REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 120 (2008)

Gruppi fattorizzati da sottogruppi abeliani.

ENRICO JABARA (*)

ABSTRACT - Let $G = A_1A_2A_3$ be a group that is a product of three mutually permutable abelian subgroups A_1, A_2 and A_3. In this paper we prove that if A_1A_2 is nilpotent then G is soluble and that if A_1A_2, A_1A_3 and A_2A_3 are nilpotent then G is also nilpotent.

1. Introduzione.

Un gruppo G si dice fattorizzato tramite i suoi sottogruppi $A_1, A_2, \ldots, A_k$ se accade che

$$G = A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_k$$

e se $A_iA_j = A_jA_i$ per ogni $i,j \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Il risultato forse più noto ed elegante nella teoria dei gruppi fattorizzati è il teorema di Itô (2.1.1 di [1]): *un gruppo fattorizzato tramite due sottogruppi abeliani è metabeliano.* Tale risultato è stato esteso in varie direzioni; per esempio Heineken e Lennox hanno provato che un gruppo fattorizzato tramite un numero finito di sottogruppi abeliani finitamente generati è policiclico (7.6.6 di [1], per ulteriori generalizzazioni si veda [3]). In generale però il teorema di Itô non si può estendere al caso di gruppi fattorizzati da tre (o più) sottogruppi abeliani; esistono infatti esempi di gruppi non risolubili dotati di una tale fattorizzazione (7.6.3 di [1]). Nel caso dei gruppi finiti la situazione è radicalmente diversa; infatti grazie al teorema di Wielandt-Kegel (2.4.3 di [1]) è possibile dimostrare che ogni gruppo finito fattorizzato da gruppi nilpotenti è risolubile.

Spesso sono stati oggetto di studio anche i gruppi trifattorizzati ovvero i gruppi che contengono tre sottogruppi A, B e C tali che

$$G = A \cdot B = A \cdot C = B \cdot C.$$

(*) Dipartimento di Matematica Applicata, Università di Ca' Foscari, Dorsoduro 3825/e, 30123 Venezia, Italy.

E-mail: jabara@unive.it

Per un risultato dovuto a Kegel (2.5.11 di [1]) ogni gruppo finito dotato di una tripla fattorizzazione costituita da sottogruppi nilpotenti è esso stesso nilpotente. Tale risultato è ben lontano dall' essere vero nel caso dei gruppi infiniti anche quando i tre fattori sono abeliani, come mostrano alcuni esempi costruiti da Sysak e da Holt e Howlett (6.1.2 e 6.1.3 di [1]). L'unico progresso fatto fino ad ora nello studio dei gruppi trifattorizzati infiniti è un risultato ottenuto da Robinson e Stonehewer in [4] che asserisce che in ogni gruppo trifattorizzato da sottogruppi abeliani ogni fattore di composizione è centrale e ogni sottogruppo finitamente generato è residualmente nilpotente.

Scopo di questo lavoro è lo studio dei gruppi fattorizzati da sottogruppi abeliani quando si impongono particolari restrizioni alla struttura dei sottogruppi formati dalle coppie di fattori (tali sottogruppi sono, per il teorema di Itô, metabeliani). I risultati ottenuti sono compendiati nel seguente

TEOREMA. *Sia $G = A_1A_2A_3$ un gruppo fattorizzato tramite tre sottogruppi abeliani. Allora*

(a) *se il sottogruppo A_1A_2 è nilpotente allora G è risolubile;*

(b) *se i tre sottogruppi A_1A_2, A_1A_3 e A_2A_3 sono nilpotenti allora anche G è nilpotente.*

Tale teorema è, in un certo senso, anche un teorema sui gruppi trifattorizzati; infatti sotto le ipotesi del teorema il gruppo G risulta fattorizzato dai tre sottogruppi A_1A_2, A_1A_3 e A_2A_3.

Alcuni esempi di gruppi che soddisfano alle ipotesi (a) o (b) del teroema precedente completeranno l' esposizione.

2. Dimostrazioni ed esempi.

Nel seguito le notazioni utilizzate saranno quelle della monografia [1]. In particolare se $G = AB$ è un gruppo fattorizzato da due sottogruppi A e B e se H è un sottogruppo di G allora H si dice *prefattorizzato* se $H = (H \cap A)(H \cap B)$ e *fattorizzato* se è prefattorizzato e se $A \cap B \leq H$. Siccome l' intersezione di ogni famiglia di sottogruppi fattorizzati di G è un sottogruppo fattorizzato, per ogni sottogruppo H di G si può definire il *fattorizzante* $\mathsf{X}_G(H)$ di H in G come l' intersezione di tutti i sottogruppi fattorizzati di G contenenti H.

Il seguente risultato è essenziale per lo studio dei gruppi fattorizzati da sottogruppi abeliani.

LEMMA 1. *Sia $G = AB$ un gruppo fattorizzato da due sottogruppi abeliani A e B. Allora $Z(G)$, il centro di G, è un sottogruppo fattorizzato di G.*

DIMOSTRAZIONE. Si tratta di una conseguenza del Lemma 2.1.2 di [1]. $\square$

Dal teorema di Itô e dal lemma precedente si ottiene il seguente risultato che generalizza il punto (a) del teorema enunciato nel § 1.

PROPOSIZIONE 1. *Sia $G = A_1A_2 \dots A_kA_{k+1}$ un gruppo fattorizzato da $k+1$ sottogruppi abeliani. Se il sottogruppo $A_1A_2 \dots A_k$ è nilpotente di classe c allora G è risolubile ed esiste una funzione f, dipendente solamente da k e da c, tale che la lunghezza derivata di G non supera $f(k, c)$.*

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione procede per induzione su k.

Se $k = 1$ allora, per il teorema di Itô, si può porre $f(1, c) = 2$ (in questo caso si ha necessariamente $c = 1$).

Sia quindi $k \geq 2$. Il sottogruppo A_1A_2 è certamente nilpotente e la sua classe di nilpotenza c_{12} è minore o uguale di c. Sia $Z_1 = Z(A_1A_2) \cap A_1$ e $Z_2 = Z(A_1A_2) \cap A_2$, allora, per il Lemma 1 si ha che $Z(A_1A_2) = Z_1Z_2$. Risulta $Z_1^G \leq A_1A_3 \dots A_kA_{k+1}$ e tale gruppo è, per l' ipotesi induttiva, risolubile con lunghezza derivata al più $f(k-1, c)$. Lo stesso ragionamento si può ripetere per Z_2^G; dunque $N = Z(A_1A_2)^G = Z_1^GZ_2^G$ è un sottogruppo normale di G risolubile con lunghezza derivata al più $2f(k-1, c)$. In $\overline{G} = G/N$ il sottogruppo $\overline{A}_1\overline{A}_2$ ha classe di nilpotenza al più $c_{12} - 1$. Ripetendo il procedimento indicato per (al più) $c_{12} - 1$ volte e ricordando che $c_{12} \leq c$ è possibile costruire un sottogruppo R normale in G e risolubile con lunghezza derivata al più $2(c-1)f(k-1, c)$ contenente il $(c_{12} - 1)$-esimo centro di A_1A_2. In $\widetilde{G} = G/R$ il sottogruppo $\widetilde{A}_1\widetilde{A}_2$ risulta abeliano e quindi $\widetilde{G}$ è fattorizzato tramite k sottogruppi abeliani tali che il prodotto dei primi $k-1$ è nilpotente di classe (al più) c. L' ipotesi induttiva porge che $\widetilde{G}$ è risolubile con lunghezza derivata al più $f(k-1, c)$. Dunque la lunghezza derivata di G non supera $2(c-1)f(k-1, c) + f(k-1, c) = (2c-1)f(k-1, c)$. Ponendo $f(k, c) = 2(2c-1)^{k-1}$ si ottiene la definizione di f e la conclusione della dimostrazione. $\square$

La funzione $f(k, c) = 2(2c-1)^{k-1}$ introdotta nella dimostrazione precedente è (a parte il caso $k = 1$) del tutto irrealistica. Ricordiamo che fino a poco tempo fa la seguente congettura era ancora aperta.

Congettura. Sia $G = AB$ un gruppo finito fattorizzato tramite due sottogruppi nilpotenti A e B di classi rispettivamente c_A e c_B. Allora la lunghezza derivata di G (che è risolubile per il teorema di Wielandt-Kegel) non supera $c_A + c_B$.

Solo recentemente Cossey e Stonehewer in [2] hanno costruito dei gruppi finiti fattorizzati da un gruppo abeliano e da un gruppo nilpotente di classe 2 la cui lunghezza derivata è 4. È assai probabile che la congettura citata sia valida nelle ipotesi molto particolari della nostra Proposizione 1 e che si possa sempre prendere $f(k, c) = c + 1$ (ma gli Esempi 1 e 4 mostreranno che non si può prendere $f(2, 2) = 2$).

Per ottenere la dimostrazione della parte (b) del teorema enunciato nel § 1 si utilizza la seguente applicazione del Lemma 1.

Lemma 2. *Sia $G = A_1A_2A_3$ un gruppo fattorizzato da tre sottogruppi abeliani A_1, A_2, A_3 e sia $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Se T_i è un sottogruppo di G contenuto in $A_i \cap Z(A_iA_j)$ allora $[T_i, G]$ è un sottogruppo normale e abeliano di G contenuto in $[A_i, A_k] = (A_iA_k)'$.*

Dimostrazione. Se X e Y sono sottogruppi di un gruppo G è ben noto che $[X, Y]$ è un sottogruppo normale di $\langle X, Y\rangle$. Dunque il sottogruppo $[T_i, G]$ risulta normale per costruzione. Si ha $[T_i, G] = [T_i, A_iA_jA_k] = [T_i, A_k] \subseteq [A_i, A_k]$. Si conclude osservando che, per il teorema di Itô, $(A_iA_k)'$ risulta abeliano. □

Proposizione 2. *Sia $G = A_1A_2A_3$ un gruppo fattorizzato da tre sottogruppi abeliani A_1, A_2 e A_3. Supponiamo che A_1A_2, A_1A_3 e A_2A_3 siano nilpotenti di classe rispettivamente c_{12}, c_{13} e c_{23}. Allora G risulta nilpotente ed esiste una funzione crescente g tale che la classe di nilpotenza di G è limitata da $g(C)$ ove $C = c_{12} + c_{13} + c_{23}$.*

Dimostrazione. La dimostrazione procede per induzione su C. Se $C = 0$ allora $G = \{1\}$ e ponendo $g(0) = 0$ la tesi è banalmente verificata.

Supponiamo quindi $C > 0$; non è restrittivo supporre che $c_{ij} \neq 0$ per ogni $i, j \in \{1, 2, 3\}$ perché in caso contrario si avrebbe $G = A_k$ e la tesi sarebbe banalmente verificata (in particolare si può porre $g(1) = g(2) = g(3) = 1$). Consideriamo quindi $\gamma_{c_{ij}}(A_iA_j)$, l'ultimo termine non triviale della serie centrale discendente di A_iA_j. Poiché, per il Lemma 1, $Z(A_iA_j)$ è un sottogruppo fattorizzato di A_iA_j e $\gamma_{c_{ij}}(A_iA_j) \leq Z(A_iA_j)$ si ha che anche $\mathsf{X}_{A_iA_j}(\gamma_{c_{ij}}(A_iA_j))$, il fattorizzante di $\gamma_{c_{ij}}(A_iA_j)$ in A_iA_j, è contenuto in $Z(A_iA_j)$. I sei sottogruppi

$$L_{ij} = [\mathsf{X}_{A_iA_j}(\gamma_{c_{ij}}(A_iA_j)) \cap A_i, G] \leq [A_i, A_k] \qquad (\{i,j,k\} = \{1,2,3\})$$

sono, per il Lemma 2, sottogruppi normali e abeliani di G. Distinguiamo quattro casi.

(1) Esistono $i,j \in \{1,2,3\}$ con $L_{ij} = \{1\} = L_{ji}$.

Allora $[\gamma_{c_{ij}}(A_iA_j), G] = \{1\}$, $\gamma_{c_{ij}}(A_iA_j) \leq Z(G)$ e in $\overline{G} = G/Z(G)$ il sottogruppo $\overline{A}_i\overline{A}_j$ ha classe di nilpotenza $\overline{c}_{ij} \leq c_{ij} - 1$. Si ha allora $\overline{C} \leq C - 1$ e, per l' ipotesi induttiva, $\overline{G}$ è nilpotente di classe al più $g(\overline{C}) \leq g(C-1)$.

Ne consegue che in questo caso G è nilpotente e la sua classe di nilpotenza non supera $g(C-1)+1$.

(2) Almeno due tra i sottogruppi L_{ij} sono banali.

Se i due sottogruppi banali hanno gli stessi indici si è ricondotti al caso (1). Quindi non è restrittivo supporre, riordinando gli indici, che $L_{12} = \{1\}$ e $L_{13} = \{1\}$ (il caso $L_{31} = \{1\}$ si tratta in maniera analoga). Dunque i gruppi G/L_{21} e G/L_{31} sono, per il punto (1), nilpotenti di classe al più $g(C-1)+1$. Posto $N = L_{21} \cap L_{31}$ si ha che anche G/N è nilpotente e che la sua classe non supera $g(C-1)+1$.

Sul gruppo N agisce (fedelmente) il gruppo $\overline{G} = G/C_G(N)$. Siccome $N \leq [A_1, A_2] \cap [A_1, A_3]$ e $[A_1, A_2]$, $[A_1, A_3]$ sono abeliani, in $\overline{G}$ il gruppo $\overline{A}_1$ risulta centrale. Quindi per ogni $t \geq 0$ il sottogruppo

$$R_t = [N, \underbrace{A_1, A_1, \ldots A_1}_{t\text{–volte}}]$$

è un sottogruppo di N normalizzato da G. Poiché $NA_1 \leq A_1A_2 \cap A_1A_3$ e $N \leq [A_1, A_2] \cap [A_1, A_3]$ si ha certamente $R_C = \{1\}$. Se per ogni $t = 0, 1, \ldots, C-1$ si considera la sezione $S_t = R_t/R_{t+1}$ risulta $A_1 \leq C_G(S_t)$ e quindi su S_t agisce il gruppo $\widetilde{G} = G/C_G(S_t) = \widetilde{A}_2\widetilde{A}_3$. Il gruppo $\widetilde{A}_2\widetilde{A}_3$ è nilpotente di classe $\widetilde{c}_{23} \leq c_{23} \leq C$ ed il sottogruppo $Z(\widetilde{A}_2\widetilde{A}_3)$ è fattorizzato da $Z_2 = Z(\widetilde{A}_2\widetilde{A}_3) \cap \widetilde{A}_2$ e $Z_3 = Z(\widetilde{A}_2\widetilde{A}_3) \cap \widetilde{A}_3$. Tenendo conto che S_t è una sezione di $[A_1, A_2] \cap [A_1, A_3]$, si ottiene

$$[S_t, \underbrace{Z_2, Z_2, \ldots, Z_2}_{C\text{–volte}}] = \{1\} \quad \text{e} \quad [S_t, \underbrace{Z_3, Z_3, \ldots, Z_3}_{C\text{–volte}}] = \{1\}$$

da cui

$$[S_t, \underbrace{Z(\widetilde{A}_2\widetilde{A}_3), Z(\widetilde{A}_2\widetilde{A}_3), \ldots, Z(\widetilde{A}_2\widetilde{A}_3)}_{(2C-1)\text{–volte}}] = \{1\}.$$

Iterando questo procedimento per al (più) C volte si ottiene che

$$[S_t, \underbrace{\widetilde{G}, \widetilde{G}, \dots \widetilde{G}}_{\rho(C)-\text{volte}}] = \{1\}$$

ove $\rho(C) = (2C-1)^C$. Dunque N è contenuto nel $C\rho(C)$-esimo centro di di G e G risulta nilpotente di classe al più $g(C-1) + C\rho(C) + 1$.

(3) Uno solo tra i sottogruppi L_{ij} è banale. Non è restrittivo supporre, riordinando gli indici, che sia $L_{12} = \{1\}$.

Per il punto (2) i gruppi G/L_{13}, G/L_{31}, G/L_{23} e G/L_{32} sono nilpotenti di classe al più $g(C-1) + C\rho(C) + 1$; per il punto (1) il gruppo G/L_{21} è nilpotente di classe al più $g(C-1)+1$. Posto

$$N = L_{21} \cap L_{13} \cap L_{31} \cap L_{23} \cap L_{32}$$

si ha che anche G/N risulta nilpotente e che la sua classe non supera $g(C-1) + C\rho(C) + 1$. Per il Lemma 2 i tre sottogruppi $[A_1, A_2]$, $[A_1, A_3]$, e $[A_2, A_3]$ sono contenuti in $C_G(N)$ e quindi il gruppo $\overline{G} = G/C_G(N)$ risulta abeliano. Ragionando come nel punto (2) si ottiene

$$[N, \underbrace{\overline{A}_i, \overline{A}_i, \dots, \overline{A}_i}_{(C+1)-\text{volte}}] = \{1\} \quad \text{per ogni } i \in \{1,2,3\}$$

e quindi

$$[N, \underbrace{\overline{G}, \overline{G}, \dots, \overline{G}}_{(3C+1)-\text{volte}}] = \{1\}.$$

Dunque N è contenuto nel $(3C)$-esimo centro di G e G risulta nilpotente di classe al più $g(C-1) + C\rho(C) + 3C + 1$.

(4) Nessuno tra i sottogruppi L_{ij} è banale. Per il punto (3) ogni gruppo G/L_{ij} è nilpotente di classe al più $g(C-1) + C\rho(C) + 3C + 1$. Posto $N = \bigcap_{i \neq j} L_{ij}$ anche il gruppo $\overline{G} = G/N$ risulta nilpotente con classe al più $g(C-1) + C\rho(C) + 3C + 1$. Ragionando come nel punto (3) si ottiene

$$[N, \underbrace{\overline{G}, \overline{G}, \dots, \overline{G}}_{(3C+1)-\text{volte}}] = \{1\}$$

e quindi G risulta nilpotente con classe limitata da $g(C-1) + C\rho(C) +$ $+ 6C + 1$.

Dunque in ogni caso G risulta nilpotente e la sua classe di nilpotenza risulta limitata dalla funzione (crescente) definita induttivamente ponendo $g(0) = 0$, $g(C) = 1$ se $1 \leq C \leq 3$ e $g(C) = g(C-1) + C\rho(C) + 6C + 1$ se $C \geq 4$. $\square$

L'ostacolo a generalizzare la Proposizione 2 a gruppi fattorizzati da più di tre sottogruppi abeliani risiede essenzialmente nella mancanza di una fattorizzazione per il centro di tali gruppi (cioè un analogo del Lemma 1).

Qui di seguito si forniscono alcuni semplici esempi di gruppi fattorizzati da tre (o più) sottogruppi abeliani.

ESEMPIO 1. Sia $G = S_4$ il gruppo simmetrico su 4 oggetti. Se $A_1 = \langle(12)\rangle$, $A_2 = \langle(12)(34), (13)(24)\rangle$ e $A_3 = \langle(123)\rangle$ si verifica facilmente che i tre gruppi abeliani A_1, A_2 e A_3 fattorizzano G. Inoltre A_1A_2 è un 2-sottogruppo di Sylow di G di ordine 8 e nilpotente di classe 2. La lunghezza derivata di G è 3. Questo mostra che nella Proposizione 1 è necessario prendere $f(2,2) \geq 3$.

ESEMPIO 2. Sia p un numero primo e sia C_p il gruppo ciclico di ordine p. Il prodotto intrecciato $W = C_p \wr C_p$ è un gruppo di ordine p^{p+1} e nilpotente di classe p che risulta prodotto semidiretto di un sottogruppo normale N abeliano elementare di ordine p^p tramite un gruppo K di ordine p. Se si considera il prodotto intrecciato $G = W \wr C_p$ esso si può fattorizzare tramite un sottogruppo abeliano elementare A_1 prodotto diretto di p copie di N, un sottogruppo abeliano elementare A_2 prodotto diretto di p copie di K e un sottogruppo cilico A_3 di ordine p. I gruppi A_1A_2, A_1A_3 e A_2A_3 sono tutti nilpotenti di classe p e G risulta nilpotente di classe p^2. Questo mostra che la funzione $g(C)$ della Proposizione 2 non può essere lineare in C. Si osservi che per ogni numero primo p il gruppo G ha lunghezza derivata 3.

ESEMPIO 3. L'Esempio 2 si può generalizzare considerando il prodotto intrecciato iterato

$$G = (\ldots \underbrace{(C_p \wr C_p) \wr \ldots) \wr C_p}_{(n+1)-\text{volte}} .$$

Si verifica che G si può fattorizzare con $n+1$ sottogruppi abeliani elementari ogni coppia dei quali genera un sottogruppo nilpotente di classe p. La classe di nilpotenza di G è p^n.

La Proposizione 2 assume una forma particolarmente soddisfacente quando i sottogruppi A_iA_j hanno tutti classe 2.

PROPOSIZIONE 3. *Sia $G = A_1A_2A_3$ un gruppo fattorizzato da tre sottogruppi abeliani A_1, A_2 e A_3. Supponiamo che A_1A_2, A_1A_3 e A_2A_3 siano nilpotenti di classe al più* 2. *Allora G risulta nilpotente di classe al più* 4.

DIMOSTRAZIONE. Sia $Z_{ij} = Z(A_iA_j) \cap A_i$. Per il Lemma 2 si ha $[Z_{ij}, G] \trianglelefteq G$; inoltre ricordando che A_iA_j è nilpotente di classe al più 2 si ottiene

$$[Z_{ij}, G] \leq [A_i, A_k] \leq Z(A_iA_k) \quad \text{se} \quad \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\},$$

da cui

$$[Z_{ij}, G, G] \leq [Z_{ij}, G] \cap ([Z_{ik}, G][Z_{ki}, G]) \leq Z(A_iA_k) \cap Z(A_iA_j) \leq Z(G).$$

Allora $[A_i, A_j] \leq Z_{ij} \leq Z_3(G)$ per ogni $i, j \in \{1, 2, 3\}$ e nel gruppo $\overline{G} = G/Z_3(G)$ i tre sottogruppi $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$ e $\overline{A}_3$ commutano. Dunque $\overline{G}$ è abeliano e $G = Z_4(G)$ è nilpotente di classe al più 4. □

ESEMPIO 4. Se nell' Esempio 2 si pone $p = 2$, il gruppo $G = A_1A_2A_3$, che risulta nilpotente di classe 4, è fattorizzato tramite tre sottogruppi abeliani elementari A_1, A_2 e A_3 tali che A_iA_j risulta nilpotente di classe 2 per ogni $i, j \in \{1, 2, 3\}$ con $i < j$. Questo mostra che la limitazione determinata nella Proposizione 3 non è migliorabile.

Si osservi infine che la lunghezza derivata di G è 3, il che dimostra che nella Proposizione 1 è necessario prendere $f(2, 2) \geq 3$ anche nel caso in cui tutti i tre sottogruppi A_iA_j abbiano classe 2.

BIBLIOGRAFIA

[1] B. AMBERG - S. FRANCIOSI - F. DE GIOVANNI, *Products of groups*, Clarendon Press, Oxford (1992).

[2] J. COSSEY - S. E. STONEHEWER, *On the derived length of finite dinilpotent groups*, Bull. London Math. Soc., **30**, no. 3 (1998), pp. 247–250.

[3] T. LANDOLFI, *On groups factorized by finitely many subgroups*, Ukraïn. Mat. Zh., **51**, no. 3 (1999), pp. 410–412; traduzione inglese in Ukrainian Math. J., **51**, no. 3 (1999), pp. 455–457.

[4] D. J. S. ROBINSON - S. E. STONEHEWER. *Triple factorizations by abelian groups*, Arch. Math. (Basel), **60**, no. 3 (1993), pp. 223–232.

Manoscritto pervenuto in redazione il 24 aprile 2007.