REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 107 (2002)

Relèvement de schémas et algèbres de Monsky-Washnitzer: théorèmes d'équivalence et de pleine fidélité.

JEAN-YVES ETESSE (*)

Introduction.

Soient $\mathcal{V}$ un anneau noethérien, $I \subset \mathcal{V}$ un idéal, R une $\mathcal{V}$-algèbre noethérienne et $R_0 = R/IR$. Si R est séparé et complet pour la topologie I-adique ou si R est semi-local hensélien de radical I on sait par [EGA IV, 18.3.2 et 18.5.15] que le foncteur $B \mapsto B/IB$ est une équivalence de la catégorie des R-algèbres finies étales, dans la catégorie des R_0-algèbres finies étales.

Ici nous étendons cette équivalence au cas d'une algèbre de Monsky-Washnitzer $R = A^{\dagger}$ («faiblement complète de type fini» cf. I(1)) ou d'un hensélisé au sens de Raynaud $R = \widetilde{A}$; l'équivalence obtenue [théo. 7] répond à une question de [EGA IV, 18.5.16 (i)]. Cette équivalence s'appuie sur le fait [théo. 3] que $(\operatorname{Spec} A^{\dagger}, \operatorname{Spec} A_0)$ est un couple hensélien au sens de [EGA IV, 18.5.5] et on peut alors appliquer le théorème de relèvement de Elkik [E, théo. 6]. On en déduit le relèvement de schémas en groupes finis localement libres, étales ou de type multiplicatif, ou de groupes p-divisibles étales ou de type multiplicatif (cf. I (4)).

Cette propriété de relèvement [théo. 7] n'était jusqu'à présent connue que dans le cas particulier où $\mathcal{V}$ est un anneau de valuation discrète, pour lequel le théorème d'approximation d'Artin s'applique

(*) Indirizzo dell'A.: CNRS, Institut Mathématique, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes cédex, France. E-mail: Jean-Yves.Etesse@univ-rennes1.fr

[v.d.P.]. Le cas où A_0 est de dimension 1 a été également considéré par Matsuda [Ma, 3.2].

Le caractère hensélien du couple $(A^\dagger, A_0)$ est central dans les applications, aussi bien celles mentionnées pour le § II ci-dessous, que dans [Et 1], [Et 2]:

Dans [Et 1] il permet d'obtenir la descente étale des F-isocristaux surconvergents, d'où l'on déduit deux types de résultats:

– des théorèmes de pleine fidélité pour des foncteurs de restriction à un ouvert dense entre F-isocristaux,

– l'expression cohomologique p-adique des fonctions L de schémas abéliens et leur rationalité.

Dans [Et 2] il permet de définir la notion de F-isocristal Dwork-surconvergent, plus générale que celle de F-isocristal surconvergent, et ensuite d'établir la conjecture de Dwork sur la fonction zêta-unité d'un schéma abélien.

Pour poursuivre l'étude des algèbres de Monsky-Washnitzer (également utilisée dans [Et 1], [Et 2]) on particularise en II les hypothèses.

Par exemple en II (1) si A est excellent normal, ou noethérien régulier, ou intégralement clos ou de Dedekind on examine quand ces propriétés se transmettent à $A^\dagger$ [prop. 11 et 12]. Si $\widetilde{A}$ est le hensélisé de A au sens de Raynaud [R] il en résulte des propriétés pour le morphisme $\widetilde{A} \to$ $\to A^\dagger$, par exemple fidèlement plat normal à fibres géométriquement intègres [prop. 13 et 14], d'où un foncteur pleinement fidèle via [SGA 1, cor. 3.4 p. 235] de la catégorie des $\widetilde{A}$-schémas étales vers les $A^\dagger$-schémas étales: le théorème de pleine fidélité obtenu [théo. 15] étend ainsi le cadre du théorème 7 aux schémas étales.

Dans le II (2) on considère le cas où l'anneau de base $\mathcal{V}$ est de valuation discrète complet, d'inégales caractéristiques, d'idéal maximal I et A est une $\mathcal{V}$-algèbre de type fini: le théorème d'approximation d'Artin [v.d.P., cor. 2.4.3] permet de relever des morphismes $f_0 \colon B_0 \to C_0$ de A_0-algèbres lisses en des morphismes de $A^\dagger$-algèbres faiblement complètes de type fini $f \colon B^\dagger \to C^\dagger$ [cf. théo. 17]: on étudie alors les propriétés de f en fonction de celles de f_0. Dans ce cas particulier on retrouve [cf. cor. 1 du théo. 17] l'équivalence de catégories du théorème 7 pour les algèbres finies étales et on l'étend aux complétés faibles d'algèbres étales [cor. 2 du théo. 17].

I. Caractère hensélien des algèbres de Monsky-Washnitzer.

1) *Hensélisés, algèbres complètes et faiblement complètes.*

1.1. Algèbres complètes et faiblement complètes.

On se fixe pour tout l'article les données suivantes.

Soient $\mathcal{V}$ un anneau noethérien, $I \subset \mathcal{V}$ un idéal, A une $\mathcal{V}$-algèbre telle que A soit un anneau noethérien, $A_n = A/I^{n+1}A$, $\widehat{A}$ le séparé complété I-adique de A et $A^\dagger \subset \widehat{A}$ le complété faible de A au-dessus de la paire $(\mathcal{V}, I)$ [M-W, § 1]: on notera toujours par un indice $(\ )_0$ la réduction modulo I d'une $\mathcal{V}$-algèbre ou d'un $\mathcal{V}$-morphisme, et on supposera toujours $IA \neq A$.

On note $A\{\underline{t}\} := A\{t_1, \dots, t_r\}$ l'anneau des séries formelles $\Sigma a_{\underline{\alpha}} t^{\underline{\alpha}}$ avec $\underline{t}^{\underline{\alpha}} := t_1^{\alpha_1} \times \dots \times t_r^{\alpha_r}$ telles que $a_{\underline{\alpha}} \in A$ tend vers 0 pour la topologie I-adique lorsque $|\underline{\alpha}| = \alpha_1 + \dots + \alpha_r + \dots + \alpha_r \to +\infty$. On dit qu'une A-algèbre topologique B ***est topologiquement de type fini*** si elle est isomorphe, comme A-algèbre topologique, à un quotient d'une algèbre de la forme $A\{\underline{t}\}$: puisque A est noethérien on remarquera qu'une $\widehat{A}$-algèbre topologiquement de type fini est noethérienne et séparée complète pour la topologie I-adique.

Si C est une $\mathcal{V}$-algèbre on dit qu'une C-algèbre B est ***faiblement complète de type fini sur*** C si il existe un nombre fini d'éléments $t_1, \dots, t_r$ de B tels que B soit de la forme $C[\underline{t}]^\dagger$, i.e. si B est la complétée faible d'une C-algèbre de type fini: lorsque $C = \mathcal{V}$ on dira simplement que B est faiblement complète de type fini (***f.c.t.f.*** en abrégé); une telle algèbre B est appelée «w.c.f.g.» dans la terminologie de [M-W, § 2].

Grâce à [M-W], on établit facilement les propositions 1 et 1′:

PROPOSITION 1. *Soit C une $\mathcal{V}$-algèbre telle que $C^\dagger$ soit f.c.t.f., et B une C-algèbre finie. Alors*

$$B^\dagger \simeq B \otimes_C C^\dagger \qquad \textit{et} \qquad B^\dagger \textit{ est f.c.t.f.}$$

PROPOSITION 1′. *Supposons que la $\mathcal{V}$-algèbre A est telle que $A^\dagger$ soit f.c.t.f. (par exemple si A est une $\mathcal{V}$-algèbre de type fini). Soit B une $A^\dagger$-algèbre de type fini, alors $B^\dagger$ est f.c.t.f..*

PROPOSITION 2. *Sous les hypothèses de* 1.1 *on a*

(1) $\widehat{A}$ *est de Zariski pour la topologie I-adique, i.e.* $\widehat{A}$ *est noethérien et* $I\widehat{A} \subset \operatorname{Rad}\widehat{A}$.

(2) Si $A^\dagger$ *est f.c.t.f. alors*

(i) $A^\dagger$ *est de Zariski, i.e.* $A^\dagger$ *noethérien et* $IA^\dagger \subset \operatorname{Rad} A^\dagger$,

(ii) $A^\dagger \hookrightarrow \widehat{A}$ *est fidèlement plat et formellement étale pour la topologie I-adique,*

(iii) $A \to A^\dagger$ *est plat (si de plus A est intègre* $A \hookrightarrow A^\dagger$),

(iv) *Si A est régulier, ou si A est plat sur* $\mathcal{V}$, A_0 *régulier et* $\mathcal{V}$ *local régulier, alors* $\widehat{A}$ *et* $A^\dagger$ *sont réguliers,*

(v) *Si* $A^\dagger$ *est régulier et B est une* $A^\dagger$*-algèbre lisse alors* $B^\dagger$ *est f.c.t.f. et régulier.*

DÉMONSTRATION. (1) Résulte de [B, AC III, § 3, n° 4, prop. 8].

(2) Comme $A^\dagger$ est f.c.t.f., $A^\dagger$ est noethérien [M-W, theo. 2.1] et $IA^\dagger \subset \operatorname{Rad} A^\dagger$ [M-W, theo. 1.6]. Puisque $\widehat{A}^\dagger \simeq \widehat{A}$ il résulte de [B, AC III, § 3, n° 5, prop. 9, p. 72] que $A^\dagger \hookrightarrow \widehat{A}$ est fidèlement plat. Compte tenu, pour tout entier $n \geqslant 1$, des isomorphismes [M-W, theo. 1.4]

$$A^\dagger/I^n A^\dagger \xrightarrow{\sim} \widehat{A}/I^n\widehat{A} \xrightarrow{\sim} A/I^n A ,$$

il résulte de [EGA 0_{IV}, 20.7.5 et 19.4.1] que $A^\dagger \hookrightarrow \widehat{A}$ est formellement étale pour la topologie I-adique.

La platitude de $\widehat{A}$ sur A et la fidèle platitude de $\widehat{A}$ sur $A^\dagger$ impliquent la platitude de $A^\dagger$ sur A [B, AC I, § 3, n° 2, prop. 4, p. 47].

Si A est régulier, alors $\widehat{A}$ est régulier [EGA 0_{IV}, 17.3.8.1]. Comme $\widehat{A}$ est fidèlement plat sur $A^\dagger$ on déduit de [EGA IV, 6.5.2 (i)] que $A^\dagger$ est régulier.

Si A est plat sur l'anneau local régulier $\mathcal{V}$ et $A_0 = A/IA \simeq A^\dagger/IA^\dagger$ [M-W, theo. 1.4] est régulier, il résulte de [M-W, lemma 6.1] que $A^\dagger$ est régulier; par suite $\widehat{A}^\dagger \simeq \widehat{A}$ est aussi régulier.

Le (v) résulte de la proposition 1′, du (iv) et de [EGA IV, 17.5.8]. ■

1.2. Hensélisation.

Considérons la partie multiplicative $T = 1 + I.A$ de A, et notons $A_T := T^{-1}A$ le localisé. Alors $I_T := T^{-1}(I.A) \subset \operatorname{Rad} A_T$ et (A_T, I_T) est appelé le localisé de A en $I.A$ [R, § 2, p. 120].

On note $(\widetilde{A}, \tilde{I})$ le hensélisé de (A, IA) au sens de Raynaud [R, déf. 4, p. 124]; alors on a [R, p. 124, 125]:

- $\tilde{I} \subset \mathrm{Rad}\,\widetilde{A}$,
- $\widetilde{A}$ est fidèlement plat sur A_T,
- A, A_T et $\widetilde{A}$ ont des séparés complétés pour la topologie I-adique qui sont isomorphes: ici (cf. 1.1) A est noethérien, donc $\widehat{A}$ est fidèlement plat sur A_T et sur $\widehat{A}$ [B, AC III, § 3, n° 5, prop. 9].
- $\widetilde{A}$ est réduit (resp. normal, resp. noethérien) si et seulement s'il en est de même pour A_T: ici A est noethérien donc $\widetilde{A}$ est noethérien et on a des isomorphismes [M-W, theo. 1.4]

$$\widetilde{A}/I^n\widetilde{A} \simeq \widehat{A}/I^n\widehat{A} \simeq A/I^nA \simeq A^\dagger/I^nA^\dagger;$$

d'où le lemme suivant [EGA 0_{IV}, 19.4.1, 20.7.5]:

LEMME. *$\widehat{A}$, $\widetilde{A}$ et $A^\dagger$ sont formellement étales sur A pour la topologique I-adique.*

1.3. Couples henséliens.

Dorénavant lorsque l'on considérera $A^\dagger$, on supposera toujours que $A^\dagger$ **est f.c.t.f.**.

THÉORÈME 3. *Notons R l'un des anneaux $\widehat{A}$, $A^\dagger$, $\widetilde{A}$ et posons $S =$ $= \mathrm{Spec}\,R$, $S_0 = \mathrm{Spec}\,R/IR = \mathrm{Spec}\,A_0$. Alors (S, S_0) est un couple hensélien au sens de* [EGA IV, 18.5.5].

DÉMONSTRATION. Pour un schéma Y notons $\mathcal{O}f(Y)$ l'ensemble des parties à la fois ouvertes et fermées de l'espace sous-jacent à Y: $\mathcal{O}f(Y)$ est en bijection avec l'ensemble $\mathrm{Idemp}\,\Gamma((Y, \mathcal{O}_Y))$ des idempotents de l'anneau $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ [cf. EGA IV, démonstration de 18.5.3].

Soient $S' = \mathrm{Spec}B$ un S-schéma fini et

$$\varphi : \mathcal{O}f(S') \to \mathcal{O}f(S' \times_S S_0)$$

l'application canonique.

Si $S = \mathrm{Spec}\,\widehat{A}$, φ est bijective [EGA IV, 18.5.16 (ii)].

Si $S = \mathrm{Spec}\,\widetilde{A}$, alors (B, IB) est hensélien [R, prop. 2 (1) p. 124] au sens de Raynaud [R, déf. 3 p. 124], $\widetilde{B} \simeq B$ et on a une surjection [R, prop. 1 p. 121]

$$\mathrm{Idemp}(B) \twoheadrightarrow \mathrm{Idemp}(B_0).$$

Comme $\widehat{B}$ est fidèlement plat sur $\widetilde{B} \simeq B$ [R, p. 125] on a une injection $B \hookrightarrow \widehat{B}$ d'où

$$\mathrm{Idemp}(B) \subset \mathrm{Idemp}(\widehat{B}) \simeq \mathrm{Idemp}(B_0);$$

ainsi φ est bijective.

Si $S = \mathrm{Spec}\, A^{\dagger}$, B est f.c.t.f. [M-W, theo. 6.1] et est fidèlement plat sur B, d'où

$$\mathrm{Idemp}(B) \subset \mathrm{Idemp}(\widehat{B}) \simeq \mathrm{Idemp}(B_0)$$

et φ est injective. Or φ est aussi surjective [M-W, theo. 3.8], d'où le théorème. ■

COROLLAIRE 1. *Il existe un morphisme fidèlement plat* $\widetilde{A} \hookrightarrow A^{\dagger}$.

DÉMONSTRATION. L'existence d'un morphisme $(\widetilde{A}, I\widetilde{A}) \to (A^{\dagger}, IA^{\dagger})$ provient du théorème 3 et de [R, déf. 4 p. 124]. Comme $\widehat{A}$ est fidèlement plat sur $A^{\dagger}$ et sur $\widetilde{A}$ [R. p. 125], il résulte de [B, AC I, § 3, n° 4, prop. 7] que $A^{\dagger}$ est fidèlement plat sur $\widetilde{A}$. ■

COROLLAIRE 2. *Avec les notations du théorème* 3 *on a l'équivalence*:

$$S_0 \ \textit{connexe} \Leftrightarrow S \ \textit{connexe}.$$

DÉMONSTRATION. Résulte du théorème 3 et de [EGA IV, 18.5.4(a)] car il y a une bijection entre les parties à la fois ouvertes et fermés de S_0 et de S. ■

2) *Relèvement de schémas.*

THÉORÈME 4. *On utilise les notations du théorème* 3.

(1) *Tout morphisme lisse* $u_0 \colon A_0 \to B_0$ *se relève en un morphisme lisse* $u : R \to B$. *Toute section* $\varepsilon_0 \colon B_0 \to A_0$ *de* u_0 *se relève en un section* $\varepsilon : B \to R$ *de* u.

(2) *Si* u_0 *est étale, alors le* u *de* (1) *est étale.*

(3) *Si* u_0 *est fini étale, alors le* u *de* (1) *est fini étale.*

DÉMONSTRATION. (1) Étant donné un morphisme lisse $u_0 \colon A_0 \to B_0$ l'existence d'un relèvement lisse $u : R \to B$ résulte de [E, théo. 6] et du théorème 3. L'existence de ε résulte de [E, théorème p. 568].

(2) Si u_0 est étale on relève d'abord B_0 en une R-algèbre lisse B; alors $B_n := B/I^{n+1}B$ est lisse sur A_n. Par [EGA IV, 18.1.2] il existe une A_n-algèbre étale C_n relevant $u_0 \colon A_0 \to B_0$, telle que $C_n \otimes_{A_n} A_{n-1} \simeq C_{n-1}$. Puisque C_1 est étale sur A_1 il existe un unique A_1-morphisme $\varphi_1 \colon C_1 \to B_1$ relevant l'identité de $C_0 = B_0$: φ_1 est formellement lisse (pour la topologie discrète) via [EGA IV, 17.1.4] et donc lisse grâce à [EGA I, 6.3.4, (v)]. Comme $\operatorname{Spec} B_0 \hookrightarrow \operatorname{Spec} B_1$ et $\operatorname{Spec} C_0 \hookrightarrow \operatorname{Spec} C_1$ sont des homéomorphismes universels [SGA 4, VIII, Rq 1.4], $\operatorname{Spec}(\varphi_1)$ est aussi un homéomorphisme; comme il est de type fini, $\operatorname{Spec} \varphi_1$ est quasi-fini [EGA I, 6.11.3]. Par suite φ_1 est étale [EGA IV, 17.6.1 (b)] et donc B_1 est étale sur A_1, d'où φ_1 est un isomorphisme [EGA IV, 18.1.2].

De proche en proche les B_n sont étales sur A_n et uniques à A_n-isomorphisme près. Il s'agit de prouver que B est non ramifié sur R: par descente fidèlement plate [EGA IV, 17.7.4] et [prop. 2, cor. 1 du théo. 3] il suffit de traiter le cas $R = \widehat{A}$.

Il faut prouver que $\Omega^1_{B/\widehat{A}} = 0$ [EGA 0_{IV}, 20.7.4]. Puisque B_n est étale sur A_n, on a $\Omega^1_{B_n/A_n} = 0$; or $\Omega^1_{B/\widehat{A}}$ est un B-module projectif de type fini [EGA IV, 17.2.3 (i)], donc

$$\widehat{\Omega^1_{B/\widehat{A}}} \simeq \Omega^1_{B/\widehat{A}} \otimes_B \widehat{B} \simeq \varprojlim_n (\Omega^1_{B_n/A_n}) = 0\,;$$

comme l'assertion est locale sur B on peut supposer $\Omega^1_{B/\widehat{A}}$ libre de type fini sur B, et l'égalité précédente fournit la nullité de $\Omega^1_{B/\widehat{A}}$. Ainsi B est étale sur $\widehat{A} = R$.

(3) Si u_0 est fini étale, il se relève en $u : R \to B$ lisse, et u est étale via (2); donc $u_n \colon A_n \simeq R/I^{n+1}R \to B_n$ est étale. Notons $\tilde{u}_n = \operatorname{Spec}(u_n)$ et $\tilde{i}_n \colon \operatorname{Spec} A_0 \hookrightarrow \operatorname{Spec} A_n$, $\tilde{j}_n \colon \operatorname{Spec} B_0 \hookrightarrow \operatorname{Spec} B_n$ les immersions fermées. Comme $\tilde{u}_0$ et $\tilde{i}_n$ sont finis, $\tilde{i}_n \circ \tilde{u}_0 = \tilde{u}_n \circ \tilde{j}_n$ est propre; or $\tilde{j}_n$ est surjectif (homéomorphisme) et $\tilde{u}_n$ séparé de type fini, donc $\tilde{u}_n$ est propre [EGA II, 5.4.3 (ii)]: comme $\tilde{u}_n$ est quasi-fini [EGA IV, 17.6.1 (b)], il en résulte [EGA III, 4.4.2] que $\tilde{u}_n$ est fini. Pour prouver que u est fini, il suffit par descente fidèlement plate [EGA IV, 2.7.1 (xv)] de traiter le cas $R = \widehat{A}$. Par [EGA IV, 18.3.1 (ii)], B_n est un A_n-module projectif de type fini, d'où [EGA IV, 18.3.2.1 (ii)] B est un $\widehat{A}$-module projectif de type fini. ∎

COROLLAIRE 1. *Soient B_0 et C_0 deux A_0-algèbres lisses relevées via le théorème* 4 *en deux $\widehat{A}$-algèbres lisses* B *et* C.

(1) *Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux $\widehat{A}$-algèbres plates, séparées et complètes (pour la topologie I-adique), et formellement lisses (pour la topologie I-adique) relevant B_0 et C_0.*

Tout A_0-morphisme $f_0\colon B_0 \to C_0$ se relève en un $\widehat{A}$-morphisme $f\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$.

De plus f est bijectif si et seulement si f_0 l'est: en particulier on a des isomorphismes $\mathcal{B} \simeq \widehat{B}$, $\mathcal{C} \simeq \widehat{C}$.

(2) *Le morphisme f du* (1) *est surjectif si et seulement si f_0 l'est.*

(3) *Si B_0 et C_0 sont finis étales sur A_0 alors f est injectif si et seulement si f_0 l'est.*

DÉMONSTRATION. (1) Sur B_0 et C_0 la topologie I-adique coïncide avec la topologie discrète et $f_0\colon B_0 \to C_0$ est continu car $\mathcal{V}$-linéaire. La projection canonique $\mathcal{B} \to B_0 = \mathcal{B}/I\mathcal{B}$ est $\widehat{A}$-linéaire, donc $\mathcal{V}$-linéaire, par suite elle est continue pour les topologies I-adiques sur $\mathcal{B}$ et B_0. Si l'on munit $\mathcal{B}$ de la topologie I-adique et $C_n := \mathcal{C}/I^{n+1}\mathcal{C}$ de la topologie discrète, on peut relever $f_0\colon B_0 \to C_0$ en un morphisme continu $f_1\colon \mathcal{B} \to C_1$ [EGA 0_{IV}, 19.3.1] et de proche en proche en $f_n\colon \mathcal{B} \to C_n$, d'où $f\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$.

Si f est bijectif, f_0 l'est: la réciproque résulte de [EGA 0_{I}, 6.6.21]. D'où les $\widehat{A}$-isomorphismes $\mathcal{B} \simeq \widehat{B}$, $\mathcal{C} \simeq \widehat{C}$, car $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont formellement lisses (pour la topologie I-adique) sur $\widehat{A}$ via [EGA 0_{IV}, 19.4.1].

(2) Si f est surjectif, f_0 l'est par exactitude à droite du produit tensoriel. Inversement supposons f_0 surjectif et notons $\mathrm{gr}(f)\colon \mathrm{gr}^{\cdot}_{I}(\widehat{B}) \to$ $\to \mathrm{gr}^{\cdot}_{I}(\widehat{C})$ le morphisme induit par f sur les gradués pour la topologie I-adique. Comme $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont plats sur $\widehat{A}$, $\mathrm{gr}(f)$ s'identifie à

$$\mathrm{gr}(f) = \mathrm{Id}(\mathrm{gr}^{\cdot}_{I}(\widehat{A})) \otimes_{A_0} f_0\colon \mathrm{gr}^{\cdot}_{I}(\widehat{A}) \otimes_{A_0} B_0 \to \mathrm{gr}^{\cdot}_{I}(\widehat{A}) \otimes_{A_0} C_0$$

[B, AC III, § 5, n° 2, théo. 1], donc gr(f) est surjectif. Or $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont séparés et complets, donc f est surjectif [B, AC III, § 2, n° 8, cor. 2].

(3) Si B_0 et C_0 sont finis étales sur A_0, alors [théo. 4 (3)] B et C sont finis étales sur $\widehat{A}$ et $\widehat{B} \simeq B$, $\widehat{C} \simeq C$. Comme f_0 est nécessairement fini [EGA II, 6.1.5] et étale [EGA IV, 17.3.5], on relève f_0 en $f\colon B \to C$ via le théorème 4, nécessairement fini étale: l'unicité de f résulte de [EGA IV, 18.3.2].

Si f est injectif, comme f est fini étale, Spec f est propre et dominant donc surjectif, par suite f est fidèlement plat: la fidèle platitude est conservée par changement de base, donc f_0 est fidèlement plat et en particulier injectif. Inversement si f_0 est injectif alors il est fidèlement plat. En notant $f_n\colon B_n \to C_n$ les morphismes induits par f, $\operatorname{Spec} f_n$ est surjectif car $\operatorname{Spec} f_0$ est surjectif et $\operatorname{Spec} B_0 \hookrightarrow \operatorname{Spec} B_n$, $\operatorname{Spec} C_0 \hookrightarrow \operatorname{Spec} C_n$ sont des homéomorphismes; donc f_n est fidèlement plat et en particulier injectif. Il en résulte que $f := \varprojlim_n f_n$ est injectif. ∎

COROLLAIRE 2. *Avec les notations du théorème 4 soit $u_0\colon A_0 \to B_0$ un morphisme fini étale relevé en $u : R \to B$ lisse (donc fini étale). Alors u est surjectif (resp. injectif, resp. bijectif) si et seulement si u_0 l'est.*

DÉMONSTRATION. Puisque u_0 est fini étale, $u : R \to B$ l'est [théorème 4]. Dire que u est surjectif (resp. injectif) équivaut à dire que $\operatorname{Spec} u$ est une immersion fermée (resp. u est fidèlement plat), ce qui par descente fidèlement plate équivaut aux mêmes propriétés pour $v := u \otimes 1_{\widehat{A}}$ [EGA IV, 2.7.1 (xii), 2.6.1, 2.5.1] et donc aux mêmes pour $u_0 = v_0$ [corollaire 1, (2) et (3)]. ∎

COROLLAIRE 3. *Le foncteur*

$$B \mapsto B/IB$$

est une équivalence de catégories, de la catégorie des $\widehat{A}$-algèbres plates, topologiquement de type fini, formellement étales pour la topologie I-adique, dans la catégorie des A_0-algèbres étales.

DÉMONSTRATION. Puisque toute $\widehat{A}$-algèbre plate, topologiquement de type fini, formellement étale pour la topologie I-adique est $\widehat{A}$-isomorphe au séparé complété I-adique d'une $\widehat{A}$-algèbre étale [cor 1 (1)] le foncteur $B \mapsto B/IB$ ci-dessus est essentiellement surjectif grâce au [théo. 4 (2)].

Comme B est formellement étale sur $\widehat{A}$ pour la topologie I-adique, la flèche $\operatorname{Hom}_{\widehat{A}}(B, C) \to \operatorname{Hom}_{A_0}(B_0, C_0)$ est bijective. ∎

3) *Des équivalences de catégories.*

PROPOSITION 5. *Le foncteur*

$$B^\dagger \mapsto \widehat{B}$$

de la catégorie des complétés faibles de $A^\dagger$-algèbres de type fini dans la catégorie des $\widehat{A}$-algèbres topologiquement de type fini, est fidèle.

REMARQUE. Remarquons par [EGA IV, 2.2.16] que le foncteur analogue $B \mapsto B \otimes_{A^\dagger} \widehat{A}$ des $A^\dagger$-algèbres vers les $\widehat{A}$-algèbres, est fidèle.

DÉMONSTRATION. Soient B et C deux $A^\dagger$-algèbres de type fini, $C_0 :=$ $:= C/IC$ et $f, g : B^\dagger \to C^\dagger$ deux $A^\dagger$-morphismes tels que $\widehat{f} = \widehat{g} : \widehat{B} \to \widehat{C}$; il s'agit de prouver que $f = g$. Notons $i : B \to B^\dagger$ l'application canonique, $f_1 = f \circ i$, $g_1 = g \circ i$: on a $\widehat{f}_1 = \widehat{f} = \widehat{g} = \widehat{g}_1$. Comme $\widehat{f}_1 = \widehat{g}_1$, les morphismes Spec f_1 et Spec g_1 coïncident sur un voisinage de Spec C_0 dans Spec $C^\dagger$ [EGA I, 10.9.4]; or $C^\dagger$ est f.c.t.f. [prop 1′] et par le théorème 3 (Spec $C^\dagger$, Spec C_0) est un couple hensélien, donc $f_1 = g_1$ [EGA IV, 18.5.4.3]. Par [M-W, theo. 1.5] on en déduit $f = g$. ■

Si B est une $\mathcal{V}$-algèbre, on a un résultat analogue pour le hensélisé $\widetilde{B}$ de (B, IB) au sens de Raynaud [R, déf. 4, p. 124]:

PROPOSITION 5′. *Le foncteur*

$$\widetilde{B} \overset{\mathcal{F}}{\mapsto} \widehat{B} \ (resp.\ \ \widetilde{B} \overset{\mathcal{G}}{\mapsto} B^\dagger)$$

de la catégorie des hensélisés de $\widetilde{A}$-algèbres de type fini dans la catégorie des $\widehat{A}$-algèbres topologiquement de type fini (resp. dans la catégorie des complétés faibles de $A^\dagger$-algèbres de type fini) est fidèle.

DÉMONSTRATION. D'abord pour $\mathcal{F}$: soient B et C deux $\widetilde{A}$-algèbres de type fini, $C_0 = C/IC$ et $f, g : \widetilde{B} \to \widetilde{C}$ deux $\widetilde{A}$-morphismes tels que $\widehat{f} = \widehat{g} : \widehat{B} \to \widehat{C}$; prouvons que $f = g$. Soit $i : B \to \widetilde{B}$ le morphisme canonique, $f_1 = f \circ i$, $g_1 = g \circ i$. On prouve comme pour la proposition 5 que $f_1 =$ $= g_1$. De la propriété universelle du hensélisé [R, déf. 4 p. 124] on en déduit $f = g$. La fidélité de $\mathcal{G}$ en résulte. ■

PROPOSITION 6. *Le foncteur*

$$B^\dagger \mapsto \widehat{B}$$

de la catégorie des complétés faibles de $A^\dagger$-algèbres lisses (resp. de $A^\dagger$-algèbres étales) dans la catégorie des $\widehat{A}$-algèbres plates, topologiquement de type fini, formellement lisses (resp. formellement étales) pour la topologie I-adique, est essentiellement surjectif et fidèle.

DÉMONSTRATION. D'abord $\widehat{B}$ appartient bien à la catégorie indiquée et la fidélité vient d'être établie.

Soit $\mathcal{C}$ une $\widehat{A}$-algèbre plate, topologiquement de type fini et formellement lisse (resp. formellement étale) sur $\widehat{A}$ pour la topologie I-adique;

$C_0 = \mathcal{C}/I\,\mathcal{C}$ est une A_0-algèbre plate, de type fini et formellement lisse (resp. formellement étale) sur A_0 [EGA 0_{IV}, 19.3.5 (iii)] (pour la topologie I-adique ou la topologie discrète car les deux coïncident modulo I), donc C_0 est lisse (resp. étale): soit B une $A^\dagger$-algèbre lisse (resp. étale) relevant C_0 [théo 4]. Alors $\widehat{B} \simeq \widehat{B}^\dagger$ est une $\widehat{A}$-algèbre plate, séparée complète, formellement lisse (resp. formellement étale) pour la topologie I-adique, qui relève C_0, donc $\mathcal{C}$ et $\widehat{B}$ sont $\widehat{A}$-isomorphes [cor. 1 du théo. 4] et le foncteur ci-dessus est essentiellement surjectif. ■

Par la même démonstration on établit:

PROPOSITION 6′. *Le foncteur*

$$\widetilde{B} \mapsto \widehat{B}$$

de la catégorie des hensélisés de $\widetilde{A}$-algèbres lisses (resp. de $\widetilde{A}$-algèbres étales) dans la catégorie des $\widehat{A}$-algèbres plates, topologiquement de type fini, formellement lisses (resp. formellement étales) pour la topologie I-adique, est essentiellement surjectif et fidèle.

Signalons pour mémoire le résultat suivant, conséquence de [E, théorème 5] et du théorème 3:

THÉORÈME 6″. *Soit R l'un des anneau $\widetilde{A}$, $A^\dagger$; notons $S = \operatorname{Spec} R$, $S' = \operatorname{Spec} \widehat{A}$, $S_0 = \operatorname{Spec}(R/IR) \simeq \operatorname{Spec}(\widehat{A}/I\widehat{A})$, $U = S \backslash S_0$, $U' = S' \backslash S_0$. Le foncteur*

$$B \mapsto B \otimes_R \widehat{A}$$

est une équivalence de catégories, entre la catégorie des R-algèbres finies, induisant un revêtement étale de U, et la catégorie correspondante sur $\widehat{A}$ et U'.

THÉORÈME 7. *Avec les notations du théorème 3, le foncteur*

$$X \mapsto X \times_S S_0$$

est une équivalence de catégories, de la catégorie des S-schémas finis étales dans la catégorie analogue sur S_0.

DÉMONSTRATION. Par le [théorème 4, (3)] ce foncteur est essentiellement surjectif.

Prouvons la pleine fidélité. Soient X, Y deux S-schémas finis étales.

La flèche

$$\mathrm{Hom}_S(X,\,Y) \to \mathrm{Hom}_{S_0}(X_0,\,Y_0)$$

s'identifie à

$$\varphi : \Gamma(X \times_S Y/X) \to \Gamma(X_0 \times_{S_0} Y_0/X_0)$$

où $\Gamma(X \times_S Y/X)$ désigne les X-sections de $X \times_S Y$ (idem avec l'indice 0).

Prouvons que $(X,\,X_0)$ est un couple hensélien: c'est clair si $R = \widehat{A}$; si $R = A^{\dagger}$, X est f.c.t.f. d'après [M-W, theo. 6.1], donc $(X,\,X_0)$ est hensélien [théo. 3]; si $R = \widetilde{A}$, X est hensélien au sens de Raynaud [R, prop. 2 p. 124], donc $(X,\,X_0)$ est hensélien au sens de [EGA IV, 18.5.5] d'après le théorème 3. D'après [EGA IV, 18.5.4 (b)] φ est une bijection car X est quasi-compact et quasi-séparé. ■

REMARQUE 1. Le théorème 7 répond à une question de [EGA IV, 18.5.16 (i)].

REMARQUE 2. Il serait intéressant de comparer les théorèmes 7 et 6″ aux résultats d'équivalence de Moret-Bailly [M-B].

4) *Relèvement de schémas en groupes.*

THÉORÈME 8. *Avec les notations du théorème* 3 *on a:*

(1) *Tout schéma en groupes fini étale (resp. et commutatif)* $G_0 \to$ $\to S_0 = \mathrm{Spec}\,A_0$ *se relève de manière unique à* R*-isomorphisme près en un* R*-schéma en groupes fini étale (resp. et commutatif)* $G \to S =$ $= \mathrm{Spec}\,R$.

(2) *Si* H_0 *est un autre* A_0*-schéma en groupes fini étale relevé en un* R*-schéma en groupes fini étale* H *alors on a une bijection*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{S-gp}}(\mathrm{G},\,\mathrm{H}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{S_0-gp}(G_0,\,H_0)\,.$$

DÉMONSTRATION. (1) Soit $G_0 = \mathrm{Spec}\,B_0 \xrightarrow{\pi_0} S_0 = \mathrm{Spec}\,A_0$ un S_0-schéma en groupes fini étale, m_0: $G_0 \times_{S_0} G_0 \to G_0$ la multiplication, i_0: $G_0 \to G_0$ le passage à l'inverse, ε_0: $S_0 \to G_0$ la section unité, Δ_0: $G_0 \to G_0 \times_{S_0} G_0$ le morphisme diagonal. Les morphismes m_0, i_0, ε_0 et Δ_0 sont finis étales via [EGA II, 6.1.5 (v)] et [EGA IV, 17.1.4]. Par le théorème 4 on relève π_0 en $\pi : G = \mathrm{Spec}\,B \to S$ fini étale. Alors $G \times_S G = \mathrm{Spec}\,(B \otimes_R B)$ est un R-schéma fini étale. Les diagrammes commutatifs qui expriment le fait que

G_0 est un S_0-schéma en groupes

(A)
$$\begin{tikzcd} G_0 \times_{S_0} G_0 \times_{S_0} G_0 \arrow[r, "1\times m_0"] \arrow[d, "m_0\times 1"] & G_0 \times_{S_0} G_0 \arrow[d, "m_0"] \\ G_0 \times_{S_0} G_0 \arrow[r, "m_0"] & G_0 \end{tikzcd} \qquad \text{où} \quad 1 := \mathrm{Id}_{G_0}$$

(E)
$$\begin{tikzcd} G_0 \times_{S_0} G_0 \arrow[r, "m_0"] & G_0 \\ S_0 \times_{S_0} G_0 \arrow[r, "1"] \arrow[u, "\varepsilon_0\times 1"] & G_0 \arrow[u, "1"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G_0 \times_{S_0} G_0 \arrow[r, "m_0"] & G_0 \\ G_0 \times_{S_0} S_0 \arrow[r, "1"] \arrow[u, "1\times\varepsilon_0"] & G_0 \arrow[u, "1"] \end{tikzcd}$$

(I)
$$\begin{tikzcd} G_0 \arrow[r, "\Delta_0"] \arrow[d, "\pi_0"] & G_0 \times_{S_0} G_0 \arrow[r, "1\times i_0"] & G_0 \times_{S_0} G_0 \arrow[d, "m_0"] \\ S_0 \arrow[rr, "\varepsilon_0"] & & G_0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G_0 \arrow[r, "\Delta_0"] \arrow[d, "\pi_0"] & G_0 \times_{S_0} G_0 \arrow[r, "i_0\times 1"] & G_0 \times_{S_0} G_0 \arrow[d, "m_0"] \\ S_0 \arrow[rr, "\varepsilon_0"] & & G_0 \end{tikzcd}$$

se relèvent en des diagrammes analogues sur R qui sont commutatifs par l'unicité des relèvements [théorème 7].

Même raisonnement dans le cas d'un schéma en groupes commutatif.

(2) Résulte du théorème 7 et des relèvements des diagrammes commutatifs exprimant le fait que f_0: $G_0 \to H_0$ est un morphisme de S_0-schémas en groupes. ■

DÉFINITION [M, I, § 2]. *Soit p un nombre* 1^{er}.

(1) *Un groupe p-divisible G sur un schéma S (ou groupe de Barsotti-Tate) est la donnée d'un système inductif* $(G(n), i_n)$ *tel que*

- *$G(n)$ est un S-schéma en groupes commutatif fini localement libre,*
- *i_n: $G(n) \to G(n+1)$ est une S-immersion fermée,*
- $G = \varinjlim_n G(n)$,
- *la multiplication par p dans $G(n+1)$ induit un épimorphisme* $\underline{p} : G(n+1) \to G(n)$.

(2) *Un groupe p-divisible sur S est dit étale (resp. de type multiplicatif) si chaque $G(n)$ est fini étale (resp. si le dual de Cartier $G(n)^*$ de chaque $G(n)$ est fini étale) sur S.*

THÉORÈME 9. *Avec les notation du théorème* 3, *on a:*

(1) *Tout groupe p-divisible étale* $G_0 \to S_0 = \operatorname{Spec} A_0$ *se relève de manière unique à R-isomorphisme près en un R-groupe p-divisible étale* $G \to S = \operatorname{Spec} R$.

(2) *Si* H_0 *est un autre* A_0*-groupe p-divisible étale relevé en un R-groupe p-divisible étale H, alors on a une bijection*

$$\operatorname{Hom}_{S\text{-}gp\,div}(G, H) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{S_0\text{-}gp\,\mathrm{div}}(G_0, H_0)\,.$$

(3) *Supposons* S_0 *de caractéristique* $p > 0$ *et S muni d'un relèvement* F_S *du Frobenius absolu* F_{S_0} *de* S_0*(*F_{S_0} *est l'identité sur l'espace sous-jacent à* S_0 *et l'élévation à la puissance p sur* A_0*). Si* G_0 *est un* S_0*-groupe p-divisible étale, alors l'isomorphisme de Frobenius* F_{G_0/S_0}: $G_0 \xrightarrow{\sim} F^*_{S_0}(G_0)$ *se relève de manière unique en un R-isomorphisme* $F_{G/S}\colon G \xrightarrow{\sim} F^*_S(G)$.

DÉMONSTRATION. (1) L'existence pour tout n de $G(n) \to S = \operatorname{Spec} R$ fini étale vient du théorème 8: comme R est noethérien, $G(n)$ est localement libre sur R via [B, AC II, § 5, n° 2, cor 2 du théo 1]. L'immersion fermée $i_{0,n}\colon G_0(n) \to G_0(n+1)$ se relève en une R-immersion fermée $i_n\colon G(n) \to G(n+1)$ via le corollaire 2 du théorème 4. L'épimorphisme $\underline{p}: G_0(n+1) \to G_0(n)$ correspond à un morphisme fidèlement plat fini étale $f_0\colon \mathcal{O}_{G_0(n)} \hookrightarrow \mathcal{O}_{G_0(n+1)}$ qui se relève [cor 2 du théo. 4] en $f: \mathcal{O}_{G(n)} \hookrightarrow \mathcal{O}_{G(n+1)}$ injectif, fini étale, donc $\operatorname{Spec} f$ est fidèlement plat et c'est un épimorphisme $\operatorname{Spec} f : G(n+1) \to G(n)$. Alors $G :=$ $:= \varinjlim_n (G(n), i_n)$ résout la question.

(2) Résulte du théorème 8.

(3) Supposons S_0 de caractéristique $p > 0$ et S muni d'un relèvement F_S du frobenius F_{S_0} de S_0. Pour tout S_0-schéma X localement de présentation finie, soit F_X le Frobenius absolu de X; on a un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[drr, bend left, "F_X"] \arrow[dr, dashed, "F_{X/S_0}"'] \arrow[ddr, bend right, "\pi_0"'] & & \\
& F^*_{S_0}(X) \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "\pi_0"] \\
& S_0 \arrow[r, "F_{S_0}"'] & S_0
\end{tikzcd}\;.$$

Alors [SGA 5, XIV, prop. 2 (c) 2)] dire que π_0 est étale équivaut à dire que F_{X/S_0} est un isomorphisme: dans le cas $X = G_0(n)$, où G_0 est un groupe p-divisible étale, on relève l'isomorphisme $F_{G_0(n)/S_0}$ en un R-isomorphisme $F_{G(n)/S}\colon G(n) \xrightarrow{\sim} F_S^*(G(n))$ via le corollaire 2 du théorème 4. ■

THÉORÈME 10. *Avec les notations du théorème* 3, *on a*:

(1) *Tout S_0-groupe p-divisible de type mutiplicatif G_0 se relève de manière unique à R-isomorphisme près en un R-groupe p-divisible de type multiplicatif* $G \to S := \operatorname{Spec} R$.

(2) *Si H_0 est un autre S_0-groupe p-divisible de type mutiplicatif relevé en un R-groupe p-divisible de type multiplicatif H, alors on a une bijection*

$$\mathrm{Hom}_{S\text{-}gp\,\mathrm{div}}(G, H) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{S_0\text{-}gp\,\mathrm{div}}(G_0, H_0).$$

(3) *Supposons S_0 de caractéristique $p > 0$ et S muni d'un relèvement F_S du Frobenius absolu F_{S_0} de S_0. Si G_0 est un S_0-groupe p-divisible de type multiplicatif, alors l'isomorphisme de décalage $V_{G_0/S_0}\colon F_{S_0}^*(G_0) \xrightarrow{\sim} G_0$ se relève de manière unique en un R-isomorphisme $V_{G/S}\colon F_S^*(G) \xrightarrow{\sim} G$.*

DÉMONSTRATION. Le (1) et le (2) se déduisent du [théorème 9, (1), (2)] par dualité de Cartier.

Pour le (3) notons $G_0^* = \varinjlim_n (G_0(n))^*$ où $(G_0(n))^*$ est le dual de Cartier de $G_0(n)$: le dual de Cartier du Frobenius $F_{G_0^*/S_0} = (F_{G_0(n)^*/S_0})_n$ définit le morphisme de décalage $V_{G_0/S_0}\colon F_{S_0}^*(G_0) \to G_0$ et on a $V_{G_0/S_0} \circ F_{G_0/S_0} = p\mathrm{Id}_{G_0}$, $F_{G_0/S_0} \circ V_{G_0/S_0} = p\mathrm{Id}_{F_{S_0}^*(G_0)}$. Dire que G_0 est de type multiplicatif équivaut à dire que V_{G_0}/S_0 est un isomorphisme et on relève cet isomorphisme en un R-isomorphisme $V_{G/S}\colon F_S^*(G) \xrightarrow{\sim} G$ via [cor. 2 du théo. 4]. ■

II. Algèbres de Monsky-Washnitzer dans des cas spéciaux.

1) *Cas A excellent ou noethérien régulier.*

On utilisera les notations du I 1); en particulier $IA \neq A$.

PROPOSITION 11. (1) *Si A est un anneau excellent et normal (resp. A un anneau noethérien et régulier), alors*

(i) $\widehat{A}, \widetilde{A}, A_T$ *sont noethériens et normaux (resp. noethériens réguliers),*

(ii) *Si* Spec A *est connexe et IA plat sur A (ou I principal), alors* $A, \widehat{A}, \widetilde{A}, A_T$ *sont intégralement clos.*

(2) *Si A est une* $\mathcal{V}$*-algèbre normale de type fini et* $\mathcal{V}$ *excellent (resp. A noethérien régulier et* $A^\dagger$ *f.c.t.f.) alors:*

(i) $A^\dagger$ *est noethérien normal (resp. noethérien régulier),*

(ii) *Si* Spec A *est connexe et IA plat sur A (ou I principal) alors* $A^\dagger$ *est intégralement clos.*

DÉMONSTRATION. (1) (i) Puisque A est noethérien [EGA IV, 7.8.2], $\widehat{A}$ est noethérien et A_T aussi; de même pour $\widetilde{A}$ [R, p. 125].

Supposons A excellent et normal (resp. noethérien et régulier), alors $\widehat{A}$ est normal [EGA IV, 7.8.3.1] (resp. régulier [EGA 0_{IV}, 17.3.8.1], donc normal [EGA 0_{IV}, 17.1.3]). Comme $A_T \hookrightarrow \widehat{A}$ et $\widetilde{A} \hookrightarrow \widehat{A}$ sont fidèlement plats [R, p. 125] on en déduit [EGA IV, 6.5.4 (i)] (resp. [EGA IV, 6.5.2 (i)]) que A_T et $\widetilde{A}$ sont normaux (resp. réguliers).

(ii) Supposons Spec A connexe; comme A est noethérien normal on déduit de [EGA I, 4.5.6] que A est intègre, d'où $A = \bigcap_{\mathfrak{p}} A_{\mathfrak{p}}$ où $\mathfrak{p}$ parcourt l'ensemble des idéaux maximaux de A [B, AC II, § 3, n° 3, cor 4 du théo. 1], donc A est intégralement clos par [B, AC V, § 1, n° 2, cor. de prop. 8]. Ainsi A_T est intégralement clos [B, AC V, § 1, cor. 1 de prop. 16].

Par [B, AC VII, § 1, n° 3, cor. du théo. 2] A est de Krull, d'où $A = \bigcap_{\mathfrak{p}} A_{\mathfrak{p}}$ où $\mathfrak{p}$ parcourt l'ensemble M des idéaux premiers de hauteur 1 de A et $A_{\mathfrak{p}}$ est de valuation discrète [B, AC VII, § 1, n° 6, théo. 4].

LEMME 1. *Si IA est plat sur A ou si I est principal, alors* $IA = \bigcap_{\mathfrak{p} \in M} IA_{\mathfrak{p}}$.

DÉMONSTRATION DU LEMME 1. Remarquons d'abord que si $I = (\pi) \subset \mathcal{V}$ est principal, alors $IA = \pi . A$: si $\pi . 1_A = 0$, l'égalité du lemme 1 est claire; si $\pi . 1_A = a \neq 0$, alors $IA = aA$ est un A-module libre (car A intègre) et on est ramené au cas IA plat sur A.

Supposons que IA est plat sur l'anneau noethérien A, alors IA est un A-module projectif [B, AC II, § 5, n° 2, cor. 2 du théo. 1] donc réflexif [B, A II, § 2, n° 7, cor. 4 de prop. 13], par suite on a l'égalité du lemme [B, AC VII, § 4, n° 2, théo. 2]. ■

Ainsi il existe $\mathfrak{p} \in M$ tel que $I.A_{\mathfrak{p}} \subsetneq A_{\mathfrak{p}}$, car sinon on aurait $A = \bigcap_{\mathfrak{p} \in M} A_{\mathfrak{p}} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in M} (I.A_{\mathfrak{p}}) = IA$ (via lemme 1). Soit $\mathfrak{p} \in M$ tel que $I.A_{\mathfrak{p}} \subsetneq A_{\mathfrak{p}}$: l'idéal $IA_{\mathfrak{p}}$ est donc contenu dans le seul idéal maximal $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ de $A_{\mathfrak{p}}$; notons provisoirement par $(\ )'$ un séparé complété $\mathfrak{p}$-adique, la notation $(\widehat{\ })$ étant réservée au séparé complété I-adique.

LEMME 2. *L'anneau* $\widehat{A}_{\mathfrak{p}}$ *est de valuation discrète et on a:*

$$(\widehat{A}_{\mathfrak{p}})' \simeq (A_{\mathfrak{p}})'.$$

DÉMONSTRATION DU LEMME 2. L'anneau $\widehat{A}_{\mathfrak{p}}$ est local d'idéal maximal $\mathfrak{p}\widehat{A}_{\mathfrak{p}} = \beta \widehat{A}_{\mathfrak{p}}$ où β désigne une uniformisante de l'anneau de valuation discrète $A_{\mathfrak{p}}$ [B, AC III, § 3, n° 4, prop. 8 (ii)].

L'inclusion $IA_{\mathfrak{p}} \subset \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = \operatorname{Rad} A_{\mathfrak{p}}$ fournit une flèche $\varphi : \widehat{A}_{\mathfrak{p}} \to (A_{\mathfrak{p}})'$ et une injection $A_{\mathfrak{p}} \hookrightarrow \widehat{A}_{\mathfrak{p}}$ [B, AC III, § 3, n° 5, prop. 9] d'où l'injection $\psi : (A_{\mathfrak{p}})' \hookrightarrow (\widehat{A}_{\mathfrak{p}})'$; or $\psi \circ \varphi$ est injective [B, loc. cit.]. Ainsi φ est injective et induit une injection $(\widehat{A}_{\mathfrak{p}})' \hookrightarrow (\widehat{A}_{\mathfrak{p}})'$: l'inclusion opposée est fournie par ψ, d'où:

$$(\widehat{A}_{\mathfrak{p}})' \simeq (A_{\mathfrak{p}})'.$$

L'anneau local $\widehat{A}_{\mathfrak{p}}$ a son idéal maximal $\mathfrak{p}\widehat{A}_{\mathfrak{p}}$ principal $(= \beta . \widehat{A}_{\mathfrak{p}})$; il est noethérien et intègre car contenu dans l'anneau de valuation discrète $(A_{\mathfrak{p}})'$ [B, AC VI, § 5, n° 3, prop. 5]; $\widehat{A}_{\mathfrak{p}}$ est distinct de son corps des fractions car les éléments non nuls de $\mathfrak{p}\widehat{A}_{\mathfrak{p}}$ sont non inversibles, ainsi $\widehat{A}_{\mathfrak{p}}$ est un anneau de valuation discrète [B, AC VI, § 3, n° 6, prop. 9]. ∎

Montrons que $\widehat{A}$ est intégralement clos. L'inclusion $A \hookrightarrow A_{\mathfrak{p}}$ donne l'inclusion $\widehat{A} \subset \widehat{A}_{\mathfrak{p}}$, donc $\widehat{A}$ est intègre via le lemme 2, et $\widetilde{A}$ est intègre car inclus dans $\widehat{A}$. Comme $\widehat{A}$ et $\widetilde{A}$ sont normaux et intègres, on en déduit, par la même méthode que pour A, que $\widehat{A}$ et $\widetilde{A}$ sont intégralement clos.

(2) (i) Les hypothèses prouvent que A est excellent [EGA IV, 7.8.3 (ii)] (resp. $A^{\dagger}$ noethérien [M-W, theo. 2.1]). Il résulte du (1) que $\widehat{A}$ est normal (resp. régulier) et comme $A^{\dagger} \hookrightarrow \widehat{A}$ est fidèlement plat, on en déduit que $A^{\dagger}$ est normal [EGA IV, 6.5.4 (i)] (resp. régulier [EGA IV, 6.5.2 (i)].

(ii) D'après (1) (ii) $\widehat{A}$ est intègre, or $A^{\dagger} \hookrightarrow \widehat{A}$, donc $A^{\dagger}$ est normal intègre et par suite intégralement clos. ∎

COROLLAIRE 1. *Supposons* $I = (\pi) \subset \mathcal{V}$ *principal et* $S_0 = \operatorname{Spec} A_0$ *normal, noethérien, relevé en un* $\mathcal{V}$*-schéma normal noethérien* $S = \operatorname{Spec} A$. *Alors si* S_0 *est connexe,* S *est connexe.*

DÉMONSTRATION. Comme S est normal noethérien, S est une somme finie $S = \coprod_{i \in J} \operatorname{Spec} B_i$ où B_i est intègre [EGA I, 4.5.5 et 0.2.1.6] et $\operatorname{Spec} B_i \hookrightarrow S$ est une immersion ouverte et fermée. D'où $S_0 = \coprod_{i \in J} U_i$ avec $U_i = \operatorname{Spec}(B_i/IB_i) \hookrightarrow S_0$ ouvert et fermé: comme S_0 est connexe tous les U_i sont vides sauf un, i.e. $\forall\, i \in J$, $B_i = IB_i$ sauf un. On est ramené à montrer que si B est intègre normal l'égalité $B = IB$ est absurde. Un tel B s'écrit $B = \bigcap_{\mathfrak{p}} B_{\mathfrak{p}}$ où $\mathfrak{p}$ parcourt les idéaux premiers de B de hauteur 1 et il existe un $\mathfrak{p}$ tel que $IB_{\mathfrak{p}} \subset \mathfrak{p} B_{\mathfrak{p}}$ [cf. dém. de prop. 11 (1) (ii)]. Puisque $B = IB = \pi\,.\,B$, π est inversible dans B donc dans $B_{\mathfrak{p}}$, or $\pi \in \mathfrak{p} B_{\mathfrak{p}}$ ce qui est absurde. Finalement J n'a qu'un seul élément et S est connexe. ■

COROLLAIRE 2. *Supposons* $I = (\pi) \subset \mathcal{V}$ *principal et* A *excellent et normal (resp.* A *noethérien régulier); posons* $S = \operatorname{Spec} A$, $S_0 = \operatorname{Spec}(A/IA)$. *Alors si* S *est connexe,* S_0 *est connexe.*

DÉMONSTRATION. Si S est connexe, $\widehat{A}$ est intégralement clos [prop. 11 (1) (ii)], donc S_0 est connexe [cor. 2 du théo. 3]. ■

COROLLAIRE 3. *Si* $\mathcal{V}$ *est un anneau de valuation discrète d'idéal maximal* I *et* A *une* $\mathcal{V}$*-algèbre lisse (resp.* A *une algèbre lisse sur le complété faible d'une* $\mathcal{V}$*-algèbre lisse), notons* R *l'un des anneaux* $A, \widehat{A}, A^{\dagger}, \widetilde{A}$, *et posons* $A_0 = A/IA$, $S_0 = \operatorname{Spec} A_0$, $S = \operatorname{Spec} R$. *Alors on a l'équivalence*

$$S_0 \text{ connexe} \Leftrightarrow S \text{ connexe}\,.$$

DÉMONSTRATION. Ici $\mathcal{V}$ et $k = \mathcal{V}/I$ sont réguliers [EGA 0_{IV}, 17.1.4 (ii) et (i)], donc A et A_0 sont réguliers [EGA IV, 17.5.8] et [prop. 2]. En vertu du [cor. 2 du théo. 3] seul le cas $R = A$ reste à traiter: comme A et A_0 sont noethériens il suffit d'appliquer les corollaires 1 et 2 précédents. ■

PROPOSITION 12. *Supposons* A *normal de dimension* $\leqslant 1$ *et* IA *plat sur* A *ou* I *principal.*

(1) *Supposons* $\operatorname{Spec} A$ *connexe.*

(i) *Si A est excellent (resp. A noethérien régulier) alors $A, \widehat{A}, \widetilde{A}, A_T$ sont des anneaux de Dedekind.*

(ii) *Si A est une $\mathcal{V}$-algèbre de type fini et $\mathcal{V}$ excellent (resp. A noethérien régulier et $A^\dagger$ f.c.t.f.) alors $A^\dagger$ est de Dedekind.*

(2) *Supposons A de caractéristique* 0. *Si A est excellent* (*resp. A une $\mathcal{V}$-algèbre de type fini et $\mathcal{V}$ excellent*) *alors $A, \widehat{A}, \widetilde{A}, A_T$* (*resp. $A^\dagger$*) *sont des anneaux excellents et réguliers.*

DÉMONSTRATION. (1) Dans les deux cas (i) et (ii) on sait par la proposition 11 que $A, \widehat{A}, \widetilde{A}, A_T$, sont noethériens et intégralement clos. Par [S, prop. 4, p. 22] A est de Dedekind et $\widehat{A}$ aussi via [B, AC VIII, § 3, n° 4, cor. 2 de prop. 8] et [S, loc. cit.]; de même pour A_T [B, AC VII, § 1, n° 4, prop. 6 et AC II, § 2, n° 5, prop. 11].

Notons R l'un quelconque des anneaux, $\widetilde{A}, A^\dagger$. Pour montrer que R est de Dedekind il nous reste à prouver que tout idéal premier non nul de R est maximal.

Soit $\mathfrak{p} \subset R$ un idéal premier non nul: puisque $R \hookrightarrow \widetilde{A}$ est fidèlement plat on relève $\mathfrak{p}$ en un idéal premier $\mathfrak{q} \subset R$; or $\mathfrak{q} \neq (0)$ car sinon $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap \cap R = (0)$, donc $\mathfrak{q}$ est maximal. Par conséquent [B, AC III, § 3, n° 4, prop. 8] $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap R$ est maximal et R est de Dedekind.

(2) L'anneau A est noethérien et normal, donc $\operatorname{Spec} A$ est somme de ses composantes connexes, qui sont intègres [EGA I, 4.5.5]: pour démontrer que A est régulier on peut donc supposer A intègre. Par le (1), $A, \widehat{A}, \widetilde{A}, A^\dagger, A_T$ sont des anneaux de Dedekind: soit R l'un de ces anneaux; pour tout $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$, $R_\mathfrak{p}$ est un corps ou un anneau de valuation discrète [B, AC VII, § 2, n° 2, théo. 1], par suite R est régulier [EGA 0_{IV}, 17.3.6].

Sans supposer $\operatorname{Spec} A$ connexe, R est noethérien régulier, donc universellement caténaire [EGA IV, 5.6.4]: dans la définition d'un anneau excellent [EGA IV, 7.8.2], R vérifie le (i) de [loc. cit.]. Le (ii) de [loc. cit.] est de nature locale sur $\operatorname{Spec} R$: on peut le supposer intègre, et alors par le (1) R est de Dedekind donc excellent car R est de caractéristique nulle [EGA IV, 7.8.3 (iii)]. Pour le (iii) de [EGA IV, 7.8.2] on applique le critère de Nagata [EGA IV, 6.12.4]: soit A' une R-algèbre finie intègre et f le morphisme structural $f : \operatorname{Spec} A' \to \operatorname{Spec} R$; il s'agit de prouver que $\operatorname{Spec} A'$ contient un ouvert non vide de points réguliers. Or l'image de f est contenue dans une composante connexe de $\operatorname{Spec} R$, on peut donc supposer R intègre et on vient de voir qu'alors R est excellent; ainsi le critère de Nagata est satisfait. ■

PROPOSITION 13. *Si A est excellent (resp. si A est une $\mathcal{V}$-algèbre de type fini avec $\mathcal{V}$ excellent) alors le morphisme*

$$f : \operatorname{Spec}\widehat{A} \to \operatorname{Spec}\widetilde{A}$$

$$(\textit{resp.}\ g : \operatorname{Spec}A^{\dagger} \to \operatorname{Spec}\widetilde{A})$$

est fidèlement plat, formellement étale pour la topologie I-adique, normal à fibres géométriquement intègres.

DÉMONSTRATION. Le lemme de I 1.2) a établi que f et g sont formellement étales.

Si A est excellent, A_T est excellent [EGA IV, 7.8.3 (ii)] et $\operatorname{Spec}\widehat{A} \to \operatorname{Spec}A_T$ est régulier [EGA IV, 7.8.3 (v)] donc normal [EGA IV, 6.8.1]. Ainsi [R, bas p. 127] $f : \operatorname{Spec}\widehat{A} \to \operatorname{Spec}\widetilde{A}$ est à fibres géométriquement normales; puisque f est fidèlement plat [R, p. 125], f est normal [EGA IV, 6.8.1]. Par suite [R, XI, § 3, théo. 3] les fibres de f sont géométriquement intègres.

Si A est une $\mathcal{V}$-algèbre de type fini avec $\mathcal{V}$ excellent alors A est excellent [EGA IV, 7.8.3 (ii)] et f normal: comme $\widehat{A}$ est fidèlement plat sur $A^{\dagger}$ on déduit de [EGA IV, 6.5.4 (i)] que le morphisme $g : \operatorname{Spec}A^{\dagger} \to \operatorname{Spec}\widetilde{A}$ est normal, par suite [R, XI, § 3, théo. 3] et [EGA IV, 2.1.14] g est à fibres géométriquement intègres; de plus g est fidèlement plat [cor. 1 du théo. 3]. ■

PROPOSITION 14. *Supposons A normal de dimension $\leqslant 1$ et I principal.*

(1) *Si A est excellent, alors*

(i) $f : \operatorname{Spec}\widehat{A} \to \operatorname{Spec}\widetilde{A}$ *est un homéomorphisme mais* ***pas*** *un homéomorphisme universel si $\widetilde{A} \neq \widehat{A}$. Si de plus A est de caractéristique* 0, *alors f est régulier.*

(ii) $u : \operatorname{Spec}\widetilde{A} \to \operatorname{Spec}A_T$ *est un homéomorphisme plat, régulier et formellement étale pour la topologie I-adique.*

(2) *Si A est une $\mathcal{V}$-algèbre de type fini et $\mathcal{V}$ excellent, alors*

(i) $g : \operatorname{Spec}A^{\dagger} \to \operatorname{Spec}\widetilde{A}$ *est un homéomorphisme, mais* ***pas*** *un homéomorphisme universel si $A^{\dagger} \neq \widetilde{A}$.*

(ii) *Si de plus A est de caractéristique* 0, *alors g est régulier, et le* *morphisme* $h : \operatorname{Spec}\widehat{A} \to \operatorname{Spec}A^\dagger$ *est fidèlement plat, régulier, un homéomorphisme à fibres géométriquement intègres, mais ce n'est* ***pas*** *un homéomorphisme universel si* $A^\dagger \neq \widehat{A}$.

DÉMONSTRATION. (1) (i) Comme A est noethérien et normal, $\operatorname{Spec}A$ est somme de ses composantes connexes qui sont des schémas intègres $\operatorname{Spec}A = \coprod_{i\in J} \operatorname{Spec}A_i$, J fini, A_i est de Dedekind [prop. 12] et $\widehat{A} = \prod_{j\in J} \widehat{A}_i$. Pour montrer que f est un homéomorphisme on peut ainsi supposer A intègre, ce que nous ferons: $A, \widetilde{A}, \widehat{A}$ sont alors de Dedekind [prop. 12].

Comme $\tilde{I} \subset \operatorname{Rad}\widetilde{A}$, l'application $\mathfrak{q} \mapsto \mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap \widetilde{A}$ est une bijection de l'ensemble des idéaux maximaux de $\widehat{A}$ sur l'ensemble des idéaux maximaux de $\widetilde{A}$ [B, AC III, § 3, n° 4, prop. 8]. D'où une bijection continue

$$f : \operatorname{Spec}\widehat{A} \to \operatorname{Spec}\widetilde{A}\ ;$$

si l'on montre que f est ouverte, ce sera un homéomorphisme. Puisque f est fidèlement plat quasi-compact, f est universellement submersif [EGA I, 3.9.4 (ii) et 7.3.5]: donc la topologie de $\operatorname{Spec}\widetilde{A}$ est quotient de celle de $\operatorname{Spec}\widehat{A}$ [EGA I, 3.10.1]; ainsi $U \subset \operatorname{Spec}\widetilde{A} =: \widetilde{S}$ est ouvert si et seulement si $f^{-1}(U) \subset \widehat{S} := \operatorname{Spec}\widehat{A}$ est ouvert [B, T. G. I, § 3, n° 4]. Soit $V \subset \widehat{S}$ un ouvert, posons $U := f(V) \subset \widetilde{S}$; puisque f est bijectif on a $V = f^{-1}f(V) = f^{-1}(U)$ et donc U est ouvert dans $\widetilde{S}$ par définition de la topologie quotient. Par suite f est ouvert, c'est un homéomorphisme.

Par contre le théorème de Raynaud [R, XI, § 3, théo. 3] affirme que $\widetilde{A}$ est intégralement fermé dans $\widehat{A}$: ainsi si $\widetilde{A} \subsetneq \widehat{A}$, f n'est ***pas*** un homéomorphisme universel (=entier, surjectif, radiciel) via la caractérisation de [EGA IV, 18.12.11].

Si A est de caractéristique 0, alors $\widetilde{A}$ est excellent [prop. 12]: comme $\widehat{A}$ est le complété de $\widetilde{A}$, f est régulier [EGA IV, 7.8.3 (v)].

(ii) L'anneau A_T est excellent, donc $\operatorname{Spec}\widehat{A} \to \operatorname{Spec}A_T$ est régulier [loc. cit.]; par fidèle platitude de $\widehat{A}$ sur $\widetilde{A}$ on en déduit [EGA IV, 6.5.2(i)] que $u : \operatorname{Spec}\widetilde{A} \to \operatorname{Spec}A_T$ est régulier. On conclut comme pour f.

(2) (i) L'anneau A est excellent; la démonstration se fait comme pour f.

(ii) Par la proposition 12, $A^\dagger$ excellent: puisque $\widehat{A}^\dagger = \widehat{A}$ le morphisme $h : \operatorname{Spec}\widehat{A} \to \operatorname{Spec}A^\dagger$ est régulier [EGA IV, 7.8.3 (v)]. On conclut comme pour f et g. ■

Des propositions 13 et 14 nous allons déduire le théorème suivant qui redonne le théorème 7 sur l'équivalence de catégories pour les algèbres finies étales (moyennant [EGA IV, 18.3.2] et des hypothèses sur A et $\mathcal{V}$), tout en l'étendant aux schémas étales par des résultats de pleine fidélité.

THÉORÈME 15. (1) *Supposons A excellent. Alors le foncteur de la catégorie des $\widetilde{A}$-schémas étales (resp. des $\widetilde{A}$-algèbres finies étales) dans la catégorie des $\widehat{A}$-schémas étales (resp. des $\widehat{A}$-algèbres finies étales) défini par*

$$f : \operatorname{Spec} \widehat{A} \to \operatorname{Spec} \widetilde{A}$$

est pleinement fidèle (resp. une équivalence de catégories).

(2) *Si $\mathcal{V}$ est excellent et A est une $\mathcal{V}$-algèbre de type fini, alors*

(i) *Le foncteur de la catégorie des $\widetilde{A}$-schémas étales (resp. des $\widetilde{A}$-algèbres finies étales) dans la catégorie des $A^{\dagger}$-schémas étales (resp. des $A^{\dagger}$-algèbres finies étales) défini par*

$$g : \operatorname{Spec} A^{\dagger} \to \operatorname{Spec} \widetilde{A}$$

est pleinement fidèle (resp. une équivalence de catégories).

(ii) *De même le foncteur de la catégorie des $A^{\dagger}$-algèbres finies étales dans la catégorie des $\widehat{A}$-algèbres finies étales défini par*

$$h : \operatorname{Spec} \widehat{A} \to \operatorname{Spec} A^{\dagger}$$

est une équivalence de catégories.

(iii) *Supposons A de caractéristique 0, normal, de dimension $\leqslant 1$, et I principal. Alors le foncteur de la catégorie des $A^{\dagger}$-schémas étales dans la catégorie des $\widehat{A}$-schémas étales défini par*

$$h : \operatorname{Spec} (\widehat{A}) \to \operatorname{Spec} A^{\dagger}$$

est pleinement fidèle.

DÉMONSTRATION. (1) Ici f est fidèlement plat et quasi-compact, donc f est universellement submersif [EGA I, 3.9.4 (ii) et 7.3.5]; de plus les fibres de f sont géométriquement intègres [prop. 13]. En vertu de [SGA 1, IX, cor. 3.4] le foncteur $\mathcal{F}$ défini par f, de la catégorie des $\widetilde{A}$-schémas étales dans la catégorie des $\widehat{A}$-schémas étales, est pleinement fidèle.

Le foncteur $\mathcal{F}$ définit par restriction un foncteur pleinement fidèle, encore noté $\mathcal{F}$, de la catégorie des $\widetilde{A}$-algèbres finies étales dans la catégorie des $\widehat{A}$-algèbres finies étales. Montrons que ce $\mathcal{F}$ est essentiellement surjectif. Soit $u : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} \widehat{A}$ un morphisme fini étale; la réduction u_0 de u modulo I se relève en v : $\operatorname{Spec} C \to \operatorname{Spec} \widetilde{A}$ fini étale [théo. 4] et il existe un $\widehat{A}$-isomorphisme $B \xrightarrow{\sim} C \otimes_{\widetilde{A}} \widehat{A}$ [cor. 1 du théo. 4]. Ainsi $\mathscr{F}$ est essentiellement surjectif.

(2) (i) Ici encore g est à fibres géométriquement intègres et fidèlement plat [prop. 13]: par la même démonstration qu'en (1) on montre que le foncteur $\mathcal{G}$ défini par g est pleinement fidèle (resp. une équivalence de catégories).

(ii) Résulte de (1) et (2) (i).

(iii) D'après la [prop. 14 (2) (ii)] h est fidèlement plat à fibres géométriquement intègres; la pleine fidélité du foncteur qu'il définit s'établit comme précédemment. ■

Pour un schéma X on note Reg (X) l'ensemble des points où il est régulier.

PROPOSITION 16. *Supposons A de caractéristique* 0, *IA plat sur A ou I principal* ($IA \neq A$).

Si A est excellent et normal (*resp. si A est une $\mathcal{V}$-algèbre de type fini normale et $\mathcal{V}$ excellent*) *on note R l'un des anneaux A, $\widehat{A}$, $\widetilde{A}$, A_T* (resp. $A^{\dagger}$). *Alors* $\operatorname{Reg}(\operatorname{Spec} R)$ *est un ouvert non vide de* $\operatorname{Spec} R$.

En particulier si A_0 est régulier, alors $\widehat{A}$, $\widetilde{A}$ (*resp. $A^{\dagger}$*) *sont réguliers.*

DÉMONSTRATION. (1) Supposons d'abord A excellent et normal: A_T est excellent [EGA IV, 7.8.3 (ii)] et normal [B, AC V, § 1, n° 5, cor. 1 de prop. 16]: en particulier $\operatorname{Spec} A$ et $\operatorname{Spec} A_T$ sont sommes de leurs composantes connexes, qui sont des schémas intègres [EGA I, 4.5.5]; on est ramené au cas où A et A_T sont intégralement clos, ce que l'on suppose désormais dans ce (1): $\widehat{A}$et $\widetilde{A}$ le sont aussi [prop. 11].

De plus $\operatorname{Reg}(\operatorname{Spec} A)$ (resp. $\operatorname{Reg}(\operatorname{Spec} A_T)$) est un ouvert de $\operatorname{Spec} A$ (resp. $\operatorname{Spec} A_T$) [EGA IV, 7.8.3 (iv)] et non vide [EGA IV, 6.12.4 (b)].

Le morphisme $h : \operatorname{Spec} \widehat{A} \to \operatorname{Spec} A_T$ est régulier [EGA IV, 7.8.3 (v)] et fidèlement plat, donc h^{-1} $(\operatorname{Reg}(\operatorname{Spec} A_T))$ est un ouvert non vide de $\operatorname{Spec} \widehat{A}$ formé de points réguliers de $\operatorname{Spec} \widehat{A}$ [EGA IV, 6.5.2 (ii)]; grâce à [EGA IV, 6.5.2 (i)] on conclut que h^{-1} $(\operatorname{Reg}(\operatorname{Spec} A_T)) = \operatorname{Reg}(\operatorname{Spec} \widehat{\mathrm{A}})$, ce qui prouve le (1) pour $\widehat{A}$.

Le morphisme h est composé des morphismes fidèlement plats $\varphi : \operatorname{Spec} \widehat{A} \to \operatorname{Spec} \widetilde{A}$ et $\psi : \operatorname{Spec} \widetilde{\mathrm{A}} \to \operatorname{Spec} A_T$: comme h est régulier et φ fidèlement plat il résulte de [EGA IV, 6.5.2, 6.8.1] que ψ est régulier. Par le même raisonnement que ci-dessus $\psi^{-1}(\operatorname{Reg}(\operatorname{Spec} A_T))$ est un ouvert de points réguliers de Spec$\widetilde{A}$, contenant le point générique: par la même méthode on prouve alors que Reg(Spec$\widetilde{A}$) est un ouvert non vide de Spec$\widetilde{A}$.

(2) Supposons maintenant que $\mathcal{V}$ est excellent et A est une $\mathcal{V}$-algèbre de type fini: A est excellent [EGA IV, 7.8.3 (ii)]. On se ramène comme au (1) à A intègre, d'où $A^\dagger$ intégralement clos [prop. 11]. Puisque le couple $(A^\dagger, IA^\dagger)$ est hensélien et que les éléments de $1 + IA^\dagger$ sont inversibles dans $A^\dagger$ il existe une flèche $(A_T, IA_T) \to (A^\dagger, IA^\dagger)$ et elle se factorise de manière unique à travers $\widetilde{A}$ [R, déf. 4 p. 124]. Comme h est fidèlement plat, le morphisme $u : \operatorname{Spec} A^\dagger \to \operatorname{Spec} A_T$ est surjectif; de plus u est régulier car h est régulier et $\operatorname{Spec}\widehat{A} \to \operatorname{Spec} A^\dagger$ fidèlement plat: on peut réappliquer à u le même raisonnement qu'à h et ψ ci-dessus. D'où Reg(Spec$A^\dagger$) est ouvert non vide de Spec$A^\dagger$.

La dernière assertion résulte de [EGA IV, 18.5.4.3] et du théorème 3.

2) *Cas $\mathcal{V}$ de valuation discrète complet et d'idéal maximal I.*

Dorénavant $\mathcal{V}$ est un anneau de valuation discrète complet, de corps des fractions K de caractéristique 0, d'idéal maximal $I =: m$, de corps résiduel $k = \mathcal{V}/m$ de caractéristique $p > 0$.

On considère toujours une $\mathcal{V}$-algèbre A; on note $A_n := A/m^{n+1}A$, $\widehat{A} := \varprojlim_n A_n$ et $A^\dagger$ le complété faible de A sur $(\mathcal{V}, m)$ [M-W]. Rappelons que l'anneau A est supposé noethérien et $A^\dagger$ faiblement complet de type fini sur $\mathcal{V}$ (f.c.t.f.).

THÉORÈME 17. *Soient B_0 et C_0 deux A_0-algèbres lisses relevées en deux $A^\dagger$-algèbres lisses B et C (via théo.* 4).

(1) *Tout A_0-morphisme $f_0 \colon B_0 \to C_0$ se relève en un $A^\dagger$-morphisme $f \colon B^\dagger \to C^\dagger$, et $B^\dagger$ et $C^\dagger$ sont* f.c.t.f. *et formellement lisses sur $A^\dagger$* (*pour la topologie m-adique sur $A^\dagger$, $B^\dagger$, $C^\dagger$*).

(2) (i) *Le relèvement f du* (1) *est surjectif (resp. bijectif, resp. plat, resp. fidèlement plat, resp. fini, resp. fini étale) si et seulement si f_0 l'est.*

(ii) *Tout A_0-algèbre lisse D_0 se relève de manière unique à $A^\dagger$-isomorphisme près en une $A^\dagger$-algèbre de la forme $D^\dagger$, où D est une $A^\dagger$-algèbre lisse relevant D_0.*

(iii) *f est formellement lisse (resp. formellement non ramifié, resp. formellement étale) pour la topologie m-adique si et seulement si f_0 est lisse (resp. non ramifié, resp. étale).*

(3) *Supposons A plat sur* $\mathcal{V}$. *Si f_0 est injectif alors f est injectif.*

(4) *Supposons A plat sur* $\mathcal{V}$, *A_0 régulier et* $\operatorname{Spec} B_0$ *connexe. Si le relèvement $f: B^{\dagger} \rightarrow C^{\dagger}$ est injectif, alors f_0 est injectif.*

REMARQUE. La topologie m-adique sur les $A^{\dagger}$-algèbres $B^{\dagger}$, $C^{\dagger}$, … du théorème induit la topologie discrète sur les A_0-algèbres B_0, C_0, … ; donc si $f: B^{\dagger} \rightarrow C^{\dagger}$ est formellement lisse (resp. formellement non ramifié) pour la topologie m-adique, f_0 est formellement lisse (resp. formellement non ramifié) pour la topologie discrète. Dans la démonstration du théorème (sauf mention contraire) l'expression «formellement lisse» (resp. «formellement non ramifiée», resp. «formellement étale») sera employée pour la topologie m-adique.

DÉMONSTRATION. *Pour le* (1). Par [EGA 0_{IV}, 19.4.1] et [M-W, theo. 1.4] $B^{\dagger}$ et $C^{\dagger}$ sont formellement lisses sur $A^{\dagger}$. Puisque $A^{\dagger} \rightarrow B$ est lisse on relève de proche en proche, pour tout entier n, f_0 en un $A^{\dagger}$-morphisme $f_n: B \rightarrow C/m^{n+1}C$, d'où un $\widehat{A}$-morphisme $\widehat{f}: \widehat{B} \rightarrow \widehat{C}$ relevant f_0. Comme $B^{\dagger}$ et $C^{\dagger}$ sont f.c.t.f. [prop.1′] il existe par [v. d. P., cor. 2.4.3] un $A^{\dagger}$-morphisme $f: B^{\dagger} \rightarrow C^{\dagger}$ tel que $f \bmod m = \widehat{f} \bmod m = f_0$.

Pour le (2) (i). Par [M-W, theo. 3.2 (resp. theo. 6.2)] f est surjectif (resp. fini) si et seulement si f_0 l'est.

Si f est bijectif (resp. plat, resp. fidèlement plat, resp. fini étale) alors f_0 l'est.

Supposons f_0 plat et montrons que f l'est. Les $A^{\dagger}$-modules $B^{\dagger}$ et $C^{\dagger}$ sont plats [prop. 2] et idéalement séparés pour la topologique m-adique [B, AC III, § 5, n° 4, prop. 2], d'où des isomorphismes [B, AC III, § 5, n° 2, théo. 1]:

$$\operatorname{gr}_m(A^{\dagger}) \otimes_{A_0} B_0 \xrightarrow{\sim} \operatorname{gr}_m(B^{\dagger}),$$

$$\operatorname{gr}_m(A^{\dagger}) \otimes_{A_0} C_0 \xrightarrow{\sim} \operatorname{gr}_m(C^{\dagger})$$

et par suite un isomorphisme

$$\operatorname{gr}_m(B^{\dagger}) \otimes_{B_0} C_0 \xrightarrow{\sim} \operatorname{gr}_m(C^{\dagger}).$$

Comme $B^{\dagger}$ est noethérien [prop. 2], que $C^{\dagger}$ est un $B^{\dagger}$-module idéalement séparé pour la topologie m-adique et que f_0 est plat, on en déduit [B, AC III, § 5, n° 2, théo. 1] que f est plat.

Si f_0 est fidèlement plat, f est plat et on applique [B, AC I, § 3, n° 5, prop. 9 (e)]: puisque $mB^{\dagger} \subset \operatorname{Rad} B^{\dagger}$, tout idéal maximal $\mathfrak{p}$ de $B^{\dagger}$ contient

$mB^{\dagger}$ et comme f_0 est fidèlement plat il existe un idéal maximal $\mathfrak{q}$ de $C^{\dagger}$ tel que $f_0^{-1}(\mathfrak{q}/m) = \mathfrak{p}/m$, i.e. $f^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$, donc f est fidèlement plat [loc. cit.].

Si f_0 est bijectif, f_0 est surjectif et fidèlement plat, donc f est surjectif et fidèlement plat: f est un isomorphisme.

Si f_0 est fini étale, f est fini et il existe [théo. 4] une $B^{\dagger}$-algèbre finie étale D relevant C_0, où D est f.c.t.f. [M-W, theo. 6.1]: comme $\widehat{D} = D \otimes_{B^{\dagger}} \widehat{B}$ est étale sur $\widehat{B}$, il existe un unique $\widehat{B}$-morphisme $\psi : \widehat{D} \to \widehat{C} = C^{\dagger} \otimes_{B^{\dagger}} \widehat{B}$ relevant l'identité de $D_0 = C_0$. Par [v. d. P., cor. 2.4.3] il existe un $B^{\dagger}$-morphisme $\varphi : D \to C^{\dagger}$ relevant $\psi \bmod m = \mathrm{Id}_{C_0}$; φ est un isomorphisme par ce qui précède, donc $C^{\dagger}$ est fini étale sur $B^{\dagger}$.

Pour le (2) (ii). Résulte de (1) et (2) (i).

Pour le (2) (iii). Comme f_0 est de présentation finie [EGA I, 6.3.8 (v)], f est formellement non ramifié si et seulement si f_0 est non ramifié [EGA 0_{IV}, 20.7.5].

Si f est formellement lisse, alors f_0 est lisse.

Si f_0 est lisse il nous reste à prouver que f est formellement lisse. Par (2) (i) f est plat, donc $f_n := f \bmod m^{n+1}$ est plat et de présentation finie, car $B^{\dagger}/m^{n+1}B^{\dagger} \simeq B/m^{n+1}B$ et $C^{\dagger}/m^{n+1}C^{\dagger} \simeq C/m^{n+1}C$ sont de présentation finie sur $\mathcal{V}/m^{n+1}$ [EGAI, 6.3.8 (v)]. De f_0 lisse on déduit de [EGA IV, 17.7.1, démonstration du (ii)] que f_n est lisse, donc que f_n est formellement lisse pour la topologie m-adique.

Pour le (3). C'est [M-W, theo. 3.2 (3)].

Pour le (4). Ici $A^{\dagger}$, $B^{\dagger}$ et $C^{\dagger}$ sont noethériens réguliers [prop. 2] et $\operatorname{Spec} B^{\dagger}$ connexe [cor. 2 du théo. 3], donc $B^{\dagger}$ est intégralement clos. L'anneau $B^{\dagger}$ est de Krull [B, AC VII, § 1, n° 3, cor. du théo. 2], donc $B^{\dagger} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in M} B^{\dagger}_{\mathfrak{p}}$ où M désigne l'ensemble des idéaux premiers de hauteur 1 de $B^{\dagger}$ et $B^{\dagger}_{\mathfrak{p}}$ est un anneau de valuation discrète [B, AC VII, § 1, n° 6, théo. 4]. L'injection $f : B^{\dagger} \hookrightarrow C^{\dagger}$ fournit pour tout $\mathfrak{p} \in M$ une injection $B^{\dagger}_{\mathfrak{p}} \hookrightarrow C^{\dagger}_{\mathfrak{p}}$; ainsi $C^{\dagger}_{\mathfrak{p}}$ est un $B^{\dagger}_{\mathfrak{p}}$-module sans torsion donc plat. Par suite $C^{\dagger}_{\mathfrak{p}}$ est plat sur $B^{\dagger}$, donc $C^{\dagger}_{\mathfrak{p}}/mC^{\dagger}_{\mathfrak{p}}$ est plat sur l'anneau intègre $B_0 = B^{\dagger}/mB^{\dagger}$, d'où une injection $B_0 \hookrightarrow C^{\dagger}_{\mathfrak{p}}/mC^{\dagger}_{\mathfrak{p}}$: comme celle-ci se factorise par f_0, f_0 est injectif. ■

Outre le théorème précédent on déduit aussi de [v. d. P., cor. 2.4.3] la version affaiblie (à cause des restrictions sur $\mathcal{V}$) suivante du théorème 7:

COROLLAIRE 1. *Le foncteur*

$$\mathcal{F}\colon B \mapsto B \otimes_{A^\dagger} A_0 (\text{resp. } \mathcal{G}\colon \mathrm{B} \mapsto \mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}^\dagger} \widehat{\mathrm{A}})$$

est une équivalence de catégories, de la catégorie des $A^\dagger$-algèbres finies étales dans la catégorie des A_0-algèbres (resp. des $\widehat{A}$-algèbres) finies étales.

DÉMONSTRATION. Étant donnée une A_0-algèbre finie étale B_0 elle se relève en une $A^\dagger$-algèbre finie étale via [théo. 4]: $\mathcal{F}$ est essentiellement surjectif.

Montrons que $\mathcal{F}$ est pleinement fidèle. Si B et C sont deux $A^\dagger$-algèbres finies étales elles sont f.c.t.f. [M-W, theo. 6.1]: on note B_0, C_0 leurs réductions et $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ leurs séparés complétés, $\widehat{B} = B \otimes_{A^\dagger} \widehat{A}$, $\widehat{C} = C \otimes_{A^\dagger} \widehat{A}$. Considérons les flèches canoniques

$$\mathrm{Hom}_{A^\dagger}(B, C) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Hom}_{\widehat{A}}(\widehat{B}, \widehat{C}) \xrightarrow{\psi} \mathrm{Hom}_{A_0}(B_0, C_0);$$

ψ est bijective via [EGA IV, 18.3.2], φ est injective via [EGA IV, 2.2.16] et [prop. 2 (2) (ii)]; de plus $\psi \circ \varphi$ est surjective via [théo. 17 (1)]. Donc $\mathcal{F}$ est une équivalence.

Par suite [EGA IV, 18.3.2] $\mathcal{G}$ est une équivalence. ■

COROLLAIRE 2. *Le foncteur*

$$B^\dagger \mapsto \widehat{B}$$

est une équivalence de catégories, de la catégorie des complétés faibles des $A^\dagger$-algèbres étales dans la catégorie des $\widehat{A}$-algèbres plates, topologiquement de type fini et formellement étales pour la topologie m-adique.

DÉMONSTRATION. Ce foncteur est essentiellement surjectif et fidèle par la proposition 6. Montrons qu'il est plein. Si B et C sont deux $A^\dagger$-algèbres étales, la flèche composée

$$\mathrm{Hom}_{A^\dagger}(B^\dagger, C^\dagger) \to \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathrm{A}}}(\widehat{\mathrm{B}}, \widehat{\mathrm{C}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{A_0}(B_0, C_0)$$

est surjective [théo. 17 (1)] et la dernière bijective [cor. 3 du théo. 4]: la première est donc surjective et notre foncteur est plein. ■

Remerciements. Je tiens à remercier Yvette Brunel pour la frappe du manuscrit et le réseau européen «p-adic methods in Arithmetic Algebraic Geometry» pour son soutien financier.

BIBLIOGRAPHIE

[B] N. BOURBAKI, *Algèbre* [A], chapitres I à VII; *Algèbre commutative* [AC], chapitres I à X; *Topologie Générale* [TG], chapitre I.

[Be] P. BERTHELOT, *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à supports propres*, 1ère partie, prépublication Rennes 96-03 (1996).

[B-B-M] P. BERTHELOT - L. BREEN - W. MESSING, *Théorie de Dieudonné cristalline II*, LN 930, Springer (1982).

[B-M1] P. BERTHELOT - W. MESSING, *Théorie de Dieudonné cristalline I*, Astérisque 63, Société Math. de France (1979), pp. 17-38.

[B-M2] P. BERTHELOT - W. MESSING, *Théorie de Dieudonné cristalline III: théorèmes d'équivalence et de pleine fidélité*, The Grothendieck Festschrift, Vol. **1**, Birkhaüser (1990), pp. 173-247.

[E] R. ELKIK, *Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien*, Annales Scient. Ec. Norm. Sup., 4e série, **6** (1973), pp. 553-604.

[Et1] J.-Y. ETESSE, *Descente étale des F-isocristaux surconvergents et rationalité des fonctions L de schémas abéliens*, Prépublication Rennes 00-20 (avril 2000). (A paraître aux Annales Scient. Ec. Norm. Sup.)

[Et2] J.-Y. ETESSE, *F-isocristaux convergents et fonctions L: la conjecture de Dwork pour la fonction zêta-unité*, Preprint Rennes (juin 2000).

[EGA] A. GROTHENDIECK - J. DIEUDONNÉ, *Eléments de Géométrie Algébrique*, chap. I (Springer, coll. Grundlehren); chap. II, III, IV (Publ. Math. IHES, n° 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32).

[Ma] S. MATSUDA, *Local indices of p-adic differential operators corresponding to Artin-Schreier-Witt coverings*, Duke Math. Journal, Vol. **77**, n°. 3 (1995).

[M] W. MESSING, *The crystals associated to Barsotti-Tate groups: with applications to abelian schemes*, LN 264, Springer 1972.

[MB] L. MORET-BAILLY, *Un problème de descente*, Bull. Soc. Math. France, **124** (1996), pp. 559-585.

[M-W] P. MONSKY - G. WASHNITZER, *Formal Cohomology I*, Annals of Math., 88, n° 2 (1968), pp. 181-217.

[v. d. P.] M. VAN DER PUT, *The cohomology of Monsky and Washnitzer*, Bulletin de la SMF, mémoire n° 23, tome 114, fasc. 2 (1986), pp. 33-60.

[R] M. RAYNAUD, *Anneaux locaux henséliens*, LN 169, Springer 1970.

[S] J.-P. SERRE, *Corps locaux*, Hermann 1968.

[SGA 1] A. GROTHENDIECK, *Revêtements étales et groupe fondamental*, LN 224, Springer 1971.

[SGA 4] M. ARTIN - A. GROTHENDIECK - J.-L. VERDIER, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Tome 2, LN 270, Springer 1972.

[SGA 5] A. GROTHENDIECK, *Cohomologie l-adique et fonctions L*, LN 589, Springer 1977.

Manoscritto pervenuto in redazione il 12 aprile 2001.