

STATISTIQUE ET ANALYSE DES DONNÉES

WALTER SCHLEE

**Le processus stochastique et multiparamétrique défini par
une estimation de la densité de probabilité**

Statistique et analyse des données, tome 3, n° 3 (1978), p. 31-43

http://www.numdam.org/item?id=SAD_1978__3_3_31_0

© Association pour la statistique et ses utilisations, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Statistique et analyse des données » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Statistique et Analyse des Données
3 - 1978 pp. 31,43

LE PROCESSUS STOCHASTIQUE ET MULTIPARAMÉTRIQUE DÉFINI PAR UNE ESTIMATION
DE LA DENSITÉ DE PROBABILITÉ

SCHLEE Walter

Technische Universität München, D-8000 München 2, Arcisstraße 21

Résumé : L'objet de l'étude est une estimation de la densité de probabilité bien adaptée aux besoins du calcul automatique. Cette méthode d'estimation est stimulée par un article de L.I. Boneva, D. Kendall et I. Stefanov: "Spline Transformations: Three New Diagnostic Aids for the Statistical Data-Analyst", Journal of the Royal Statistical Soc. Ser. B 33 (1971), 1-70. Dans le texte ici il est recherché une généralisation multidimensionnelle, la loi asymptotique de probabilité et la convergence en moyenne quadratique pour toutes les éléments particuliers de l'espace \mathbb{R}^q . De plus la convergence en probabilité du processus stochastique défini par cette estimation de la densité est démontré.

1. L'ESTIMATION DE LA DENSITÉ

Soit X_1, X_2, \dots, X_n un échantillon d'une population à q dimensions avec la densité f de probabilité. Comme estimateur de cette densité il est proposé:

$$f_n(z_1, \dots, z_q) = (nh^q)^{-1} \sum_{l=1}^n \prod_{j=1}^q k\left(\frac{z_j - i_j(x_l)\beta}{h}\right) \quad (1.1)$$

Cet estimateur peut être transformé à la forme

$$f_n(x_1, \dots, x_q) = h^{-q} \sum_{i_1, \dots, i_q = -\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^q k\left(\frac{x_j - i_j \beta}{h}\right) \Delta_{\beta}(i_1, \dots, i_q) F_n \quad (1.1')$$

qui est utilisé dans les démonstrations des propriétés statistiques de f_n .

L'explication des paramètres est:

Il est donné une partition du \mathbb{R}^q en intervalles

$$I(i) = \prod_{l=1}^q](i_l - 1)\beta, i_l \beta]$$

avec longueur du côté $\beta(h)$.

$i(X_1) = (i_1(X_1), \dots, i_q(X_1))$ est le vecteur d'indices de l'intervalle $I(i)$ où l'épreuve X_1 se trouve.

h est un paramètre positive. n dénote les nombres des épreuves. Les paramètres n, h, β sont associés par les limites:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h(n) = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \beta(h)/h = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} nh^q(n) = \infty \quad (1.2)$$

F_n est la répartition empirique, F est la répartition théorique, f est la densité théorique. On suppose que la fonction $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a les propriétés suivantes:

$$k(x) \geq 0, \quad k(x) = 0 \quad \forall x: |x| > C_x \quad (1.3.1)$$

$$k \text{ est Riemann-intégrable} \quad (1.3.2)$$

$$\int_{\mathbb{R}} k(x) dx = 1 \quad (1.3.3)$$

$$\sup_x |k(x)| \leq C_k \quad (1.3.4)$$

$\Delta_{\beta}(i_1, \dots, i_q)g$ dénote la différence à plusieurs dimensions de la fonction $g: \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ relativement à la partition du \mathbb{R}^q :

$$\Delta_{\beta}(i_1, \dots, i_q)g = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_q} g((i_1 - j_1)\beta, \dots, (i_q - j_q)\beta) (-1)^{j_1 + \dots + j_q} \quad (1.4)$$

où la somme est prise par toutes les valeurs $j_1, j_2, \dots, j_q = 0, 1$.

$\Delta_{\beta}(i_1, \dots, i_q)F_n$ resp. $\Delta_{\beta}(i_1, \dots, i_q)F$ est la probabilité empirique resp. théorique de l'intervalle $I(i_1, \dots, i_q)$.

Pour les aises du calcul automatique nous proposons la suivante fonction k :

$$k(z) = \begin{cases} 0 & z \leq -3/2 \\ (z+3/2)^2/2 & -3/2 \leq z \leq -1/2 \\ 3/4 - z^2 & -1/2 \leq z \leq 1/2 \\ (z-3/2)^2/2 & 1/2 \leq z \leq 3/2 \\ 0 & 3/2 \leq z \end{cases} \quad (1.5)$$

mais toutes les fonctions k sont admissibles satisfaisants les conditions décrites dessus. Cette fonction a été éprouvé par Monte Carlo échantillons feignants les lois de probabilité usuelles en statistique et quelques densités qui sont continues par morceaux.

La forme (1.1) d'estimateur f_n met devant les yeux que notre estimateur de "noyau" est différent d'estimateur de Cacoullos (1966). L'estimateur de Cacoullos est un estimateur propre de noyau (cf. aussi par exemple Parzen (1962), Rosenblatt (1971)). En effet l'estimateur (1.1) doit être regardé comme un estimateur du noyau discret qui est calculable immédiatement. Par comparaison l'estimateur de Cacoullos est obtenu remplaçant dans (1.1) la quantité $i(X_1)\beta$ par $X_1 = (X_{11}, \dots, X_{q1})$. Ça implique

$$f_n^c(z_1, \dots, z_q) = (nh^q)^{-1} \sum_{j=1}^n \prod_{l=1}^q k\left(\frac{z_l - X_{jl}}{h}\right) \quad (1.6)$$

Pour la calculation cet estimateur f_n^c doit être discretifié, c'est à dire que f_n^c est calculé en points discrets seulement. Par contre à ce fait il suffit à calculer l'estimateur (1.1) en points $i\beta = (i_1\beta, \dots, i_q\beta)$ pour tous i . Utilisant une fonction k comme (1.5) l'estimateur (1.1) peut être

reconstruit entièrement par les valeurs dans ces points. C'est exactement cette forme discrète, qui multiplie les suppositions des théorèmes et augmente les démonstrations en comparaison au texte de Cacoullos. C'est pourquoi les démonstrations ne sont pas données en détail.

2. LES PROPRIÉTÉS ASYMPTOTIQUES

Les résultats de ce paragraphe sont fondés sur les trois lemmes suivants. On suppose que les propositions (1.3) sont valables pour les trois lemmes.

Lemme 1 :

$\forall l \geq 1$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i_1, \dots, i_q} \prod_{i=1}^q k^l \left(\frac{x_j - i_j \beta}{h} \right) \left(\frac{\beta}{h} \right)^q = \left(\int k^l(y) dy \right)^q \quad (2.1)$$

Lemme 2 :

Soit g Riemann intégrable et $\int |g(x)| dx < \infty$

$\xi(i_1, \dots, i_q) \in \prod_{j=1}^q [(i_j - 1)\beta, i_j \beta]$ et g continue dans un voisinage de x :

Alors $\forall l \geq 1$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i_1, \dots, i_q} \prod_{j=1}^q k^l \left(\frac{x_j - i_j \beta}{h} \right) \left(\frac{\beta}{h} \right)^q g(\xi(i_1, \dots, i_q)) = g(x) \left(\int k^l(y) dy \right)^q \quad (2.2)$$

Lemme 3 :

Soit g Riemann intégrable et $\int |g(x)| dx < \infty$, $(x_1, x_2, \dots, x_q) \neq (y_1, y_2, \dots, y_q)$.

Alors $\forall r, s \geq 1$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i_1, \dots, i_q} \prod_{j=1}^q k^r \left(\frac{x_j - i_j \beta}{h} \right) k^s \left(\frac{y_j - i_j \beta}{h} \right) \left(\frac{\beta}{h} \right)^q g(\xi(i_1, \dots, i_q)) = 0 \quad (2.3)$$

Les démonstrations des trois lemmes sont analogues à les lemmes correspondants de Cacoullos regardant la supposition additionnelle d'intégrabilité de Riemann de k et de g . À ce moment là il n'est pas possible à réduire cette condition. Les démonstrations des lemmes 2 et 3 utilisent les lemmes précédents.

On peut considérer ces trois lemmes comme discrettes versions des résultats correspondants de Bochner (1960), qui sont déjà appliqués par Parzen (1962) et Cacoullos (1966). Les démonstrations sont analogues à les démonstrations données par Bochner (1960), Parzen (1962) et Cacoullos (1966).

Théorème 1 :

Soit la densité théorique f Riemann intégrable.

L'espérance mathématique de f_n est non biaisée en limite pour tous $x \in \mathbb{R}^q$ où f est continue dans un voisinage de x :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} f_n(x) = f(x) . \quad (2.4)$$

En outre il est valable pour la variance :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var} (\sqrt{nh^q} f_n(x)) = f(x) \left(\int k^2(y) dy \right)^q \quad (2.5)$$

Si k est symétrique par rapport à 0 et f a dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre 2 dans un voisinage de x et n est assez grand le biais est

$$b[f_n(x)] = \mathbb{E}(f_n(x) - f(x)) \approx \frac{h^2}{2} \sum_{i=1}^q \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \bigg|_x \int t^2 k(t) dt + \frac{\beta}{n} \cdot \text{const.} \quad (2.6)$$

Les relations (2.5), (2.6) et

$$\mathbb{E}(f_n(x) - f(x))^2 = \text{Var}(f_n(x)) + (b[f_n(x)])^2$$

annoncent la convergence en moyenne quadratique de f_n vers f en tous les points x où f a les propriétés ci-dessus.

A demontrer on utilise les lemmes 1,2,et 3 et les relations

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\beta^{-q} \Delta(i)(F_n - F)) &= f(\mathbb{f}(i)) \\ \mathbb{E}(n\beta^{-q} (\Delta(i)(F_n - F))^2) &= f(\mathbb{f}(i))(1 - \Delta(i)F) \\ \mathbb{E}(n\beta^{-q} \Delta(i)(F_n - F) * \Delta(1)(F_n - F)) &= -f(\mathbb{f}(i))f(\mathbb{f}(1))\beta^q \end{aligned}$$

$\mathbb{f}(i)$ est un valeur propre de l'intervalle $\prod_{l=1}^q [(i_l - 1)\beta, i_l\beta]$.

Théorème 2 :

Soient $\tilde{Z}_n = \sqrt{nh^q} (f_n - \mathbb{E}f_n)$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\beta(h(n)))^q < \infty$. Il est supposé que $x, x_1, x_2, \dots, x_r \in \mathbb{R}^q$, r quelque nombre naturel, dénotent points où la densité f est continue et strictement positive. Alors :

Le vecteur aléatoire $(\tilde{Z}_n(x_1), \dots, \tilde{Z}_n(x_r))$ converge faiblement vers un vecteur aléatoire gaussien avec espérance 0 et les variances asymptotiques données par (2.5). Les covariances asymptotiques sont 0.

Remarque :

\tilde{Z}_n peut être remplacé par $Z_n^* = \sqrt{nh^q} (f_n - f)$ seulement si on suppose conditions supplémentaires pour $h(n)$.

La démonstration de ce théorème a besoin

- (i) des resultats du théorème 1,
- (ii) du lemme 3 pour la calcul des covariances asymptotiques,
- (iii) d'un théorème limite centrale à plusieurs dimensions. Appliquant le critère de la convergence vers la loi gaussienne de Loève (1977, p. 307) on établit le resultat:

Lemme 4 :

X_{nk} $k = 1, 2, \dots, n$ soient vecteurs aléatoires independants.

On suppose que l'espérance mathématique de X_{nk} est 0. La matrice des covariances soit designée par $\mathcal{C}^{(nk)} = (\sigma_{ij}^{(nk)})$.

X_{ink} denote la i -ième coordonnée du vecteur X_{nk} .

Si les relations

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sigma_{ij}^{(nk)} = 0 \quad \text{pour } i \neq j \quad (2.7.1)$$

$$\min_i \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sigma_{ii}^{(nk)} > 0 \quad (2.7.2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \max_i \mathbb{E} |X_{ink}|^3 = 0 \quad (2.7.3)$$

sont valables alors

$Y_n = \sum_{k=1}^n X_{nk}$ converge faiblement vers un vecteur aléatoire gaussien avec espérance mathématique 0 et avec une matrice des covariances qui est diagonale et a les éléments diagonaux $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sigma_{ii}^{(nk)} = \sigma_i^2$.

Ce lemme implique théorème 2 par la proposition bien connue qu'un vecteur aléatoire a une répartition gaussienne si toutes les applications linéaires de ce vecteur sont variables aléatoires gaussiennes de la dimension un.

3. LE PROCESSUS STOCHASTIQUE

3.1 Un espace propre

Il n'y a que deux textes concernant le processus stochastique défini par l'estimation de densité (Cacoullos (1966), Rosenblatt(1971)). Mais Cacoullos démontre seulement la convergence faible des distributions marginales à dimensions finies du processus stochastique $Z_n^C = \sqrt{nh^q}(f_n^C - \mathbb{E}f_n^C)$. Ce n'est pas assez (Cf. par exemple Billingsley (1968)). En effet il est possible à démontrer complètement la convergence faible du processus Z_n^C , mais dans le texte ici nous considérons seulement le processus Z_n^C défini par l'estimateur (1.1). D'autre part Rosenblatt normalise son processus d'une manière, qui est moins praticable.

Les densités théoriques avec discontinuités ne sont pas traitées jusqu'ici. Néanmoins ces densités sont nécessaires pour la pratique. En outre il est

meilleur de considérer l'espace \mathbb{R}^q que l'espace $[0,1]^q$ comme l'espace paramétrique (par contre à Rosenblatt).

L'espace propre est un espace de Skorohod. Nous élaborons cet espace $D(\mathbb{R}^q)$ selon la conception de Straf (1970).

Ajustant la partition de l'intervalle de Neuhaus (1971) à l'espace paramétrique \mathbb{R}^q nous parvenons à critères plus pratique que les critères de Straf (1970) pour la convergence du processus stochastique dans $D(\mathbb{R}^q)$.

L'espace $D(\mathbb{R}^q)$ se compose d'un sous-ensemble de l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$. Il est muni d'une métrique qui engendre un espace métrique complet.

A définir la métrique nous utilisons un ensemble des fonctions $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 * \mathcal{L}_2 \dots \dots \mathcal{L}_q$. L'ensemble \mathcal{L}_i est un ensemble des fonctions strictement croissantes $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui ont une dérivée en tous les points.

En \mathcal{L}_i nous définissons une norme qui est compatible avec la loi de la composition des fonctions $\lambda \in \mathcal{L}_i$:

$$\|\lambda_i\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |\log \lambda'(t)| + \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \sup_{|t| \geq \gamma_j} \left| \log \left| \frac{\lambda(t)}{t} \right| \right| \quad (3.1)$$

où (γ_j) est une séquence strictement croissante des nombres positifs qui ne sont pas bornés.

Il y résulte une norme dans \mathcal{L} :

$$\|\lambda\| = \max_{i=1,2,\dots,q} \|\lambda_i\|_i \quad \forall \lambda = \lambda_1 * \lambda_2 * \dots * \lambda_q \quad (3.2)$$

En effet il est possible démontrer que $\|\lambda\|_i$ et $\|\lambda\|$ sont normes.

Désormais nous utilisons la dénotation \mathcal{L} pour le sous-ensemble défini par $\|\lambda\| < \infty$.

Les partitions finies du \mathbb{R}^q à intervalles annoncées ci-dessus sont définies comme suit:

Soient donnés les points $t_1, t_2, \dots, t_r \in \mathbb{R}^q$. Ces points sont augmentés par les deux points $t_0 = (-\infty, \dots, -\infty)$ et $t_{r+1} = (+\infty, \dots, +\infty)$. La partition $\mathcal{R}(t_1, t_2, \dots, t_r)$ engendrée par t_1, \dots, t_r est l'ensemble de tous les intervalles R :

$$R =]u_1, u_1'] \times \dots \times]u_q, u_q']$$

où " $]u_j, u_j'$ " est égale à " $]u_j, u_j'$ " resp. " $[u_j, u_j'$ " si $u_j < \infty$ resp. $= \infty$ (3.3)

et $u_j, u_j' \in K_j = \{t_{0j}, \dots, t_{r+1j}\}$ et $u_j < u_j'$, $]u_j, u_j'[\cap K_j = \emptyset$.

On dit que la partition $\mathcal{R}'(t_1', \dots, t_{r'})$ est plus fine que $\mathcal{R}(t_1, \dots, t_r)$ si

$$\{t_1, \dots, t_r\} \subset \{t_1', \dots, t_{r'}'\} \quad r' \geq r$$

$$t_1' \leq t_1 \quad t_{r'}' \geq t_r$$

(où \leq denote l'ordre des vecteurs)

$$m(\mathcal{R}) \geq m(\mathcal{R}')$$

où $m(\mathcal{R})$ est la longueur du plus petit côté entre tous les intervalles finis de \mathcal{R} .

La relation "plus fin" est une relation d'ordre dans l'ensemble des partitions $\mathcal{R}(t_1, \dots, t_r)$ du \mathbb{R}^q .

On dit que $f: \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction en escalier s'il existe une partition $\mathcal{R}(t_1, \dots, t_r)$ tel que f est constante sur chaque intervalle R d'une certaine partition $\mathcal{R}(t_1, \dots, t_r)$.

Soit $B(\mathbb{R}^q)$ l'ensemble de toutes les fonctions réelles bornées $f: \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$. La métrique de Skorohod en $B(\mathbb{R}^q)$ est défini avec l'aide de la norme $\|\dots\|$ sur \mathcal{L} selon Straf (1970):

$$d(x, y) = \inf_{\mathcal{L}} \left\{ \varepsilon > 0, \exists \lambda \in \mathcal{L}, \|\lambda\| < \varepsilon \text{ et } \sup_t |x(t) - y(\lambda t)| < \varepsilon \right\} \quad (3.4)$$

Définition :

$D(\mathbb{R}^q)$ est l'ensemble des fonctions de $B(\mathbb{R}^q)$ qui a une distance Skorohodienne 0 de l'ensemble \mathcal{E} des fonctions en escalier :

$$D(\mathbb{R}^q) = \{ x \in B(\mathbb{R}^q), d(x, \mathcal{E}) = 0 \}$$

Suivant Straf (1970) on démontre que $D(\mathbb{R}^q)$ est un espace (quasi-)métrique complet.

Les éléments $f \in D(\mathbb{R}^q)$ peuvent être caractérisés uniquement par un module $w'(f, \delta, \gamma)$. Soit $w(f, R) = \sup \{ |f(t) - f(s)| : t, s \in R \}$

$$w'(f, \delta, \gamma) = \inf_{\mathcal{R}} \max_{R \in \mathcal{R}} w(f, R) \quad (3.5)$$

où l'infimum est pris dans les partitions $\mathcal{R}(t_1, \dots, t_r)$ qui a $m(\mathcal{R}) \geq \delta$ et $|t_1|, |t_r| \leq \gamma$.

On a le résultat :

Pour que $f \in D(\mathbb{R}^q)$ il faut et il suffit que $\lim_{(\delta, \gamma)} w'(f, \delta, \gamma) = 0$. La limite est prise en direction de l'ordre des partitions comme il est décrit par δ et γ .

Suivant Straf (1970) et Neuhaus 1971 et utilisant la caractérisation d'un espace relativement compact par Ascoli on parvient à

Théorème 3 :

Pour qu'une suite $\{x_n\}$ des processus stochastiques de $D(\mathbb{R}^q)$ convergent faiblement il faut et il suffit que

les distributions marginales à dimensions finies de X_n convergent faiblement dans un sous-ensemble dense du \mathbb{R}^q (3.6)

et pour tous $\varepsilon > 0$ il existe un $M_\varepsilon \in \mathbb{R}$ avec

$$P\left(\sup_t |X_n(t)| > M_\varepsilon\right) < \varepsilon \quad \forall n \quad (3.7)$$

et pour tous $\varepsilon > 0$

$$\lim_{(\delta, \gamma)} \limsup_{n \rightarrow \infty} P(w'(x_n, \delta, \gamma) > \varepsilon) = 0 \quad (3.8)$$

où $\lim_{(\delta, \gamma)}$ est prise en direction de l'ordre des partitions $(\delta \rightarrow 0, \gamma \rightarrow +\infty)$.

Théorème 4 :

On suppose que

- (4.1) la densité théorique f est un élément de $D(\mathbb{R}^q)$ et
 (4.2) pour tous les $\delta = m(\mathcal{R})$ assez petits et pour tous les $\gamma = \max(|t_1|, \dots, |t_r|)$ assez grands il y a une partition $\mathcal{R}(t_1, \dots, t_r)$ tellement que f a dérivées partielles bornées en toutes les variables dans l'intérieur de chaque $R \in \mathcal{R}$ et
 (4.3) la fonction k qui se trouve dans la formule de l'estimateur f_n a une dérivée et
 (4.4) le paramètre β est une fonction du nombre n d'échantillon tellement que $\beta^q \rightarrow \text{const}/n$ pour tous n assez grands.

A ces conditions l'estimation $\tilde{Z}_n(t) = \sqrt{nh^q} (f_n(t) - \mathbb{E}f_n(t))$ considérée comme un processus stochastique q -paramétrique en $D(\mathbb{R}^q)$ converge faiblement vers un processus aléatoire gaussien.

Démonstration :

Il faut démontrer les suppositions (3.6), (3.7) et (3.8) du théorème 3.

La supposition (3.6) se montre juste parceque sous les conditions (4.1) - (4.3) les points de continuité de f sont dense dans \mathbb{R}^q et le théorème 2 est valable.

En fin les deux lemmes 5 et 6 suivantes établissent les suppositions (3.7) et (3.8).

Les suppositions de théorème 4 soient valables pour les lemmes 5 et 6. A cause de brevité soit

$$\hat{k}(x, i) = \prod_{j=1}^q k\left(\frac{x_j - i_j \beta}{h}\right).$$

Lemme 5 :

R est un élément de la partition $\mathcal{R}(t_1, \dots, t_r)$ qui est choisie par rapport à f comme il est décrit en théorème 4.

Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{u_1, \dots, u_q} \sum_{i_1, \dots, i_q} \hat{k}(u\beta, i)^{2l} f(\xi(i)) \frac{\beta^{2q}}{h^q} = \int_{\mathbb{R}} f dx \left(\int_{\mathbb{R}} k(y)^{2l} dy \right)^q$$

Lemme 6 :

Il existe une constante propre ρ_{21} tellement que pour tous v :

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \mathbb{E} \left| \tilde{Z}_n(t) \right|^{21} &\leq \left(\frac{\beta}{h}\right)^{(1-1)q} \rho_{21} \left(\sum_{i_1, \dots, i_q} \hat{k}(t, i)^{21} f(\xi(i)) \left(\frac{\beta}{h}\right)^q + o(\beta^q) \right) \\
 \text{b) } \mathbb{E} \left| \tilde{Z}_n(t) - \tilde{Z}_n(s) \right|^{21} &\leq \rho_{21} \left(\frac{\beta}{h}\right)^{(1-1)q} \left[\sum_{i_1, \dots, i_q} \left| \hat{k}(t, i) - \hat{k}(s, i+v) \right|^{21} f(\xi(i+v)) \left(\frac{\beta}{h}\right)^q + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i_1, \dots, i_q} \hat{k}(t, i)^{21} (f(\xi(i)) + f(\xi(i+v))) \left(\frac{\beta}{h}\right)^q + o(\beta^q) \right].
 \end{aligned}$$

La démonstration du lemme 5 utilise lemme 1 et les suppositions (4.1) et (4.2).

En la démonstration du lemme 6 les moments des variables aléatoires $\tilde{Z}_n(t)$ et $\tilde{Z}_n(t) - \tilde{Z}_n(s)$ sont évalués par raisonner analogiquement à le lemme (5.2) de Neuhaus (1971) et par utiliser les lemmes 1,2,3 ci-dessus et les suppositions des dérivées de f .

Par les suppositions (4.2), (4.3) et (4.4) les supremums dans (3.7) et (3.8) sont ramenés à les supremums sur les points de la partition $\mathcal{R}(t_1, \dots, t_r)$ qui existe par (4.2).

RÉFÉRENCES

- Billingsley, P. (1968), "Convergence of probability measures", John Wiley, New York.
- Bochner, S. (1960), "Harmonic Analysis and the theory of probability", Univ. of California Press.
- Cacoullos, T. (1966), "Estimation of a multivariate density", Annals of the Inst. of Statistical Mathematics, Japan, Vol. 18, 179 - 189.
- Loève, M. (1977), "Probability theory I", Springer Verlag, Berlin.
- Neuhaus, G. (1971), "On Weak Convergence of Stochastic Processes with Multidimensional Time Parameter", The Annals of Mathematical Statistics 42, 1285-1295.
- Parzen, E. (1962), "On estimation of a probability density function and mode", Ann. Math. Statistics, Vol. 33, 1065 - 1076.

Rosenblatt, M. (1971), "Curve estimates", The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 42, 1815 - 1842.

Straf, M.L. (1970), "Weak Convergence of stochastic processes with several parameters", Proc. Sixth Berkeley Symposium on Math. Statist. and Prob., Vol. II 187 - 221, University of California Press.