée linéaire scalaire de X_t (resp. $(X_t - \bar{X})$) par u (vecteur de \mathbb{R}^k) la v.a.n. $u' X_t$ (resp. $u' (X_t - \bar{X})$).

Pour déterminer la transformée scalaire de X_t (resp. $(X_t - \bar{X})$) la plus prévisible, on utilise le critère de prévision suivant :

"minimiser la norme de la transformée scalaire du résidu R_t , la norme de la transformée scalaire de X_t (resp. $(X_t - \bar{X})$) étant imposée". Ce qui revient à résoudre le problème :

$$\min_{u \in \mathbb{R}^k} \frac{\|u' R_t\|_{L^2(P)}}{\|u' X_t\|_{L^2(P)}} \quad (17)$$

$$(\text{resp. } \min_{\substack{u \in \mathbb{R}^k \\ u \neq \mathbb{1}_k}} \frac{\|u(R_t)\|_{L^2(P)}}{\|u'(X_t - \bar{X})\|_{L^2(P)}} \quad (18)$$

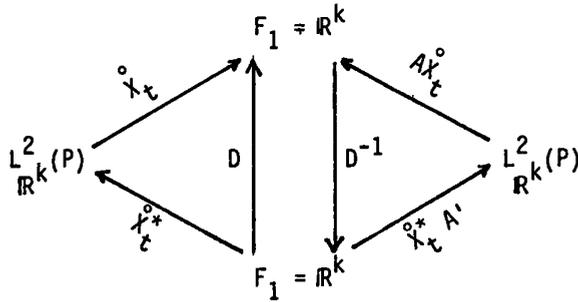
Le problème est classique et admet comme solution un vecteur propre de $D^{-1} P A'$ (resp. $(D - \bar{X} \bar{X}')^{-1} (P A' - \bar{X} \bar{X}')$) noté u_1 associé à la plus grande valeur propre.

En faisant des itérations sous contrainte de D (resp. $(D - \bar{X} \bar{X}')$)-orthonormalité des u_i , $i=1, \dots, k$ (resp. $i=1, \dots, k-1$) on retrouve les décompositions (11) et (12) (resp. (13) et (14)).

III-3. Analyse factorielle du processus X_t

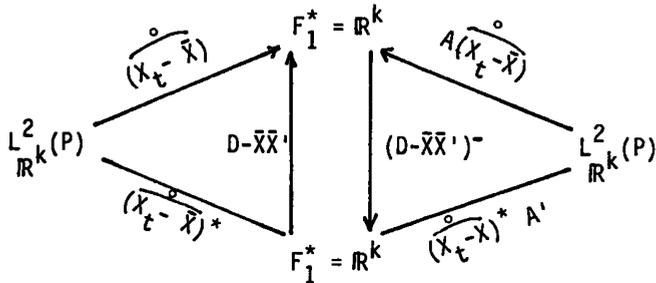
On remarque que la décomposition de (11) et (12) (resp. (13) et (14)) où la solution itérée de (17) (resp. (18)) revient à déterminer des vecteurs non nuls proportionnels aux facteurs principaux de l'A.C.P. de A avec les métriques D^{-1} et D (resp. les métriques dégénérées $(D - \bar{X} \bar{X}')^{-1}$ et $(D - \bar{X} \bar{X}')$).

Le schéma de dualité associé à l'analyse non centrée (resp. centrée) est alors :



avec $\overset{\circ}{X}_t \circ \overset{\circ}{X}_t^* = E(X_t X_t') = D$ pour tout $t \in T$

(resp.



avec $\overbrace{(X_t - \bar{X})^0 \circ (X_t - \bar{X})^{*0}} = E[(X_t - \bar{X})(X_t - \bar{X})'] = D - \bar{X}\bar{X}'$ }

Pour toute représentation graphique du processus, on choisit le même espace \mathbb{R}^k . Dans la mesure où il existe un sous-espace de \mathbb{R}^k de dimension h ($h < k$) dans lequel tout le processus X_t est représenté, X_t est transformé en $Y_t = U X_t$, tel que

$$Y_t = C Y_{t-1} + V_t \tag{19}$$

$$C = U A U^{-1} \quad \text{et} \quad V_t = U T_t$$

on a alors

$$E(Y_t Y_t') = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & d_h & & 0 \\ & & & & 0 \dots 0 \end{pmatrix} = D$$

$$\text{et } E(C Y_{t-1} Y'_{t-1} C') = C D C' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ & \lambda_h \\ 0 & 0 \dots 0 \end{pmatrix}$$

ou encore

$$(y_{1t} \dots y_{ht} : y_{h+1t} \dots y_{kt})' = \left(\begin{array}{c|c} C_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) (y_{1t-1} \dots y_{ht-1} : y_{h+1t-1} \dots y_{kt-1})' + (v_{1t} \dots v_{ht} : v_{h+1t} \dots v_{kt})'$$

on voit alors que la partie contenant les $k-h$ dernières composantes de Y_t est égale à la partie résiduelle la plus importante de V_t et ainsi Y_t se décompose, d'une part, en une partie qui dépend de son passé et un résidu et, d'autre part, en une partie autorégressive (i.e. les h premières composantes) et une partie purement résiduelle (i.e. les $k-h$ dernières composantes). Une étude similaire peut être développée pour le cas centré.

III-4. Echantillonnage

Soit $(X_t)_{t \in T}$ (un processus vérifiant (2) s'expriment sous la forme

$$X_t = A X_{t-1} + R_t \quad (20)$$

et stationnaire.

On peut considérer aussi $(X_t)_{t \in T}$ comme une variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\mathbb{R}^k)^T$ telle que

$$X(\omega) : t \mapsto X_t(\omega).$$

Soit encore $X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$ un n -échantillon de X .

Considérons le processus moyenne empirique.

$$X_{t,n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_t^{(i)}$$

En utilisant la proposition 1 (on note alors que $E(X_{t,n} X'_{t,n}) = \frac{1}{n} D + (n-1)\bar{X}\bar{X}'$ et $E(X_{t,n} X'_{t,n}) = \frac{1}{n} P + (n-1)\bar{X}\bar{X}'$), on trouve

$$X_{t,n} = A X_{t-1,n} + R_{t,n}$$

A est la même que celle de (20) et $R_{t,n}$ est la moyenne empirique tirée d'un échantillon de R_t .

En faisant une décomposition de $X_{t,n}$ en processus orthogonaux selon (7) et (8) ou (9) et (10), selon des transformées linéaires scalaires suivant un ordre de prévi-

sion décroissant (cf. (17) ou (18)) ou selon les techniques d'analyse factorielle, on montre que cela revient à décomposer l'opérateur

$$D^{-1} A D A' \quad \text{dans le cas non centré}$$

$$\text{ou } (D - \bar{X}\bar{X}')^{-1} A(D - \bar{X}\bar{X}')A' \text{ dans le cas centré.}$$

On note $X_{t,n}$ (resp. \bar{X}) le vecteur $X_{t,n}$ (resp. \bar{X}) auquel on ôte la dernière composante et D la matrice D à laquelle on ôte la dernière ligne et la dernière colonne. Si n est suffisamment grand et D inversible, on prend alors

$$X_{t,n} \sim \mathcal{N}(\bar{X}, \frac{1}{n}(D - \bar{X}\bar{X}'))$$

par utilisation du théorème central limite appliqué à une loi multinomiale.

Dans le cas centré, on a alors une décomposition de $X_{t,n} - \bar{X}$ en $k-1$ processus scalaires qu'on note $z_{it,n}$ ($i=1, \dots, k-1$) vérifiant

$$z_{it,n} \text{ indépendant de tout } z_{jt,n} \quad \text{si } j \neq i \quad ; \quad j \in \{1, \dots, k-1\}$$

$$z_{it,n} \quad " \quad " \quad z_{jt-1,n} \quad j^{\text{ème}} \text{ composante du transformé de } A Y_{t-1,n}$$

par l'opérateur U solution de (13) et (14) ou de (18) si $j \neq i$. Ainsi on rejoint les résultats de Box et Tiao [4] .

$z_{it,n}$ ne sera indépendant de tout $z_{jt',n}$ $t' \in T$ et $j \neq i$ que dans certains cas de processus symétriques qu'on étudiera ultérieurement.

Si D est supposé de rang h ($h < k$), pour toute représentation graphique du processus $X_{t,n}$, on se limite au sous-espace de \mathbb{R}^k de dimension h associé aux h premières valeurs propres de la décomposition de $(D - \bar{X}\bar{X}')^{-1} A(D - \bar{X}\bar{X}')A'$.

Les réalisations de $X_{t,n}$ quand t varie seront représentées sur le graphe comme éléments supplémentaires selon les techniques graphiques de l'A.C.P., il en est de même pour les réalisations des $A X_{t,n}$ et des $R_{t,n}$.

Cette analyse pourrait être faite à partir de l'A.C.P. de B (matrice de transition suivant l'ordre inverse de T) qu'on munit des métriques dégénérées $(D - \bar{X}\bar{X}')^{-1}$ et $D - \bar{X}\bar{X}'$. Pour que les deux représentations graphiques soit similaires, il est nécessaire que $A = B$ (i.e. que le processus soit symétrique).

Une étude similaire peut être développée sur le cas non centré, l'indépendance des processus scalaires du cas centré est alors remplacée par l'orthogonalité au sens du produit scalaire introduit au § II.1.

III-5. Estimation

En pratique A n'est pas connue, pour l'estimer on utilise la matrice des temps moyens de passage qu'on note M et A est estimée alors par

$$I - \{ DM(\pi \mathbf{1}'_k - I) + I \}^{-1} (I - \pi \mathbf{1}'_k)$$

où D est une matrice diagonale égale à $(\text{diag } M)^{-1}$ et $\pi = D \mathbf{1}'_k$.

Pour plus de détails cf. [16]

Si on connaît les tableaux de contingence de t_0 à t , on utilise les résultats de [12] fondés sur la notion de séparabilité des hypothèses pour estimer A ; le terme général de la matrice estimée \hat{A} s'écrit :

$$\hat{a}_{ij} = \frac{\hat{p}_{ij}}{\hat{p}_{.j}} \quad i, j = 1, \dots, k$$

où

$$\hat{p}_{.j} = \sum_{i=1}^k \hat{p}_{ij}$$

$$\text{et } \hat{p}_{ij} = \frac{1}{t-t_0} \sum_{s=t_0+1}^t \left(\frac{n_{ij}(s)}{n} - \frac{n_i(s)}{n} \cdot \frac{n_j(s-1)}{n} + \frac{(n_i(s)+n_i(s-1))(n_j(s)+n_j(s-1))}{4n^2} \right)$$

$n_{ij}(s)$ étant le nombre d'éléments occupant l'état i à l'instant s et l'état j à l'instant $s-1$.

$n_i(s)$ est le nombre d'éléments occupant l'état i à l'instant s .

n est le nombre total d'éléments.

Si A est déterminé à partir d'un paramètre vectoriel $\theta \in \Theta$ compact tel que l'application $\theta \mapsto A(\theta)$ soit injective et continue pour tout élément de A, alors il existe pour tout ensemble $\{ t_0, t_0+1, \dots, t \}$ un θ_0 vérifiant

$$\frac{1}{t-t_0} \sum_{t_0+1}^t \|\hat{X}_{s,n} - A(\theta_0)\hat{X}_{s-1,n}\|^2 = \inf_{\theta \in \Theta} \frac{1}{t-t_0} \sum_{t_0+1}^t \|\hat{X}_{s,n} - A(\theta)\hat{X}_{s-1,n}\|^2$$

$\hat{X}_{s,n}$ et $\hat{X}_{s-1,n}$ sont les réalisations des moyennes empiriques $X_{s,n}$ et $X_{s-1,n}$; $A(\theta_0)$ est un estimateur de moindres carrés de A. (cf. [15]).

Sous l'hypothèse de stationnarité les données peuvent se présenter sous forme d'une série statistique qualitative, d'un ou plusieurs tableaux de contingences, de données agrégées et d'une matrice de transition paramétrée,...

Pour illustrer la méthode, on propose l'exemple suivant.

III.6. Exemple

Soit $A = [a_{ij}]_{10 \times 10}$ la matrice introduite par Theil [14] qui l'étudie au moyen d'autres méthodes ; a_{ij} étant la proportion d'individus occupant la catégorie socio-professionnelle i parmi ceux dont le père occupait la catégorie j . Le couple "père-fils" est considéré comme un seul individu occupant deux positions (pouvant être identiques) en deux instants consécutifs. Nous envisageons dans cette étude le cas où le processus en question est une chaîne de Markov homogène d'ordre 1 stationnaire. Il ne s'agit pas de prétendre que ce modèle est le plus convenable (selon un quelconque critère), mais il permet de donner des propriétés descriptives de la situation (voir par exemple [6]).

La-transposée de la -matrice de transition A^t est estimée par

Matrice de transition estimée

occupation du père (i)	occupation du sujet (j)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1. Professional and technical	.410	.175	.090	.069	.087	.103	.031	.019	.012	.004
2. Managers and officials	.216	.341	.091	.071	.139	.085	.025	.019	.010	.003
3. Sales workers	.195	.300	.150	.062	.119	.104	.032	.020	.017	.001
4. Clerical workers	.281	.178	.078	.097	.169	.092	.061	.030	.014	.000
5. Craftsmen and foremen	.130	.165	.047	.078	.294	.175	.051	.048	.008	.004
6. Operatives	.117	.122	.044	.066	.239	.259	.059	.076	.009	.009
7. Service workers*	.101	.142	.057	.095	.210	.209	.111	.063	.010	.002
8. Laborers (nonfarm)	.059	.080	.036	.080	.226	.263	.091	.142	.012	.011
9. Farmers	.053	.115	.025	.047	.197	.205	.052	.085	.178	.043
10. Farm laborers	.023	.075	.020	.038	.205	.260	.081	.134	.062	.102

* Including private households.

qu'on notera encore A^t

On trouve

$D = \text{diag}(0.2157 \quad 0.2014 \quad 0.0742 \quad 0.0733 \quad 0.1793 \quad 0.1486 \quad 0.0446 \quad 0.0423 \quad 0.0133 \quad 0.0053)$.

Les 3 premières valeurs propres de $D^{-1} A D$ autres que 1 sont

$$\lambda_1 = 0.1466$$

$$\lambda_2 = 0.0407$$

$$\lambda_3 = 0.0363$$

Relativement à $\sum_{i=1}^{k=10} \lambda_i$ ($k=10$), les pourcentages correspondants sont respectivement 59.065%, 16,380% et 14.602% (le pourcentage cumulé étant 90.047%).

La valeur λ_i peut être considérée comme la quantité d'information apportée par le facteur u_i ($i=1, \dots, 9$) de l'A.F.C. de $P = AD$. Les modalités (relatives au prédictor) sont données par les distributions conditionnelles de A et toute réalisation du processus se filtre à travers les projections de ces 10 modalités.

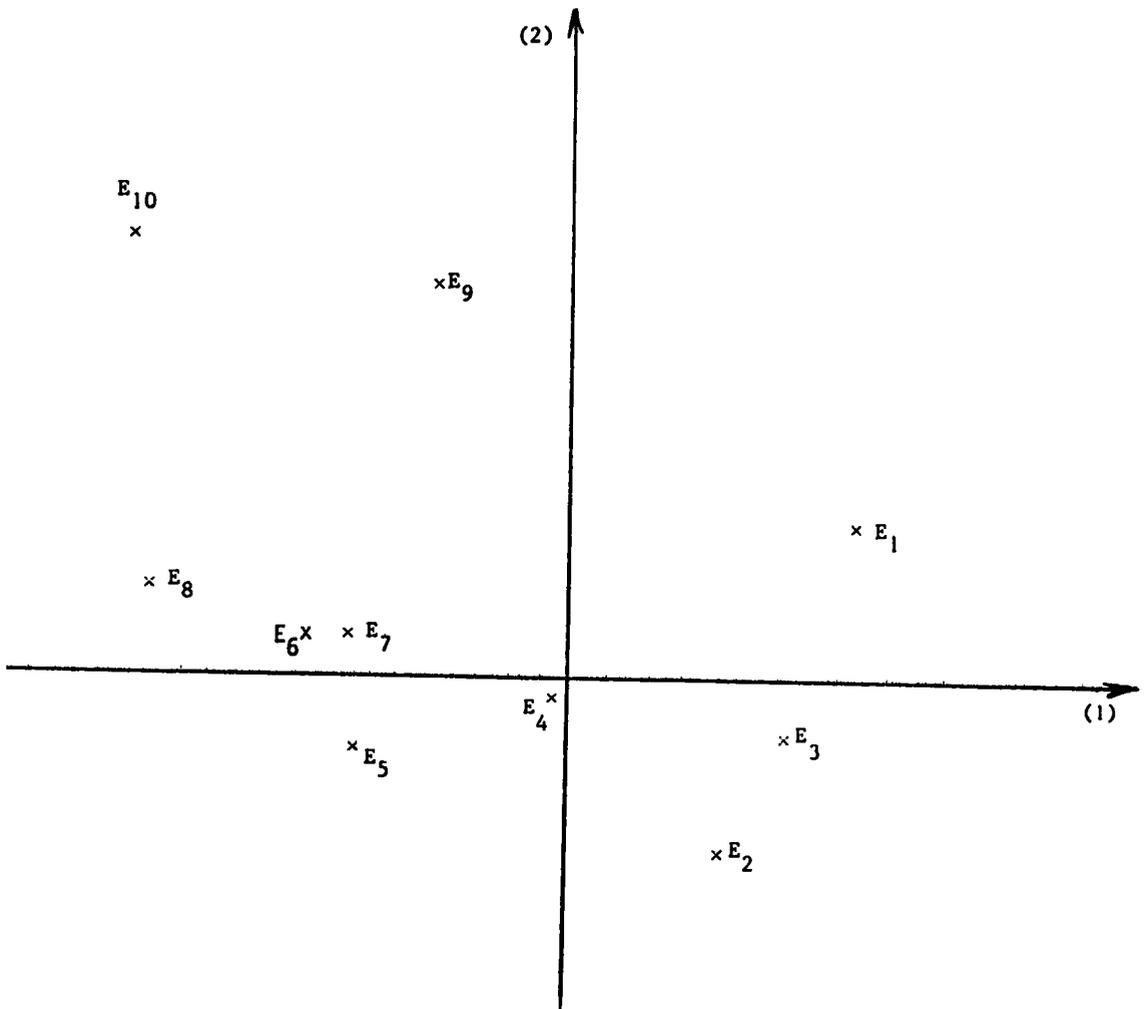


Fig.1

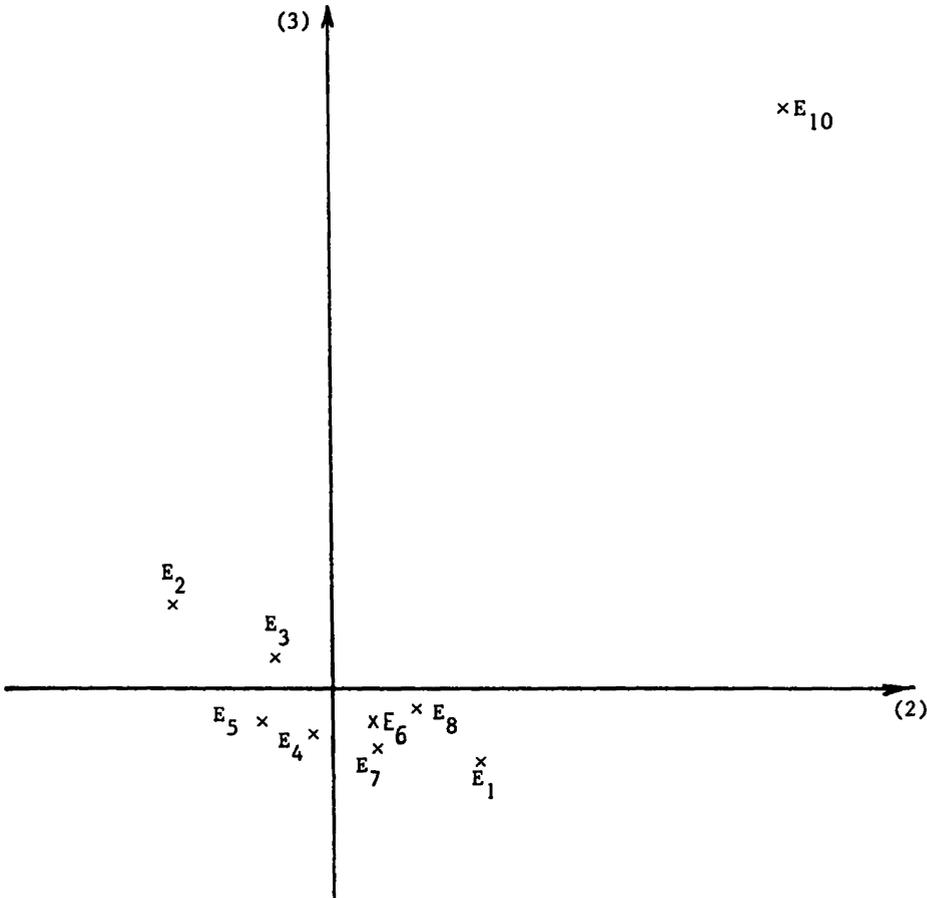
$\times E_9$ $\times E_{10}$ 

Fig.2

On remarque d'après la figure 1 que le 1er axe oppose les éventualités 1, 2 et 3 aux éventualités 5, 6, 7, 8, 9 et 10 (9 et 10 ayant la particularité d'avoir une signification donnée par les axes 2 et 3 (cf. fig.2)) ; on remarque aussi que l'éventualité 4 occupe une position médiane par rapport aux deux groupes (1,2,3) et (5,...,10).

Un individu ω réalisant la série $E_1, E_3, E_3, E_9, E_2, E_3, E_5, E_6, E_8, E_4, E_7, E_{10}, E_9$ en treize instants consécutifs est représenté par rapport à chacun des deux premiers facteurs seulement, la représentation par rapport au 3ème facteur ne met en évidence que le passage du groupe de modalités 9 et 10 au groupe contenant les modalités 1,2,...,8.

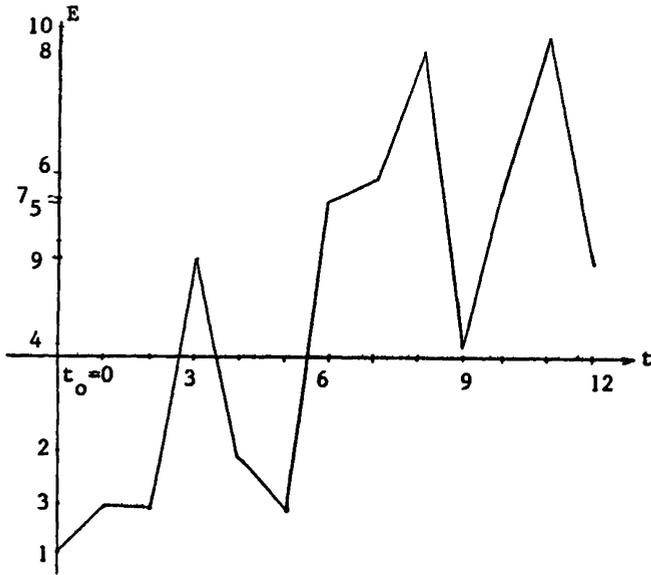


Fig. 3

Représentation de la série par rapport au 1er facteur

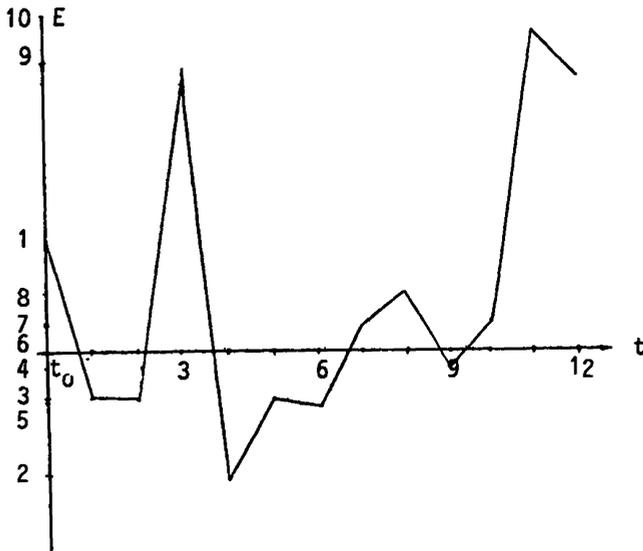


Fig. 4

Représentation de la série par rapport au 2ème facteur

Notons qu'en ordonnée, on a la position des modalités sur chacun des facteurs. Ce positionnement peut changer si l'on change le cours du temps sauf dans le cas symétrique qu'on va développer dans le paragraphe suivant.

IV - DECOMPOSITION CANONIQUE DE PROCESSUS SYMETRIQUE

Dans ce paragraphe on étudie uniquement le cas non centré ; le cas centré est présenté sous forme de remarques.

IV-1. Quasi-symétrie

Définition : Soit M une matrice carrée d'ordre k à éléments positifs. M est quasi-symétrique s'il existe une matrice symétrique N d'ordre k à éléments positifs et deux matrices diagonales K et L à éléments diagonaux positifs telles que

$$M = K N L$$

Pour plus de précisions consulter [5], [6] et [16].

IV-2. Processus symétrique

Définition : $(X_t)_{t \in T}$ est appelé processus symétrique ou réversible si la matrice de transition associée est quasi-symétrique.

Si nous remontons T dans le sens inverse, on obtient pour tout t de T :

$$X_t = B X_{t+1} + S_t \quad (21)$$

où B est la transposée d'une matrice de transition, généralement différente de A et S_t le résidu. La relation entre A et B étant

$$AD = D B' = P$$

Propriété : Si A est quasi-symétrique, P est symétrique. cf. [6], [13] et [16].

Si A est quasi-symétrique on a $A=B$, ce qui entraîne que les décompositions faites du processus selon un ordre sur T ou selon l'ordre contraire donnent les mêmes facteurs à un signe près.

Si $(X_t)_{t \in T}$ est symétrique la solution de (11) et (12) est obtenue à partir de la décomposition de

$$D^{-1} A D A' = A'^2 = B'^2 = D^{-1} P D^{-1} P \quad (22)$$

qui admet les mêmes vecteurs propres que $A' = D^{-1} P$.

(11) et (12) admettent pour problème équivalent : "chercher U telle que

$$U D U' \text{ diagonale} \tag{23}$$

$$U P U' \text{ diagonale} \tag{24}$$

D'une manière générale (23) et (24) est équivalent à

$$U D U' = \text{diagonale} \tag{25}$$

$$U(P D^{-1})^q D U' \text{ diagonale} \tag{26}$$

or (26) correspond à

$$E(U X_t X_{t-q}' U') = U A^q D U' \tag{27}$$

ce qui veut dire que $u_i' X_t$ est orthogonal à $u_j' X_{t'}$, pour tout $j \neq i$ et pour tout $t' = t - q$; si q est négatif, on remplace A par B dans l'expression (27) et l'orthogonalité reste toujours vraie (i.e. $t' \in T$). Il en est de même pour le prédicteur (il suffit de remplacer A^q par A^{q+2} dans (27)).

IV-3. Stabilité de la représentation

Si $(X_t)_{t \in T}$ est symétrique, la décomposition du processus vectoriel en processus scalaires orthogonaux est obtenue à partir de (22) en prenant T dans un ordre ou dans l'ordre opposé. Le schéma de dualité associé à la double analyse est le suivant

$$\begin{array}{ccc}
 F_1 = R^k & \xleftrightarrow[A]{B} & F_2^* = R^k \\
 \uparrow D & & \uparrow D \\
 F_1^* = R^k & \xleftrightarrow[B']{A'} & F_2 = R^k \\
 & & \downarrow D^{-1}
 \end{array} \tag{28}$$

Faisons la décomposition de (22). Si u_i est le $i^{\text{ème}}$ vecteur propre D -normé de A^2 , on peut choisir aussi bien u_i que $-u_i$ comme $i^{\text{ème}}$ facteur associé à la valeur propre λ_i que l'on choisit non nulle; cependant quand on fait une représentation simultanée de $(X_t)_{t \in T}$ selon A (l'ordre naturel étant choisi sur T) et B (l'ordre sur T étant opposé au précédent), le 2ème facteur de B^2 (22) s'écrit d'après (28) :

$$\frac{Au_i}{\sqrt{\lambda_i}} = \begin{cases} u_i & \text{si } Au_i = \sqrt{\lambda_i} u_i \\ -u_i & \text{si } Au_i = -\sqrt{\lambda_i} u_i \end{cases}$$

Il est donc nécessaire que A soit quasi-symétrique positive pour éviter le double positionnement des modalités en représentation graphique simultanée. Dans la pratique comme A est souvent estimée, il est intéressant de la prendre quasi-symétrique.

Pour construire A quasi-symétrique positive on utilise les propositions suivantes :

Proposition 4 : Soit P une matrice de probabilités conjointes s'écrivant $P = AD$ où A est la-transposée de la -matrice de transition et D diagonale définie positive.

P est symétrique positive si et seulement si A est quasi-symétrique positive.

Démonstration : (\Rightarrow) $P = P'$ et D définie positive entraînent A quasi-symétrique ; de plus $A' = D^{-1}P$ a pour plus petite valeur propre la quantité

$$\min_{u \in \mathbb{R}^k} \frac{u' P u}{u' D u} \quad (u' D u = \text{Cte}) \text{ qui est positive ou nulle}$$

i.e. A est quasi-symétrique positive

(\Leftarrow) La réciproque est immédiate .

Définition : Soit M une matrice symétrique d'ordre k dont on note α_i ($i=1, \dots, k_1$) (resp. β_j ($j=1, \dots, k_2$)) les valeurs propres positives (resp. négatives) associées aux vecteurs propres normés V_i (resp. W_j) pris avec leur ordre de multiplicité.

$$\text{On note } M_+ \text{ la matrice } \sum_{i=1}^{k_1} \lambda_i V_i V_i' .$$

Proposition 5 : Soit P une matrice carrée de probabilités conjointes d'ordre k. La matrice symétrique positive la plus proche de P au sens de la norme trace est $(\frac{P+P'}{2})_+$.

Démonstration : Notons \mathcal{S} le sous-espace vectoriel des matrices symétriques et \mathcal{S}_+ le cône convexe des matrices symétriques positives.

La projection orthogonale de P sur \mathcal{S}_+ correspond à la projection orthogonale sur \mathcal{S}_+ du projeté orthogonal de P sur \mathcal{S} qui s'écrit $\frac{P+P'}{2}$ ce qui vérifie la proposition.

$(\frac{P+P'}{2})_+$ n'est pas une matrice de probabilités conjointes ; pour qu'elle le devienne,

il suffit de la multiplier par le coefficient $\frac{1}{\mathbb{1}'_k (\frac{P+P'}{2})_+ \mathbb{1}_k}$. La matrice de transition quasi-symétrique cherchée est obtenue à partir de la matrice de probabilités conjointes ainsi construite.

Remarque 1 : Pour que le processus centré admette une décomposition en processus scalaires non corrélés sur T, il suffit que

$$(D - \bar{X}\bar{X}')^{-1} A(D - \bar{X}\bar{X}')^{-1} A' = (D - \bar{X}\bar{X}')^{-1} P (D - \bar{X}\bar{X}')^{-1} P'$$

(avec $P = P'$).

$$\text{i.e. } D^{-1} - \mathbb{1}_k \mathbb{1}_k' = (D - \bar{X}\bar{X}')^{-1}.$$

Cette relation est vraie dès que $\bar{X} = \frac{1}{k} \mathbb{1}_k$.

Remarque 2 : En présence d'un n-échantillon du processus, si n est suffisamment grand, on considère que le processus moyenne empirique suit une loi normale et alors la non corrélation des processus scalaires entraine leur indépendance. D'après la remarque précédente, on constate que cela n'est vrai que dans le cas de distribution équiprobable sur les modalités quand on étudie le cas centré.

IV-4 Exemple.

En ajustant le processus de l'exemple III-6 à un processus symétrique, A' se transforme en une matrice quasi-symétrique qu'on écrit :

		Occupation du sujet									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Occupation du père	1	0.4089	0.1878	0.0785	0.0824	0.0979	0.0922	0.0265	0.0154	0.0077	0.0023
	2	0.2011	0.3409	0.1008	0.0678	0.1435	0.0878	0.0289	0.0180	0.0087	0.0025
	3	0.2277	0.2728	0.1501	0.0694	0.1172	0.0960	0.0344	0.0203	0.0108	0.0013
	4	0.2414	0.1857	0.0702	0.0969	0.1812	0.1129	0.0608	0.0384	0.0109	0.0014
	5	0.1170	0.1601	0.0479	0.0739	0.2946	0.1872	0.0528	0.0510	0.0112	0.0050
	6	0.1326	0.1179	0.0477	0.0554	0.2253	0.2599	0.0623	0.0760	0.0134	0.0091
	7	0.1217	0.1238	0.0545	0.0953	0.2028	0.1987	0.1116	0.0771	0.0128	0.0054
	8	0.0776	0.0847	0.0353	0.0660	0.2152	0.2662	0.0792	0.1422	0.0189	0.0142
	9	0.1237	0.1312	0.0601	0.0602	0.1507	0.1509	0.0452	0.0604	0.1805	0.0376
	10	0.0940	0.0941	0.0188	0.0189	0.1702	0.2556	0.0473	0.1137	0.0943	0.0943

et qu'on note encore une fois A' .

Les trois premières valeurs propres de $D^{-1} A D A'$ (autres que 1) sont

$\lambda_1 = 0.1426$	le pourcentage associé est	59,459%
$\lambda_2 = 0.0386$	" " " "	16,095%
$\lambda_3 = 0.0345$	" " " "	14,398%

Le pourcentage cumulé est donc 89,952% .

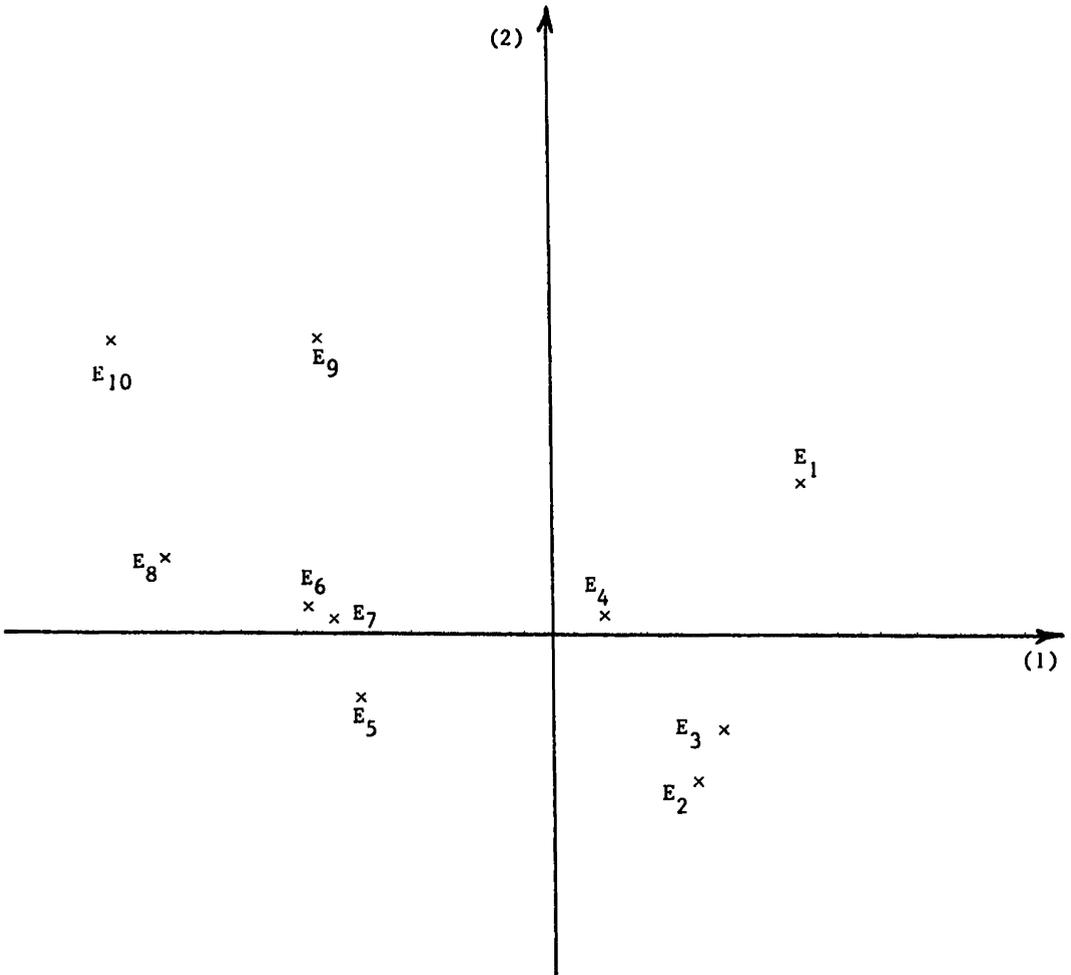


Fig.5

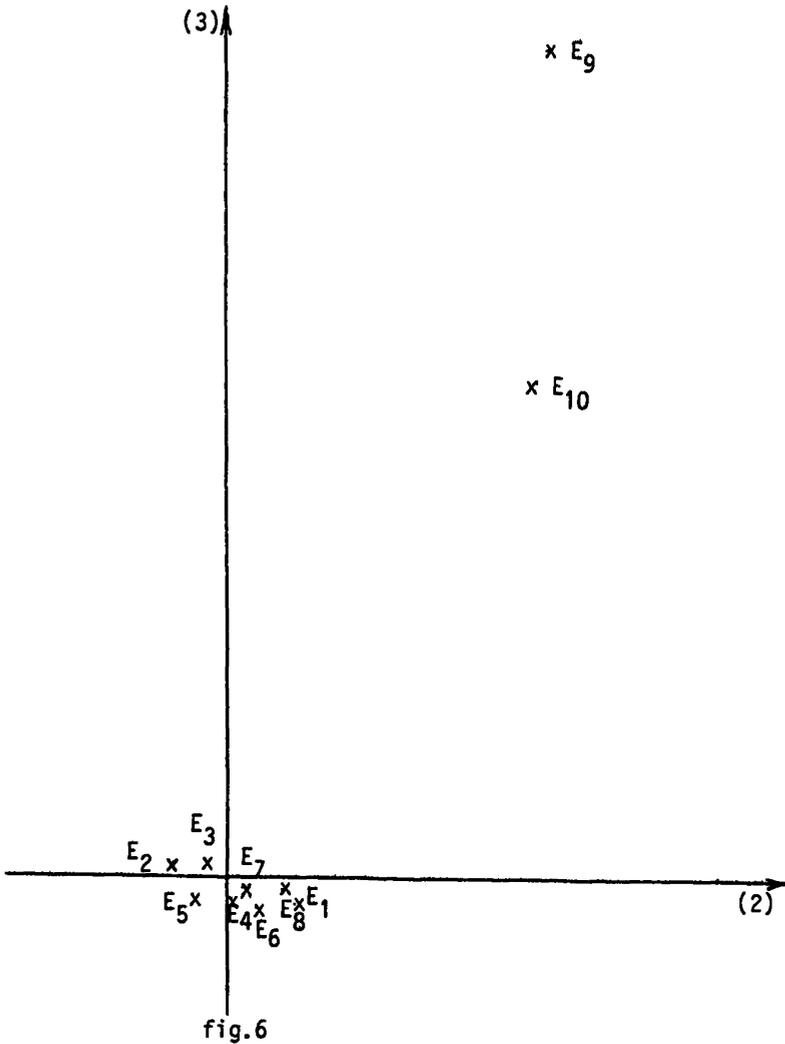
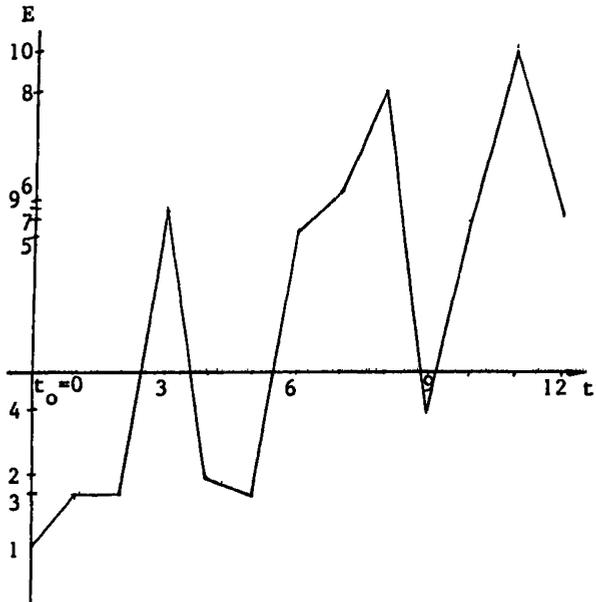
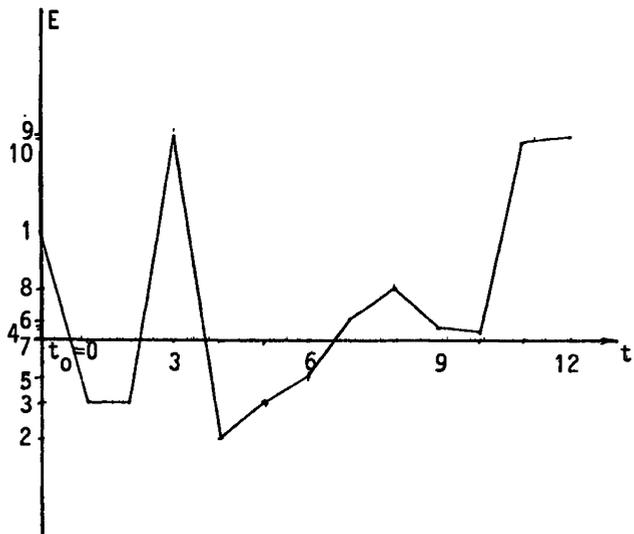


fig.6

On remarque d'après les figures 5 et 6 que les représentations graphiques sont proches de celles des figures 1 et 2. Notons que cette représentation est celle des prédicteurs des modalités ; pour représenter les modalités on utilise uniquement les coordonnées du 1er, 2ème et 3ème prédicteur. Avec cette méthode, on se permet de comparer n'importe quelle réalisation du processus (ou de son prédicteur) à n'importe quel instant avec n'importe quelle autre réalisation du processus ou de son prédicteur à n'importe quel autre instant (les instants pouvant être les mêmes).

Les valeurs propres de A' étant toutes positives, on peut considérer les positions des modalités comme euclidiennes.

Fig. 7Fig. 8

On prend en ordonnée les positions des modalités par rapport aux facteurs 1 et 2.

On constate que les figures 7 et 8 ressemblent aux figures 3 et 4, et comme A est quasi-symétrique, sur les figures 7 et 8, les positions des modalités restent inchangées si on change l'ordre sur T . Ce qui nous permet de considérer la proximité graphique des trajectoires relatives aux facteurs comme proximité euclidienne. Dans le cas où T est une discrétisation admissible du temps, pour étudier le processus, on peut développer des techniques adéquates d'interpolation pour affiner les résultats.

Notons que si A est issue d'une matrice P qui se décompose en une partie symétrique et une partie anti-symétrique, l'interprétation apportée par l'antisymétrie peut compléter l'interprétation euclidienne amenée par la symétrie (cf. [11]).

Références

- [0] ANDERSON, O.D.(1976). Time series Analysis and Forecasting. *Butterworths*.
- [1] ANDERSON, T.W.(1971). The Statistical Analysis of time series. *Wiley*.
- [2] BACCINI, A. (1984). Etude comparative des représentations graphiques en analyses factorielles des correspondances simples et multiples. *Publi. du labo. de Stat. et Proba. U.P.S. Toulouse*.
- [3] BOUMAZA, R. (1980). Contribution à l'étude descriptive d'une fonction aléatoire qualitative. *Thèse U.P.S. Toulouse*.
- [4] BOX, G.E.P. & TIAO, G.C. (1977). A canonical analysis of multiple time series. *Biometrika* 64,2.
- [5] CAUSSINUS, H. (1966) : Contribution à l'analyse statistique des tableaux de corrélation. *Thèse U.P.S. Toulouse*.
- [6] CAUSSINUS, H. (1976). Quelques points de vue sur l'analyse des tableaux d'échange. *Annales de l'I.N.S.E.E. n° 22-23 (Avril-Sept.)*.
- [7] DAUXOIS, J & POUSSE, A. (1976). Les analyses factorielles en calcul des probabilités et en statistique. Essai d'étude synthétique. *Thèse U.P.S. Toulouse*.
- [8] DE LEEUW, J. (1982). Non linear principal component analysis. *Compstat (1982)*.
- [9] DEVILLE, J.C. & SAPORTA, G. (1980). Analyse harmonique qualitative. *North Holland Publishing Company*.
- [10] FOURGEAUD, C & FUCHS, A. (1972). Statistique. *Dunaud*.
- [11] GOWER, J.C. (1976). The analysis of asymetry and orthogonality. *European meeting of Statisticians*.
- [12] MATHIEU, J.R. (1978). Contribution à l'étude de la séparabilité des hypothèses, au sens du χ^2 , dans la théorie asymptotique. *Thèse U.P.S. Toulouse*.
- [13] Mc CULLAGH, P. (1982). Some applications of quasisymmetry. *Biometrika* 69,2.
- [14] THEIL, H. (1972). Statistical Decomposition Analysis. *North Holland Publishing Company*.
- [15] VAN DER PLAS, A.P. (1983). On the estimation of the parameters of Markov probability models using macrodata. *The annals of statistics. Vol. 11, N° 1*.
- [16] YOUSFATE, A. (1981). Analyses factorielles des processus qualitatifs de type markovien. Description et prévision. *Thèse U.P.S. Toulouse*.