Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Rachid Benabidallah

Solution globale de l'équation d'un gaz visqueux isotherme dans l'espace entier avec une grande force extérieure dérivant d'un potentiel

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 94 (1995), p. 245-274

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1995__94__245_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 94 (1995)

Solution globale de l'équation d'un gaz visqueux isotherme dans l'espace entier avec une grande force extérieure dérivant d'un potentiel.

RACHID BENABIDALLAH (*)

1. Introduction.

Dans le présent travail on se propose de démontrer l'existence et l'unicité de la solution globale du système d'équations

$$\partial_t u - \frac{1}{\varrho} Au + \nabla\sigma + (u\cdot\nabla)u = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^3 , \tag{1.1}$$

$$\partial_t \sigma + u\cdot\nabla\sigma - u\cdot\nabla\Phi + \nabla\cdot u = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^3 , \tag{1.2}$$

$$\sigma = \log(\varrho/\varrho_{\text{eq}}) \tag{1.3}$$

avec les conditions initiales

$$u|_{t=0} = u_0 , \qquad \sigma|_{t=0} = \log(\varrho_0/\varrho_{\text{eq}}) = \sigma_0 , \tag{1.4}$$

sous l'hypothèse de la petitesse des données initales u_0, σ_0.

L'opérateur A figurant dans (1.1) est donné par

$$Au = \mu\Delta u + \lambda\nabla(\nabla\cdot u) \tag{1.5}$$

avec deux constantes positives μ et λ, tandis que $\Phi = \Phi(x)$ est une fonction scalaire donnée. Quant à la fonction $\varrho_{\text{eq}} = \varrho_{\text{eq}}(x)$, elle est donnée

(*) Indirizzo dell'A.: Université de Tizi-ouzou, Tizi-ouzou, Algérie et Dipartimento di Matematica, Università di Pisa, Pise, Italie.

par

$$\varrho_{\text{eq}}(x) = \exp(-(x))\,. \tag{1.6}$$

Pour la fonction Φ on suppose les hypothèses suivantes:

$$\Phi \in L^{\infty}(\mathbb{R}^3)\,, \tag{1.7}$$

$$\nabla\Phi \in W_3^2(\mathbb{R}^3)\,. \tag{1.8}$$

On remarque que (1.6) et (1.7) (et la régularité de Φ) entraînent qu'il existe deux constantes positives M_1 et M_2 telles que

$$0 < M_1 \leqslant \varrho_{\text{eq}}(x) \leqslant M_2 < \infty \qquad \forall x \in \mathbb{R}^3\,. \tag{1.9}$$

Si on substitute les relations (1.3), (1.5) et (1.6) dans les équations (1.1) et (1.2), ces dernières s'expriment sous la forme

$$\partial_t u + (u\cdot\nabla)\,u - \frac{1}{\varrho}\,(\mu\Delta u + \lambda\nabla(\nabla\cdot u)) + \frac{1}{\varrho}\,\nabla\varrho = -\nabla\Phi\,, \tag{1.1)bis}$$

$$\partial_t\varrho + \nabla\cdot(\varrho u) = 0\,. \tag{1.2)bis}$$

Le système d'équations (1.1)bis et (1.2)bis est un modèle simplifié du mouvement d'un gaz visqueux dont la température est considérée constante et la pression est égalée à la densité, mouvement sous la force dérivant du potentiel Φ.

Dans le cas où Φ est suffisamment voisin d'une constante, le problème pour le système d'équations d'un gaz visqueux et calorifère a été résolu par Matsumara et Nishida [MN1], [MN2]. En outre, Matsumura et Padula [MP] ont démontré que dans un domaine borné un résultat analogue a lieu pour une force dérivant d'un grand potentiel.

Dans la suite, on convient de désigner par ∇u et $\nabla\nabla u$ pour une fonction u à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs de $\mathbb{R}^9$ et de $\mathbb{R}^{27}$ respectivement dont les composantes sont $\partial_{x_i} u_j\,(i, j = 1, 2, 3)$ et $\partial_{x_i}\partial_{x_j} u_k\,(i, j, k = 1, 2, 3)$ respectivement. Par ailleurs, H^m et $W_p^m\,(m \in \mathbb{N}, p \geqslant 1)$ désigneront les espaces de Sobolev $H^m(\mathbb{R}^3)$ et $W_p^m(\mathbb{R}^3)$. Pour les espaces de Sobolev on utilisera constamment dans la suite les théorèmes d'immersion de Sobolev (y compris naturellement le théorème de Morrey; voir par exemple [B]) et leur application sera sous-entendue lorsqu'on n'aura pas besoin de la souligner particulièrement.

Je tiens à remercier le professeur H. Fujita Yashima pour son aide constante durant ce travail.

2. Equations linéarisées.

Dans ce paragraphe nous étudions les équations linéarisées

$$\partial_t u - \frac{1}{\varrho_0} Au = g\,, \tag{2.1}$$

$$\partial_t \sigma + v \cdot \nabla \sigma = h\,. \tag{2.2}$$

Cette étude nous servira dans le paragraphe suivant à la démonstration de l'existence et l'unicité de la solution locale.

On considère d'abord l'équation (2.1), où ϱ_0 et g sont des fonctions données.

Dans la suite, on suppose que

$$\varrho_0 \in L^\infty\,, \qquad \nabla \log(\varrho_0/\varrho_{\mathrm{eq}}) \in L^3 \tag{2.3}$$

(les hypothèses (1.7)-(1.8) sur Φ sont toujours supposées).

On a alors la

PROPOSITION 2.1. *Sous les hypothèses*

$$u_0 \in H^2\,, \qquad g \in L^2(0, T; H^1)\,, \tag{2.4}$$

l'équation (2.1) *admet une solution* $u \in L^\infty(0, T; H^2) \cap L^2(0, T; H^3)$ *et une seule.*

Pour la démonstration, il nous convient d'introduire deux espaces de Hilbert X_{ϱ_0} et Y_{ϱ_0}. X_{ϱ_0} consistera en les fonctions u à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ telles que $\nabla u \in H^2$ et que $u \to 0$ pour $|x| \to \infty$, tandis que Y_{ϱ_0} consistera en les mêmes éléments que H^2. Leurs normes $\|u\|_{X_{\varrho_0}} = ((u, u)_{X_{\varrho_0}})^{1/2}$ et $\|u\|_{Y_{\varrho_0}} = ((u, u)_{Y_{\varrho_0}})^{1/2}$ sont définies par

$$(u, v)_{X_{\varrho_0}} = (\nabla_A u, \nabla_A v)_{L^2} + \left(\frac{1}{\sqrt{\varrho_0}} Au, \frac{1}{\sqrt{\varrho_0}} Av\right)_{L^2} + \\ + \left(\nabla_A\left(\frac{1}{\varrho_0} Au\right), \nabla_A\left(\frac{1}{\varrho_0} Av\right)\right)_{L^2}, \tag{2.5}$$

$$(u, v)_{Y_{\varrho_0}} = (\sqrt{\varrho_0}\, u, \sqrt{\varrho_0} v)_{L^2} + \\ + (\nabla_A u, \nabla_A v)_{L^2} + \left(\frac{1}{\sqrt{\varrho_0}} Au, \frac{1}{\sqrt{\varrho_0}} Av\right)_{L^2}, \tag{2.6}$$

où

$$\nabla_A u = {}^t(a_1, \ldots, a_{10}) \tag{2.7}$$

avec

$$a_1 = \sqrt{\mu}\,\partial_{x_1} u_1\,, \quad a_2 = \sqrt{\mu}\,\partial_{x_1} u_2\,, \ldots, a_8 = \sqrt{\mu}\,\partial_{x_3} u_2\,,$$
$$a_9 = \sqrt{\mu}\,\partial_{x_3} u_3\,, \quad a_{10} = \sqrt{\lambda}(\nabla \cdot u) = \sqrt{\lambda}\,\sum_{i=1}^{3} \partial_{x_i} u_i\,.$$

L'opérateur ∇_A vérifie, comme on le voit aisément, la relation

$$(\nabla_A u, \nabla_A v)_{L^2} = -(Au, v)_{L^2} = -(u, Av)_{L^2} \tag{2.8}$$

pour toutes les fonctions u, v pour lesquelles tous les membres de (2.8) sont bien définis.

L'opérateur A étant elliptique (à coefficients constants), on a

$$c'\|Au\|_{L^p} \leqslant \|\nabla\nabla u\|_{L^p} \leqslant c\|Au\|_{L^p} \qquad (p \in [1, \infty[)$$

(comme il est si bien connu depuis $[K]$ et d'autres), et donc, compte tenu de (2.3), la norme $\|\cdot\|_{Y_{\varrho_0}}$ équivant à la norme $\|\cdot\|_{H^2}$ et la norme $\|\cdot\|_{X_{\varrho_0}}$ à la norme dans H^2 des dérivées premières d'une fonction. C'est-à-dire, il y a deux constantes positives c et c' telles que

$$\begin{cases} c'\|u\|_{Y_{\varrho_0}} \leqslant \|u\|_{H^2} \leqslant c\|u\|_{Y_{\varrho_0}}\,, \\ c'\|u\|_{X_{\varrho_0}} \leqslant \|\nabla u\|_{H^2} \leqslant c\|u\|_{X_{\varrho_0}}\,. \end{cases} \tag{2.9}$$

On pose en outre

$$\|u\|^2_{X_{\varrho_0} \cap Y_{\varrho_0}} = \|u\|^2_{X_{\varrho_0}} + \|u\|^2_{Y_{\varrho_0}}\,. \tag{2.10}$$

Cela étant, la proposition 2.1 résultera des lemmes suivants.

LEMME 2.1. *On suppose que*

$$u_0 \in Y_{\varrho_0}\,, \qquad g \in L^2(0, T; H^1) \tag{2.11}$$

(ϱ_0 *étant donnée et vérifiant* (2.3)) *Alors il existe un élément* $u \in$ $\in L^2(0, T; X_{\varrho_0} \cap Y_{\varrho_0})$ *et un seul vérifiant*

$$\int_0^T \{(u, \varphi)_{X_{\varrho_0}} - (u, \partial_t \varphi)_{Y_{\varrho_0}}\}\,dt = \int_0^T \langle g(t), \varphi(t)\rangle_{Y_{\varrho_0}}\,dt + (u_0, \varphi(0))_{Y_{\varrho_0}} \tag{2.12}$$

pour toute fonction φ *telle que*

(2.13) $\quad \varphi \in L^2(0, T; X_{\varrho_0} \cap Y_{\varrho_0}), \qquad \partial_t \varphi \in L^2(0, T; Y_{\varrho_0}), \qquad \varphi(\cdot, T) = 0,$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{Y_{\varrho_0}}$ *généralise de manière évidente le produit scalaire* $(\cdot, \cdot)_{Y_{\varrho_0}}$ *défini par* (2.6).

DÉMONSTRATION. On pose

$$a(u, v) = (u, v)_{X_{\varrho_0}}.$$

De cette définition et de (2.10) il résulte immédiatement qu'il existe deux constantes α et β indépendantes de t telles que

$$|a(u, v)| \leq \|u\|_{X_{\varrho_0} \cap X_{\varrho_0}} \|v\|_{X_{\varrho_0} \cap Y_{\varrho_0}}, \tag{2.14}$$

$$a(u, u) + \beta \|u\|^2_{Y_{\varrho_0}} \geq \alpha \|u\|^2_{X_{\varrho_0} \cap Y_{\varrho_0}}, \qquad \alpha > 0, \tag{2.15}$$

pour tout $u, v \in X_{\varrho_0} \cap Y_{\varrho_0}$.

Donc, d'après le théorème 1.1 de [L], chap. IV, il existe un unique élément $u \in L^2(0, T; X_{\varrho_0} \cap Y_{\varrho_0})$ vérifiant la relation (2.12). ■

LEMME 2.2. *Sous les hypothèses* (2.11), *l'élément* u *donné par le lemme* 2.1 *satisfait, pour tout* $t \in [0, T]$, *à l'inégalité*

$$\|u\|^2_{L^\infty(0, t; Y_{\varrho_0})} + \int_0^t \|u(s)\|^2_{X_{\varrho_0}} ds \leq 4 \|u_0\|^2_{Y_{\varrho_0}} + c(1 + t) \int_0^t \|g(s)\|^2_{H^1} ds, \tag{2.16}$$

où c *est une constante qui ne dépend ni de* u *ni de* g.

DÉMONSTRATION. On pose

$$\psi(x, s) = \frac{1}{\eta^2} \int_{s-\eta}^{s} \tilde{\chi}_\varepsilon(r)\, dr \int_r^{r+\eta} \tilde{u}(x, \tau)\, d\tau \qquad (\varepsilon, \eta > 0)$$

avec

$$\tilde{\chi}_\varepsilon(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon} r & \text{pour } 0 \leq r \leq \varepsilon, \\ 1 & \text{pour } \varepsilon \leq r \leq t_1 - \varepsilon, \\ \dfrac{1}{\varepsilon}(t_1 - r) & \text{pour } t_1 - \varepsilon \leq r \leq t_1, \\ 0 & \text{pour } r \geq t_1, \end{cases}$$

$$\tilde{u}(x, \tau) = \begin{cases} u(x, \tau) & \text{pour } \tau \geq 0, \\ 0 & \text{pour } \tau < 0. \end{cases}$$

La fonction ψ ainsi définie satisfait à la condition (2.13). Si on la substitue à φ dans la relation (2.12) et si on fait tendre en premier lieu ε vers 0 puis η vers 0, on obtient

$$(2.17)\qquad \frac{1}{2}\,\|u(t_1)\|^2_{Y_{\varrho_0}} + \int_0^{t_1} \|u(s)\|_{X_{\varrho_0}}\,ds = \frac{1}{2}\,\|u_0\|^2_{Y_{\varrho_0}} + \int_0^{t_1} \langle g(s),\, u(s)\rangle_{Y_{\varrho_0}}\,ds$$

(pour les détails de l'usage de la fonction ψ, voir [LSU]).

Comme on a

$$|\langle g,\, u\rangle_{Y_{\varrho_0}}| \leqslant c'\,\|g\|_{H^1}\,(\|u\|_{X_{\varrho_0}} + \|u\|_{Y_{\varrho_0}})$$

avec une constante c' déterminée par μ, λ, ϱ_0 (voir (2.5), (2.6)) il vient

$$\left|\int_0^{t_1} \langle g(s),\, u(s)\rangle_{Y_{\varrho_0}}\,ds\right| \leqslant 2c'^2(1+t)\,\|g\|^2_{L^2(0,\,t_1;\,H^1)} + \\ + \frac{3}{4}\,\|u\|^2_{L^2(0,\,t_1;\,X_{\varrho_0})} + \frac{1}{8}\,\|u\|^2_{L^\infty(0,\,t_1;\,Y_{\varrho_0})}\,.$$

Cette inégalité et (2.17) nous donnent

$$\frac{1}{2}\,\|u(t_1)\|^2_{Y_{\varrho_0}} + \frac{1}{4}\int_0^{t_1} \|u(s)\|^2_{X_{\varrho_0}}\,ds \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{2}\,\|u_0\|^2_{Y_0} + 2c'^2(1+t)\,\|g\|^2_{L^2(0,\,t;\,H^1)} + \frac{1}{8}\,\|u\|^2_{L^\infty(0,\,t;\,Y_{\varrho_0})}$$

pour tout $t_1 \in [0, t]$. En prenant l'extrême supérieur des deux termes du premier membre de cette inégalité par rapport à $t_1 \in [0, t]$, on obtient (2.16). ■

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2.1. Elle résulte immédiatement de (2.9)-(2.10) et des lemmes 2.1 et 2.2. ■

On considère maintenant l'équation (2.2). L'existence et l'unicité de la solution et son estimation se démontrent d'une manière analogue au théorème 3.2 de [BF]. On a en effet la

PROPOSITION 2.2. *On suppose que*

$$\begin{cases} v \in L^1(0, T; X_{\varrho_0}), \\ h \in L^2(0, T; H^2), \qquad \sigma_0 \in H^2 . \end{cases} \tag{2.18}$$

Alors l'équation (2.2) *avec la condition initiale*

$$\sigma|_{t=0} = \sigma_0 \tag{2.19}$$

admet une solution et une seule dans la classe

$$\sigma \in L^\infty(0, T; H^2) \tag{2.20}$$

et la solution σ *satisfait à l'inégalité*

$$\|\sigma\|^2_{L^\infty(0, t; H^2)} \leq (\|\sigma_0\|^2_{H^2} + \|h\|^2_{L^2(0, t; H^2)}) \exp(t + c\|v\|_{L^1(0, t; X_{\varrho_0})}) \tag{2.21}$$

pour tout $t \in [0, T]$.

DÉMONSTRATION. Nous la démontrons d'une manière analogue au théorème 3.2 de [BF]. En effet, compte tenu de la relation

$$\|\nabla v\|_{L^\infty} \leq c\left(\sum_{i=1}^{3} \|\partial_{x_i} v\|^2_{H^2}\right)^{1/2} \leq c'\|v\|_{X_{\varrho_0}} \tag{2.22}$$

(voir (2.9)) nous pouvons procéder de la même manière que dans la démonstration du théorème 3.2 de [BF] pour obtenir

$$\|\nabla\sigma\|^2_{L^\infty(0, t; H^1)} \leq (\|\nabla\sigma_0\|^2_{H^1} + \|\nabla h\|^2_{L^2(0, t; H^1)}) \exp(t + c\|v\|_{L^1(0, t; X_{\varrho_0})}). \tag{2.23}$$

En outre, si on intègre sur R^3 l'équation (2.2) multipliée par σ et si on tient compte de la relation

$$\int_{\mathrm{R}^3} \sigma v \cdot \nabla\sigma = -\frac{1}{2}\int_{\mathrm{R}^3} (\nabla \cdot v)\,|\sigma|^2 ,$$

alors il est aisé d'y appliquer, à l'aide de (2.22), le lemme de Gronwall pour obtenir l'estimation de $\|\sigma\|^2_{L^\infty(0, t; L^2)}$, qui, jointe à (2.23), nous donne (2.21). ∎

3. Solution locale.

THÉORÈME 3.1. *Sous les hypothèses* (1.7)-(1.8), *si on a*

$$u_0 \in H^2 , \qquad \sigma_0 \in H^2 , \tag{3.1}$$

alors il existe un $T' > 0$ *tel que les équations* (1.1)-(1.3) *avec les conditions* (1.4) *admettent dans l'intervalle* $[0, T']$ *une solution et une seule dans la classe*

$$u \in L^\infty(0, T'; H^2) \cap L^2(0, T'; H^3), \tag{3.2}$$

$$\sigma \in L^\infty(0, T'; H^2). \tag{3.3}$$

DÉMONSTRATION. En vertu de (2.9), elle se réduit à la démonstration du lemme 3.1 cité ci-dessous. ∎

REMARQUE 3.1. Il existe une fonction $\vartheta: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ décroissante et telle que T' mentionné dans l'énoncé du théorème 3.1 satisfasse à

$$0 < \vartheta(\|u_0\|_{H^2} + \|\sigma_0\|_{H^2}) \leq T',$$

ce que l'on déduit tout facilement de (2.9) et des raisonnements qui nous conduiront à l'établissement de l'intervalle $[0, T']$ de l'existence de la solution dans le lemme 3.1.

LEMME 3.1. *Sous les hypothèses* (1.7)-(1.8), *si on a*

$$u_0 \in Y_{\varrho_0}, \qquad \sigma_0 \in H^2, \tag{3.4}$$

alors il existe un $T' > 0$ *tel que les équations* (1.1)-(1.3) *avec les conditions* (1.4) *admettent dans l'intervalle* $[0, T']$ *une solution et seule dans la classe*

$$u \in L^\infty(0, T'; Y_{\varrho_0}) \cap L^2(0, T'; X_{\varrho_0}), \tag{3.5}$$

$$\sigma \in L^\infty(0, T'; H^2). \tag{3.6}$$

Pour démontrer le lemme 3.1 nous nous servirons des lemmes suivants.

LEMME 3.2. *On pose*

$$h(u) = u \cdot \nabla\Phi - \nabla \cdot u, \tag{3.7}$$

$$h_1(u) = u \cdot \nabla\Phi - u \cdot \nabla\sigma_0 - \nabla \cdot u. \tag{3.8}$$

Sous les hypothèses du lemme 3.1 *on a, pour tout* $u \in X_{\varrho_0} \cap Y_{\varrho_0}$,

$$\|h(u)\|_{H^2} \leq c\|u\|_{X_{\varrho_0}}, \tag{3.9}$$

$$\|h_1(u)\|_{H^1} \leq c\|u\|_{Y_{\varrho_0}} \tag{3.10}$$

avec une constante c qui dépend de ϱ_0 *mais pas de* u.

DÈMONSTRATION. Les inégalités (3.9)-(3.10) sont des conséquences immédiates de l'immersion de Sobolev, de (2.9) et des hypothèses du lemme. ■

LEMME 3.3. *Si σ est la solution de l'équation* (2.2) *avec* $v = u$ $h = h(u)$ *(où $h(u)$ est définie par* (3.7)) *et avec la condition initiale* (2.19), *alors pour tout* $t > 0$ *et tout* $u \in L^\infty(0, t; Y_{\varrho_0}) \cap L^2(0, t; X_{\varrho_0})$, *on a*

$$\|\sigma - \sigma_0\|_{L^\infty(0,t;L^3)} \leq ct^{1/3}\|u\|_{L^\infty(0,t;Y_{\varrho_0})}(\exp(t + c'\|u\|_{L^1(0,t;X_{\varrho_0})})), \tag{3.11}$$

$$\|\nabla\sigma - \nabla\sigma_0\|_{L^\infty(0,t;L^2)} \leq ct^{1/2}\|u\|_{L^\infty(0,t;Y_{\varrho_0})}(\exp(t + c'\|u\|_{L^1(0,t;X_{\varrho_0})})) \tag{3.12}$$

avec deux constantes c et c' ne dépendant ni de σ ni de u.

DÉMONSTRATION. Si on pose

$$\nu = \sigma - \sigma_0 ,$$

il est aisé de voir que ν satisfait à l'équation

$$\partial_t \nu + u \cdot \nabla \nu = h_1(u) \tag{3.13}$$

avec $h_1(u)$ définie par (3.8). Si on multiplie l'équation (3.13) par $\nu|\nu|$ et si on l'intègre sur $\mathbb{R}^3$, on obtient

$$\frac{1}{3}\frac{d}{dt}\|\nu\|_{L^3}^3 = \frac{1}{3}\int_{\mathbb{R}^3}(\nabla\cdot u)\,|\nu|^3 + \int_{\mathbb{R}^3} h_1(u)\nu|\nu| \,.$$

Compte tenu des inégalités (2.22), (3.10) et du fait que $\nu|_{t=0} = 0$, il est aisé de déduire de cette égalité, à l'aide du lemme de Gronwall, l'inégalité (3.11).

Quant à (3.12), elle résultera d'une façon analogue de l'égalité

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\nu\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(\nabla\cdot u)\,|\nabla\nu|^2 + \\ + \sum_{i,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}(\partial_{x_i}v_j)(\partial_{x_i}\nu)\,\partial_{x_j}\nu = \int_{\mathbb{R}^3}(\nabla h_1(u))\cdot\nabla\nu\,,$$

qui s'obtient en multipliant le gradient des deux membres de (3.13) par $\nabla\nu$ (pour les détails voir la démonstration du lemme 4.4 de [BF]). ■

LEMME 3.4. *Sous les hypothèses du lemme* 3.3, *on a, pour tout* $t>0$ *et tout* $u\in L^{\infty}(0,t;Y_{\varrho_0})\cap L^2(0,t;X_{\varrho_0})$,

$$\|\sigma-\sigma_0\|_{L^{\infty}(0,t,L^{\infty})}\leq ct^{5/12}\|u\|_{L^{\infty}(0,t;Y_{\varrho_0})}(\exp(t+c'\|u\|_{L^1(0,t;X_{\varrho_0})})+ \tag{3.14}$$

$$+ct^{1/8}(\exp(t+c'\|u\|_{L^1(0,t;X_{\varrho_0})})(\|\sigma_0\|_{H^2}+\|u\|_{L^{\infty}(0,t;Y_{\varrho_0})}+\|u\|_{L^2(0,t;X_{\varrho_0})}),$$

$$\|\nabla\sigma-\nabla\sigma_0\|_{L^{\infty}(0,t;L^3)}\leq ct^{1/4}(\exp(t+c'\|u\|_{L^1(0,t;X_{\varrho_0})})\times \tag{3.15}$$

$$\times(\|\sigma_0\|_{H^2}+\|u\|_{L^{\infty}(0,t;Y_{\varrho_0})}+\|u\|_{L^2(0,t;X_{\varrho_0})}).$$

DÉMONSTRATION. Les inégalités (3.14)-(3.15) sont des conséquences immédiates de (2.21), de (3.9), de (3.11), de (3.12) et des inégalités évidentes

$$\|\sigma-\sigma_0\|_{L^{\infty}(0,t;L^{\infty})}\leq c(\|\sigma-\sigma_0\|^{1/2}_{L^{\infty}(0,t;L^3)}\|\nabla\sigma-\nabla\sigma_0\|^{1/2}_{L^{\infty}(0,t;L^2)}+$$

$$+\|\nabla\sigma-\nabla\sigma_0\|^{1/4}_{L^{\infty}(0,t;L^2)}(\|\nabla\sigma\|^{3/4}_{L^{\infty}(0,t;H^1)}+\|\nabla\sigma_0\|^{3/4}_{H^1})),$$

$$\|\nabla\sigma-\nabla\sigma_0\|_{L^{\infty}(0,t;L^3)}\leq\|\nabla\sigma-\nabla\sigma_0\|^{1/2}_{L^{\infty}(0,t;L^2)}(\|\nabla\sigma\|^{1/2}_{L^{\infty}(0,t;H^1)}+\|\nabla\sigma_0\|^{1/2}_{H^1}).\ \blacksquare$$

LEMME 3.5. *On pose*

$$g(u,\sigma)=\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_0}\right)Au-(u\cdot\nabla)u-\nabla\sigma, \tag{3.16}$$

où ϱ *étant définie par* (1.3). *Il existe une constante* c *ne dépendant ni de* u *de* ϱ *telle que*

$$\|g(u,\sigma)\|_{L^2(0,t;H^1)}\leq ct^{1/2}(\|u\|_{L^{\infty}(0,t;Y_{\varrho_0})}+\|\nabla\sigma\|_{L^{\infty}(0,t;H^1)})+ \tag{3.17}$$

$$+(\exp(\|\sigma\|_{L^{\infty}(0,t;L^{\infty})})\|u\|_{L^2(0,T;X_{\varrho_0})})\times$$

$$\times(\|\sigma-\sigma_0\|_{L^{\infty}(0,t;L^{\infty})}+\|\nabla\sigma-\nabla\sigma_0\|_{L^{\infty}(0,t;L^3)})$$

pour tout $t>0$, *et pour tout* $u\in L^{\infty}(0,t;Y_{\varrho_0})\cap L^2(0,t;X_{\varrho_0})$ *et pour tout* $\sigma\in L^{\infty}(0,t;H^2)$.

DÉMONSTRATION. Pour montrer (3.17), on remarque d'abord que

$$\|\exp(-\sigma+\sigma_0)-1)\|_{L^{\infty}}\leq\exp(\|\sigma-\sigma_0\|_{L^{\infty}})\|\sigma-\sigma_0\|_{L^{\infty}}, \tag{3.18}$$

conséquence immédiate de la relation

$$|\exp(-s+s_0)-1)|\leq|s-s_0|\exp(|s-s_0|)\quad\forall s,s_0\in\mathbb{R}.$$

Cela étant, il est aisé de voir, grâce à (3.18) et à la relation

$$\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right) = \frac{1}{\varrho_0}(\exp(-\sigma + \sigma_0) - 1)$$

(voir aussi (1.3)), que

$$\left\| \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right) Au \right\|_{L^2} \leq c(\exp \|\sigma\|_{L^\infty}) \|\sigma - \sigma_0\|_{L^\infty} \left\| \frac{1}{\sqrt{\varrho_0}} Au \right\|_{L^2} \tag{3.19}$$

avec une constante c qui dépend de σ_0 (donc de ϱ_0) mais pas de u ni de σ (donc ni de ϱ).

En outre, comme

$$\partial_{x_i}\left(\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right) Au\right) = (\exp(-\sigma + \sigma_0) - 1)\,\partial_{x_i}\left(\frac{1}{\varrho_0} Au\right) -$$
$$-(\exp(-\sigma + \sigma_0) - 1)(\partial_{x_i}\sigma - \partial_{x_i}\sigma_0)\frac{1}{\varrho_0} Au \qquad (i = 1, 2, 3),$$

il résulte de (3.18) que

$$\left\| \partial_{x_i}\left(\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right) Au\right) \right\|_{L^2} \leq \tag{3.20}$$
$$\leq c(\exp \|\sigma\|_{L^\infty})(\|\sigma - \sigma_0\|_{L^\infty} + \|\nabla\sigma - \nabla\sigma_0\|_{L^3}) \left\| \nabla_A\left(\frac{1}{\varrho_0} Au\right) \right\|_{L^2}.$$

Par ailleurs, il est aisé de voir qu'on a

$$\|(u \cdot \nabla) u\|_{H^1} \leq \left(\|\nabla_A u\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{1}{\sqrt{\varrho_0}} Au \right\|_{L^2}^2 \right) \tag{3.21}$$

avec c une constante qui dépend de ϱ_0 mais pas de u.

Si on rappelle l'expression (3.16) de $g(\cdot, \cdot)$, l'inégalité (3.17) découle immédiatement de (3.19), de (3.20) et de (3.21). ∎

DÉMONSTRATION DU LEMME 3.1. L'existence d'une solution (u, σ) dans un certain intervalle $[0, T']$ sera démontré par le point fixe d'une application résultant de la résolution des équations linéarisées.

Pour $t > 0$ on définit l'ensemble $\mathscr{B}_t$ par

$$\mathscr{B}_t = \{u \mid \|u\|_{L^\infty(0, t; Y_{\varrho_0})}^2 + \|u\|_{L^2(0, t; X_{\varrho_0})}^2 \leq 8\|u_0\|_{Y_0}^2\}. \tag{3.22}$$

Soit

$$\bar{u} \in \mathscr{B}_t .$$

En rappelant la définition de $\mathcal{B}_t$, on a d'après le lemme 3.2

$$h(\overline{u}) \in L^2(0, t; H^2),$$

où $h(\cdot)$ est donnée par (3.7). Donc l'équation

$$\partial_t \sigma + \overline{u} \cdot \nabla \sigma = h(\overline{u}) \tag{3.23}$$

avec la condition initiale

$$\sigma|_{t=0} = \log(\varrho_0/\varrho_{\mathrm{eq}}) \in H^2 \tag{3.24}$$

admet, d'après la proposition 2.2, une solution $\sigma = \sigma(\overline{u})$ et une seule dans la classe

$$\sigma(\overline{u}) \in L^\infty(0, t; H^2), \tag{3.25}$$

ce qui définit l'application

$$\sigma\colon \mathcal{B}_t \to L^\infty(0, t; H^2). \tag{3.26}$$

On remarque en outre que la proposition 2.2 (en particulier l'inégalité (2.21)) et la relation (3.9) entraînent l'inégalité

$$\begin{aligned} &\|\sigma(\overline{u})\|_{L^\infty(0, t; H^2)} \leqslant \\ &\leqslant (\|\sigma_0\|_{H^2}^2 + c\|\overline{u}\|_{L^2(0, t; X_{\varrho_0})}^2) \exp(t + c' t^{1/2} \|\overline{u}\|_{L^2(0, t; X_{\varrho_0})}), \end{aligned} \tag{3.27}$$

qui est valable pour tout $\overline{u} \in \mathcal{B}_t$ avec deux constantes c et c' ne dépendant ni de t ni de $\overline{u}$.

$\sigma(\overline{u})$ étant définie, on pose

$$\varrho(\overline{u}) = \varrho_{eq} \exp(\sigma(\overline{u})). \tag{3.28}$$

On considère maintenant l'équation

$$\partial_t u - \frac{1}{\varrho_0} Au = g(\overline{u}, \sigma(\overline{u})), \tag{3.29}$$

où $g(\cdot, \cdot)$ est donnée par (3.16) (voir aussi (3.28)).

D'après le lemme 3.5 et la relation (3.27), on a, pour $\overline{u} \in \mathcal{B}_t$,

$$g(\overline{u}, \sigma(\overline{u})) \in L^2(0, t; H^1).$$

Donc, si on applique les lemmes 2.1 et 2.2 à l'équation (3.29) avec la condition initiale (2.11), celle-ci admet une solution et une seule dans la classe $L^\infty(0, t; Y_{\varrho_0}) \cap L^2(0, t; X_{\varrho_0})$. Cette solution, que nous notons

$$u = G(\overline{u}), \tag{3.30}$$

définit l'application

$$G\colon \mathcal{B}_t \to L^\infty(0, t; Y_{\varrho_0}) \cap L^2(0, t; X_{\varrho_0}). \tag{3.31}$$

En outre, d'après (2.16), $u = G(\overline{u})$ satisfait à

$$\|u\|^2_{L^\infty(0, t; Y_{\varrho_0})} + \|u\|^2_{L^2(0, t; X_{\varrho_0})} \leq 4\|u_0\|^2_{Y_{\varrho_0}} + c(1 + t)\|g(\overline{u}, \sigma(\overline{u}))\|^2_{L^2(0, t; H^1)} \tag{3.32}$$

avec une constante c ne dépendant pas de t ni de $\overline{u}$.

En rappelant l'inégalité (3.17), on déduit des relations (3.14), (3.15) et (3.32) qu'il existe un $\overline{T} > 0$ tel que pour tout $t \in]0, \overline{T}]$ on ait

$$\|G(\overline{u})\|^2_{L^\infty(0, t; Y_{\varrho_0})} + \|G(\overline{u})\|^2_{L^2(0, t; X_{\varrho_0})} \leq 8\|u_0\|^2_{Y_{\varrho_0}} \qquad \forall \overline{u} \in \mathcal{B}_t . \tag{3.33}$$

Les relations (3.22) et (3.33) entraînent que

$$G(\mathcal{B}_t) \subset \mathcal{B}_t \qquad \text{pour } 0 < t \leq \overline{T}. \tag{3.34}$$

Nous considérons maintenant deux éléments $\overline{u}_1$ et $\overline{u}_2$ pour $0 < t \leq \overline{T}$ et notons

$$u_1 = G(\overline{u}_1), \qquad u_2 = G(\overline{u}_2) \tag{3.35}$$

leurs images par l'application G donnée dans (3.31). Nous posons en outre

$$w = u_1 - u_2 , \qquad \overline{w} = \overline{u}_1 - \overline{u}_2 , \qquad \overline{s} = \sigma(\overline{u}_1) - \sigma(\overline{u}_2), \tag{3.36}$$

où $\sigma(\cdot)$ est l'application donnée dans (3.26).

La différence de l'équation (3.23) avec $\overline{u} = \overline{u}_1$ et celle avec $\overline{u} = \overline{u}_2$ (voir aussi (3.7)) nous donne

$$\partial_t \overline{s} + \overline{u}_1 \cdot \nabla \overline{s} = h_2(\overline{w}) \tag{3.37}$$

avec

$$h_2(\overline{w}) = -\overline{w} \cdot \nabla\sigma(\overline{u}_2) + \overline{w} \cdot \nabla\Phi - \nabla \cdot \overline{w} .$$

Le produit scalaire dans L^2 des deux membres de (3.37) avec $\overline{s}$ nous donne

$$\frac{d}{dt}\|\overline{s}\|^2_{L^2} - \int_{\mathrm{R}^3} (\nabla \cdot \overline{u}_1)\overline{s}^2 \leq c\|\nabla_A \overline{w}\|_{L^2}\|\overline{s}\|_{L^2}(1 + \|\nabla\Phi\|_{L^3} + \|\nabla\sigma(\overline{u}_2)\|_{L^3}) .$$

Comme

$$\bar{s}|_{t=0} = 0\,, \tag{3.38}$$

il est aisé d'en déduire, à l'aide du lemme de Gronwall et des relations (3.22) et (3.27) (vois aussi (2.22)), que

$$\|\bar{s}\|^2_{L^\infty(0,t;L^2)} \leq ct\|\nabla_A \bar{w}\|^2_{L^\infty(0,t;L^2)} \tag{3.39}$$

avec une constante c ne dépendant ni de $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ ni de $t \in]0, \bar{T}]$.

D'autre part, on voit aisément que

$$\|\nabla h_2(\bar{w})\|_{L^2} \leq c(\|\nabla \bar{w}\|_{L^2} + \|\nabla\nabla \bar{w}\|_{L^2})(1 + \|\nabla \Phi\|_{W_3^1} + \|\nabla \sigma(\bar{u}_2)\|_{H^1})\,.$$

Donc, compte tenu des relations (3.22), (3.27) et du fait que $t \in]0, \bar{T}]$, on obtient

$$\|\nabla h_2(\bar{w})\|_{L^2} \leq c\left(\|\nabla_A \bar{w}\|_{L^2} + \left\|\frac{1}{\sqrt{\varrho_0}}A\bar{w}\right\|_{L^2}\right) \tag{3.40}$$

avec une constante c indépendante de $\bar{u}_1, \bar{u}_2 \in \mathscr{B}_t$ $(0 < t \leq \bar{T})$.

En outre, à l'aide de l'intégration par parties et à (2.22), on déduit facilement que

$$\left|\int_{\mathbf{R}^3} \nabla(\bar{u}_1 \cdot \nabla \bar{s}) \cdot \nabla \bar{s}\right| \leq \|\nabla \bar{u}_1\|_{L^\infty}\|\nabla \bar{s}\|^2_{L^2} \leq c\|\bar{u}_1\|_{X_{\varrho_0}}\|\nabla \bar{s}\|^2_{L^2}\,. \tag{3.41}$$

Si on applique maintenant l'opérateur différentiel ∇ à l'équation (3.37) et si on en fait le produit scalaire avec $\nabla \bar{s}$, il en résulte, à l'aide de (3.40) et de (3.41), que

$$\frac{d}{dt}\|\nabla \bar{s}\|^2_{L^2} \leq c(1 + \|\bar{u}_1\|_{X_{\varrho_0}})\|\nabla \bar{s}\|^2_{L^2} + c\left(\|\nabla_A \bar{w}\|^2_{L^2} + \left\|\frac{1}{\sqrt{\varrho_0}}A\bar{w}\right\|^2_{L^2}\right).$$

De cette inégalité et de la relation (3.38) on déduit, à l'aide du lemme de Gronwall, que

$$\|\nabla \bar{s}\|^2_{L^\infty(0,t;L^2)} \leq c\left(\|\nabla_A \bar{w}\|^2_{L^2(0,t;L^2)} + \left\|\frac{1}{\sqrt{\varrho_0}}A\bar{w}\right\|^2_{L^2(0,t;L^2)}\right) \tag{3.42}$$

avec une constante c ne dépendant ni de $\bar{u}_1, \bar{u}_2 \in \mathscr{B}_t$ ni de $t \in]0, \bar{T}]$.

On considère maintenant la différence de l'équation (3.29) avec $\bar{u} = \bar{u}_1$ et celle avec $\bar{u} = \bar{u}_2$; c'est-à-dire, on a

$$\partial_t w - \frac{1}{\varrho_0} Aw = \tilde{g}(\bar{w}, \bar{s}), \tag{3.43}$$

où

$$\tilde{g}(\bar{w}, \bar{s}) = \left(\frac{1}{\varrho(\bar{u}_1)} - \frac{1}{\varrho(\bar{u}_2)} \right) A\bar{u}_1 + \left(\frac{1}{\varrho(\bar{u}_2)} - \frac{1}{\varrho_0} \right) A\bar{w} - \nabla\bar{s} - (\bar{u}_1 \cdot \nabla)\bar{w} - (\bar{w} \cdot \nabla)\bar{u}_2$$

avec $\varrho(\cdot)$ définie par (3.28).

Compte tenu de la relation

$$\|\exp\varphi_1 - \exp\varphi_2\|_{L^p} \leqslant (\exp(\max(\|\varphi_1\|_{L^\infty}, \|\varphi_2\|_{L^\infty})))\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^p} \qquad (p \geqslant 1)$$

(φ_1, φ_2 étant deux fonctions génériques), le produit scalaire dans L^2 des deux membres de (3.43) avec $\varrho_0 w$ et $-Aw$ nous donne

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\sqrt{\varrho_0}w\|_{L^2}^2 + \|\nabla_A w\|_{L^2}^2) + \left(\|\nabla_A w\|_{L^2}^2 + \left\|\frac{1}{\sqrt{\varrho_0}}Aw\right\|_{L^2}^2\right) \leqslant \\ &\leqslant c(\exp(\max(\|\sigma(\bar{u}_1) - \sigma_0\|_{L^\infty}, \|\sigma(\bar{u}_2) - \sigma_0\|_{L^\infty})))\|\bar{s}\|_{L^3} \times \\ &\times \left(\left\|\frac{1}{\sqrt{\varrho_0}}Aw\right\|_{L^2}\left\|\frac{1}{\varrho_0}A\bar{u}_1\right\|_{L^6} + \|w\|_{L^6}\left\|\frac{1}{\sqrt{\varrho_0}}A\bar{u}_1\right\|_{L^2}\right) + \\ &+ c(\exp\|\sigma(\bar{u}_2) - \sigma_0\|_{L^\infty})(\|\sigma(\bar{u}_2) - \sigma_0\|_{L^\infty} + \|\sigma(\bar{u}_2) - \sigma_0\|_{L^3}) \times \\ &\times \left\|\frac{1}{\sqrt{\varrho_0}}A\bar{w}\right\|_{L^2}\left(\left\|\frac{1}{\sqrt{\varrho_0}}Aw\right\|_{L^2} + \|w\|_{L^6}\right) + c\left(\|\nabla w\|_{L^2} + \left\|\frac{1}{\sqrt{\varrho_0}}Aw\right\|_{L^2}\right)\|\bar{s}\|_{H^1} + \\ &+ c\left(\|w\|_{L^6} + \left\|\frac{1}{\sqrt{\varrho_0}}Aw\right\|_{L^2}\right)(\|\nabla\bar{w}\|_{L^2} + \|\sqrt{\varrho_0}\bar{w}\|_{L^2}) \times \\ &\qquad \times (\|\bar{u}_1\|)_{L^\infty} + \|\bar{u}_1\|_{L^3} + \|\nabla\bar{u}_2\|_{L^3}) \end{aligned} \tag{3.44}$$

avec une constante c qui dépend de ϱ_0 mais pas de $\bar{u}_1, \bar{u}_2 \in \mathcal{B}_t$ $(0, < t \leqslant \leqslant \bar{T})$. Or, des calculus élémentaires et les définitions de X_{ϱ_0} et de Y_{ϱ_0} nous permettent de transformer (3.44) en

$$\frac{d}{dt}\left(\|\sqrt{\varrho_0}w\|_{L^2}^2+\|\nabla_A w\|_{L^2}^2\right)+\left(\|\nabla_A w\|_{L^2}+\left\|\frac{1}{\sqrt{\varrho_0}}Aw\right\|_{L^2}^2\right)\leqslant \tag{3.45}$$

$$\leqslant c\big(\exp\left(2\max\left(\|\sigma(\overline{u}_2)-\sigma_0\|_{L^\infty},\ \|\sigma(\overline{u}_1)-\sigma_0\|_{L^\infty}\right)\right)\|\overline{s}\|_{L^2}\|\nabla\overline{s}\|_{L^2}\|\overline{u}_1\|_{X_{\varrho_0}}^2+$$

$$+c(\exp 2\|\sigma(\overline{u}_2)-\sigma_0\|_{L^\infty})(\|\sigma(\overline{u}_2)-\sigma_0\|_{L^\infty}^2+\|\sigma(\overline{u}_2)-\sigma_0\|_{L^3}^2)\left\|\frac{1}{\sqrt{\varrho_0}}A\overline{w}\right\|_{L^2}^2+$$

$$+c\|\overline{s}\|_{H^1}^2+c(\|\sqrt{\varrho_0}\overline{w}\|_{L^2}^2+\|\nabla_A\overline{w}\|_{L^2}^2)(\|\overline{u}_1\|_{Y_{\varrho_0}}^2+\|\overline{u}_2\|_{Y_{\varrho_0}}^2)\,.$$

En intégrant les deux membres de (3.45) par rapport à t et en tenant compte des relations (3.22), (3.27), (3.39) et (3.42), on obtient

$$\|\sqrt{\varrho_0}w\|_{L^\infty(0,t;L^2)}^2+\|\nabla_A w\|_{L^\infty(0,t;L^2)}^2+ \tag{3.46}$$

$$+\|\nabla_A w\|_{L^2(0,t;L^2)}^2+\left\|\frac{1}{\sqrt{\varrho_0}}Aw\right\|_{L^2(0,t;L^2)}^2\leqslant$$

$$\leqslant ct^{1/2}\|\nabla_A\overline{w}\|_{L^\infty(0,t;L^2)}\left(\|\nabla_A\overline{w}\|_{L^2(0,t;L^2)}+\left\|\frac{1}{\sqrt{\varrho_0}}A\overline{w}\right\|_{L^2(0,t;L^2)}\right)+$$

$$+c(\|\sigma(\overline{u}_2)-\sigma_0\|_{L^\infty(0,t;L^\infty)}^2+\|\sigma(\overline{u}_2)-\sigma_0\|_{L^\infty(0,t;L^3)}^2)\times$$

$$\times\left\|\frac{1}{\sqrt{\varrho_0}}A\overline{w}\right\|_{L^2(0,t;L^2)}^2+ct^2\|\nabla_A\overline{w}\|_{L^\infty(0,t;L^2)}^2+$$

$$+ct\left(\|\nabla_A\overline{w}\|_{L^2(0,t;L^2)}^2+\left\|\frac{1}{\sqrt{\varrho_0}}A\overline{w}\right\|_{L^2(0,t;L^2)}^2\right)+$$

$$+ct(\|\sqrt{\varrho_0}\overline{w}\|_{L^\infty(0,t;L^2)}^2+\|\nabla_A\overline{w}\|_{L^\infty(0,t;L^2)}^2)\,.$$

Si de nouveau on tient compte des relations (3.22) et (3.27), on déduit aisément de (3.11), (3.14) et de (3.46) (voir aussi (3.35)-(3.36)) l'existence d'un $T'\in]0,\overline{T}]$ tel que

$$\|G(\overline{u}_1)-G(\overline{u}_2)\|_F^2\leqslant\frac{1}{2}\|\overline{u}_1-\overline{u}_2\|_F^2\qquad\forall\overline{u}_1,\overline{u}_2\in\mathcal{B}_{T'}\,, \tag{3.47}$$

où $\|\cdot\|_F$ est la norme définie par

$$\|w\|_F^2 = \|\sqrt{\varrho_0}w\|^2_{L^\infty(0,T';L^2)} + \|\nabla_A w\|^2_{L^\infty(0,T';L^2)} + \tag{3.48}$$

$$+ \|\nabla_A w\|^2_{L^2(0,T';L^2)} + \left\| \frac{1}{\sqrt{\varrho_0}} Aw \right\|^2_{L^2(0,T';L^2)} .$$

En choisissant maintenant un élément (quelconque) u_1 de $\mathcal{B}_{T'}$, on définit par récurrence

$$u_{n+1} = G(u_n) \qquad \forall n \geq 1 \tag{3.49}$$

ce qui est possible grâce à (3.34) et au fait que $0 < T' \leq \overline{T}$. On a donc

$$u_n \in \mathcal{B}_{T'}, \qquad \forall n \geq 1 . \tag{3.50}$$

La relation (3.47) implique que la suite $\{u_n\}$ converge dans la norme $\|\cdot\|_F$ vers une fonction $\widetilde{u}$. On a évidemment

$$\|\widetilde{u}\|_F < \infty .$$

Or, la relation (3.50) nous permet d'en extraire une sous-suite $\{u_{n'}\}$ qui converge vers un élément $\widetilde{\widetilde{u}} \in \mathcal{B}_{T'}$ dans la topologie $L^\infty(0, T'; Y_{\varrho_0}) \cap L^2(0, T'; X_{\varrho_0})$ faible $*$.

En vertu de l'unicité de la limite on a

$$\widetilde{u} = \widetilde{\widetilde{u}}$$

et donc

$$\widetilde{u} \in \mathcal{B}_{T'} .$$

Par conséquent, en vertu de (3.34), $G(\widetilde{u})$ est bien défini et appartient à $\mathcal{B}_{T'}$. Comme $\widetilde{u}$ est la limite de $\{u_n\}$ dans la norme $\|\cdot\|_F$, (3.47) implique que

$$\widetilde{u} = G(\widetilde{u}) . \tag{3.51}$$

C'est-à-dire, si on définit $\sigma(\widetilde{u})$ comme dans (3.25)-(3.26), $(\widetilde{u}, \sigma(\widetilde{u}))$ sera une solution du système d'équations (1.1)-(1.3) dans l'intervalle de temps $[0, T']$.

Pour démontrer l'unicité, nous considérons deux solutions $(u_1, \sigma(u_1))$ et $(u_2, \sigma(u_2))$ appartenant aux classes indiquées dans (3.5)-(3.6). Vu que la solution σ de l'équation (3.23) est unique, il nous suffit de démontrer que $u_1 = u_2$.

Supposons par l'absurde que $u_1 \neq u_2$. Alors, en posant

$$t^* = \inf\{t > 0 \,|\, \|u_1 - u_2\|_{L^\infty(0,t;Y_{\varrho_0})} + \|u_1 - u_2\|_{L^2(0,t;X_{\varrho_0})} \neq 0\}, \tag{3.52}$$

$$u^* = u_1\,|_{t=t^*} = u_2\,|_{t=t^*}, \qquad \sigma^* = \sigma_1\,|_{t=t^*} = \sigma_2\,|_{t=t^*}, \tag{3.53}$$

on peut trouver un $\bar{t} > t^*$ tel que

$$\|u_i\|^2_{L^\infty(t^*,\bar{t};Y_{\varrho^*})} + \|u_i\|^2_{L^2(t^*,\bar{t};X_{\varrho^*})} \leq 8\|u^*\|^2_{Y_{\varrho^*}} \qquad (i = 1, 2), \tag{3.54}$$

où $\varrho^* = \varrho(t^*)$.

Cela étant, en répétant les raisonnements qui nous ont conduits à (3.47) (voir aussi (3.48)) on trouve un $T'' > t^*$ tel que

$$\|G(u_1) - G(u_2)\|^2_{F^*} \leq \frac{1}{2}\|u_1 - u_2\|^2_{F^*} \tag{3.55}$$

où la norme $\|\cdot\|_{F^*}$ est définie par (3.48) en remplaçant $(0, T')$ par (t^*, T'').

Or, comme $u_1 - u_2 = G(u_1) - G(u_2)$, (3.55) peut être vérifiée seulement si

$$u_1 - u_2 = 0 \quad pp \text{ dans } \mathbb{R}^3 \times [t^*, T''],$$

ce qui contredit la définition (3.52) de t^*.

Le lemme est complètement démontré. ■

4. Inégalités s'obtenant des produits scalaires des équations avec des fonctions convenables.

Dans ce paragraphe, nous allons établir l'égalité (4.2) et les inégalités (4.3)-(4.6). Ces inégalités seront obtenues sous l'hypothèse

$$\|\nabla\sigma\|_{L^\infty(0,\infty;L^3)} \leq \delta_0, \tag{4.1}$$

où δ_0 est un nombre positif donné. On verra dans le paragraphe suivant que l'hypothèse (4.1) est vérifiée sous les hypothèses du théorème 5.1.

On a la

Proposition 4.1. *Si (u, σ) est la solution du système d'équations (1.1)-(1.3) appartenant à la classe*

$$\begin{cases} u \in L^\infty(0, T; Y_{\varrho_0}) \cap L^2(0, T; X_{\varrho_0}), \\ \sigma \in L^\infty(0, T; H^2) \end{cases}$$

(*avec un certain* $T > 0$) *et si* (4.1) *est vérifiée, alors on a*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\sqrt{\varrho}\,u\|_{L^2}^2 + \int\limits_{\mathbf{R}^3} \varrho_{\text{eq}}(\sigma e^{\sigma} - e^{\sigma} + 1)\right) + \|\nabla_A u\|_{L^2}^2 = 0\,, \tag{4.2}$$

$$\frac{d}{dt}\|\nabla_A u\|_{L^2}^2 + \left\|\frac{1}{\sqrt{\varrho}}Au\right\|_{L^2}^2 \leqslant \varepsilon\|\sqrt{\varrho}\,\Delta\sigma\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\varepsilon}c_1(\exp\|\sigma\|_{L^\infty})\|\nabla_A u\|_{L^2}^2 + \tag{4.3}$$

$$+c_2(\exp(\|\sigma\|_{L^\infty}))\left\|\frac{1}{\sqrt{\varrho}}Au\right\|_{L^2}\|\nabla_A u\|_{L^2}\left(\|\nabla_A u\|_{L^2} + \left\|\frac{1}{\sqrt{\varrho}}Au\right\|_{L^2}\right), \quad \forall\varepsilon > 0\,,$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\nabla\sigma\|_{L^2}^2 + \frac{2}{\mu+\lambda}\int\limits_{\mathbf{R}^3}\varrho u\cdot\nabla\sigma\right) + \frac{1}{2(\mu+\lambda)}\|\sqrt{\varrho}\,\nabla\sigma\|_{L^2}^2 \leqslant \tag{4.4}$$

$$\leqslant c_3\left(\exp\frac{3}{2}\|\sigma\|_{L^\infty}\right)\left(\left\|\frac{1}{\sqrt{\varrho}}Au\right\|_{L^2} + \left\|\nabla_A\left(\frac{1}{\varrho}Au\right)\right\|_{L^2}\right)\|\sqrt{\varrho}\,\nabla\sigma\|_{L^2}\|\nabla\sigma\|_{L^2} +$$

$$+c_4(\exp\|\sigma\|_{L^\infty})\|\nabla_A u\|_{L^2}^2\,,$$

$$\frac{d}{dt}\left\|\frac{1}{\sqrt{\varrho}}Au\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla_A\left(\frac{1}{\varrho}Au\right)\right\|_{L^2}^2 \leqslant c_5(\exp\|\sigma\|_{L^\infty})\|\sqrt{\varrho}\,\Delta\sigma\|_{L^2}^2 + \tag{4.5}$$

$$+c_6(\exp\|\sigma\|_{L^\infty})\left\|\nabla_A\left(\frac{1}{\varrho}Au\right)\right\|_{L^2}\left\|\frac{1}{\sqrt{\varrho}}Au\right\|_{L^2}\left(\|\nabla_A u\|_{L^2} + \left\|\frac{1}{\sqrt{\varrho}}Au\right\|_{L^2}\right),$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\Delta\sigma\|_{L^2}^2 + \frac{2}{\mu+\lambda}\int\limits_{\mathbf{R}^3}\varrho(\nabla\cdot u)\Delta\sigma\right) + \frac{1}{2(\mu+\lambda)}\|\sqrt{\varrho}\,\Delta\sigma\|_{L^2}^2 \leqslant \tag{4.6}$$

$$\leqslant c_7\left(\exp\frac{3}{2}\|\sigma\|_{L^\infty}\right)\left(\left\|\frac{1}{\sqrt{\varrho}}Au\right\|_{L^2} + \left\|\nabla_A\left(\frac{1}{\varrho}Au\right)\right\|_{L^2}\right)\|\sqrt{\varrho}\,\Delta\sigma\|_{L^2}\|\Delta\sigma\|_{L^2} +$$

$$+c_8(\exp 2\|\sigma\|_{L^\infty})\left(\|\nabla_A u\|_{L^2}^2 + \left\|\frac{1}{\sqrt{\varrho}}Au\right\|_{L^2}^2 + \right)\|\Delta\sigma\|_{L^2} +$$

$$+c_9(\exp 2\|\sigma\|_{L^\infty})\left(\|\nabla_A u\|_{L^2}^2 + \left\|\frac{1}{\sqrt{\varrho}}Au\right\|_{L^2}^2\right),$$

où $c_i(i, \ldots, 9)$ *sont des constantes qui ne dépendent que de* μ, λ *et* Φ, *tandis que le nombre positif* ε *figurant dans* (4.3) *sera déterminé convenablement dans la suite* (*voir* (5.10)-(5.12)).

DÉMONSTRATION. Nous la décomposerons en cinq parties correspondantes à la démonstration de l'égalité (4.2) et des inégalités (4.3)-(4.6). Pour la démonstration de celles-ci, nous convenons d'indiquer par $\langle (1.1), \cdot \rangle$, $\langle \nabla (1.2), \cdot \rangle$ ou $\langle \Delta (1.2), \cdot \rangle$ le produit scalaire dont le premier facteur est l'équation (1.1) ou (1.2), à laquelle est éventuellement appliqué l'opérateur ∇ ou Δ.

Dans la suite, c désignera des constantes qui ne dépendent ni de u ni de σ. On utilisera constamment l'immersion de Sobolev sans toutefois la citer dans chaque dérivation d'inégalité où elle sera appliquée.

DÉMONSTRATION DE (4.2). L'égalité (4.2) s'obtient du produit scalaire $\langle (1.1), \varrho u \rangle$. En effet, ce dernier n'est autre que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\sqrt{\varrho}\, u\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^3} (\partial_t \varrho)\,|u|^2 + \|\nabla_A u\|_{L^2}^2 + \\ + \int_{\mathbf{R}^3} \varrho u \cdot ((u\cdot\nabla)u) + \int_{\mathbf{R}^3} \varrho u \cdot \nabla\sigma = 0\,. \tag{4.7}$$

En vertu de (1.2)bis, on a

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^3} (\partial_t \varrho)|u|^2 = -\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^3} (\nabla\cdot(\varrho u))|u|^2 = \int_{\mathbf{R}^3} \varrho u \cdot ((u\cdot\nabla)u)\,,$$

$$\int_{\mathbf{R}^3} \varrho u\cdot\nabla\sigma = \int_{\mathbf{R}^3} (\partial_t\varrho)\,\sigma = \frac{d}{dt}\int_{\mathbf{R}^3} \varrho_{\mathrm{eq}}(\sigma e^{\sigma} - e^{\sigma} + 1)\,.$$

Donc, de (4.7) découle immédiatement l'égalité (4.2). ■

DÉMONSTRATION DE (4.3). Le produit scalaire $\langle (1.1), -Au \rangle$ s'écrit

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla_A u\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{1}{\sqrt{\varrho}} Au \right\|_{L^2}^2 = I_1 + I_2 \tag{4.8}$$

avec

$$I_1 = -\int_{\mathbf{R}^3} (\nabla_A u)\cdot\nabla_A\nabla\sigma\,,$$

$$I_2 = \int_{\mathbf{R}^3} ((u\cdot\nabla)u)\cdot Au\,.$$

Il n'est pas difficile de voir que

$$|I_1| \leqslant \varepsilon \|\sqrt{\varrho}\,\Delta\sigma\|_{L^2}^2 + \frac{c}{\varepsilon}(\exp\|\sigma\|_{L^\infty})\|\nabla_A u\|_{L^2}^2 \qquad (\varepsilon > 0),$$

$$|I_2| \leqslant c(\exp\|\sigma\|_{L^\infty})\left\|\frac{1}{\sqrt{\varrho}}Au\right\|_{L^2}\|\nabla_A u\|_{L^2}\left(\|\nabla_A u\|_{L^2} + \left\|\frac{1}{\sqrt{\varrho}}Au\right\|_{L^2}\right).$$

Ces inégalités, jointes à (4.8), entraînent (4.3). ■

DÉMONSTRATION DE (4.4). Comme

$$\int_{\mathbf{R}^3}(\nabla(\nabla\cdot u))\cdot\nabla\sigma = -\frac{1}{\mu+\lambda}\int_{\mathbf{R}^3}(\nabla\cdot Au)\,\sigma = \frac{1}{\mu+\lambda}\int_{\mathbf{R}^3}(Au)\cdot\nabla\sigma,$$

à l'aide de l'équation (1.1), on a

$$\int_{\mathbf{R}^3}(\nabla(\nabla\cdot u))\cdot\nabla\sigma = \frac{1}{\mu+\lambda}\int_{\mathbf{R}^3}(\nabla\sigma)\cdot(\varrho\partial_t u + \varrho\nabla\sigma + \varrho(u\cdot\nabla)u).$$

La substitution de cette relation dans l'expression du produit scalaire $\langle\nabla(1.2), \nabla\sigma\rangle$ nous mène à

$$(4.9)\quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\nabla\sigma\|_{L^2} + \frac{2}{\mu+\lambda}\int_{\mathbf{R}^3}\varrho u\cdot\nabla\sigma\right) + \frac{1}{\mu+\lambda}\|\sqrt{\varrho}\,\nabla\sigma\|_{L^2}^2 = \sum_{i=1}^{7} I_i,$$

où

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^3}(\nabla\cdot u)\,|\nabla\sigma|^2,$$

$$I_2 = -\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\mathbf{R}^3}(\partial_{x_j}\sigma)(\partial_{x_i}u_j)\,\partial_{x_i}\sigma,$$

$$I_3 = \sum_{i,j=1}^{3}\int_{\mathbf{R}^3}(\partial_{x_j}\Phi)(\partial_{x_i}u_j)\,\partial_{x_i}\sigma,$$

$$I_4 = \sum_{i,j=1}^{3}\int_{\mathbf{R}^3}u_j(\partial_{x_i}\partial_{x_j}\Phi)\,\partial_{x_i}\sigma,$$

$$I_5 = \frac{1}{\mu + \lambda} \int_{\mathbf{R}^3} \varrho u \cdot (\nabla \sigma)\, \partial_t \sigma ,$$

$$I_6 = \frac{1}{\mu + \lambda} \int_{\mathbf{R}^3} \varrho (\partial_t \sigma)^2 ,$$

$$I_7 = - \frac{1}{\mu + \lambda} \int_{\mathbf{R}^3} \varrho ((u \cdot \nabla)\, u) \cdot \nabla \sigma ,$$

les termes I_5 et I_6 étant calculés compte tenu de (1.2)bis et de (1.3).

Or, on a

$$|I_1 + I_2| \leq c\left(\exp \frac{1}{2} \|\sigma\|_{L^\infty}\right) \|\nabla u\|_{L^\infty} \|\sqrt{\varrho}\, \nabla \sigma\|_{L^2} \|\nabla \sigma\|_{L^2} \leq$$

$$\leq c\left(\exp \frac{3}{2} \|\sigma\|_{L^\infty}\right)\left(\left\| \frac{1}{\sqrt{\varrho}} Au \right\|_{L^2} + \left\| \nabla_A \left(\frac{1}{\varrho} Au \right) \right\|_{L^2}\right) \|\sqrt{\varrho}\, \nabla \sigma\|_{L^2} \|\nabla \sigma\|_{L^2}$$

(pour la deuxième inégalité, rappeler l'inégalité qui précède (2.9)) D'autre part, compte tenu de (1.7)-(1.8) on établit aisément

$$|I_3 + I_4| \leq \frac{1}{2(\mu + \lambda)} \|\sqrt{\varrho}\, \nabla \sigma\|_{L^2}^2 + c(\exp \|\sigma\|_{L^\infty}) \|\nabla_A u\|_{L^2}^2 .$$

Finalement, à l'aide de l'inégalité

$$\|\partial_t \sigma\|_{L^2} \leq c \|\nabla_A u\|_{L^2} ,$$

conséquence immédiate de l'équation (1.2) et des conditions (1.8) et (4.1), on obtient aisément, à l'aide encore de (4.1), que

$$|I_5 + I_6 + I_7| \leq c(\exp \|\sigma\|_{L^\infty}) \|\nabla_A u\|_{L^2}^2 .$$

En adjoignant les inégalités relatives aux termes $I_i (i = 1, \ldots, 7)$ à (4.9), on obtient (4.4). ■

DÉMONSTRATION DE (4.5). On considère le produit scalaire $\langle (1.1), A((1/\varrho) Au) \rangle$. Il s'écrit

$$\text{(4.10)} \qquad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \frac{1}{\sqrt{\varrho}} Au \right\|_{L^2}^2 + \left\| \nabla_A \left(\frac{1}{\varrho} Au \right) \right\|_{L^2}^2 = \sum_{i=1}^{3} I_i$$

avec

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla_A \left(\frac{1}{\varrho} Au \right) \cdot \nabla_A \nabla \sigma \,,$$

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla_A \left(\frac{1}{\varrho} Au \right) \cdot \nabla_A ((u \cdot \nabla) u) \,,$$

$$I_3 = - \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} u_i \left(\partial_{x_i} \left(\frac{1}{\varrho} (Au)_j \right) \right) \cdot (Au)_j \,,$$

$(Au)_j$ étant la $j^{\text{ème}}$ composante du vecteur $Au \in \mathbb{R}^3$ (I_3 a été calculé compte tenu de (1.2)bis)

On a évidemment

$$|I_1| \leq \frac{1}{2} \left\| \nabla_A \left(\frac{1}{\varrho} Au \right) \right\|_{L^2}^2 + c(\exp \|\sigma\|_{L^\infty}) \|\sqrt{\varrho}\, \Delta \sigma\|_{L^2}^2 \,,$$

$$|I_2 + I_3| \leq c(\exp \|\sigma\|_{L^\infty}) \left\| \nabla_A \left(\frac{1}{\varrho} Au \right) \right\|_{L^2} \left\| \frac{1}{\sqrt{\varrho}} Au \right\|_{L^2} \cdot$$

$$\cdot \left(\|\nabla_A u\|_{L^2} + \left\| \frac{1}{\sqrt{\varrho}} Au \right\|_{L^2} \right).$$

Ces estimations, jointes à (4.10), entraînent (4.5). ■

DÉMONSTRATION DE (4.6). On a

$$\Delta(\nabla \cdot u) = \frac{1}{\mu + \lambda} \nabla \cdot (Au) = \frac{1}{\mu + \lambda} (\nabla \sigma - \nabla \Phi) \cdot Au + \frac{1}{\mu + \lambda} \varrho \nabla \cdot \left(\frac{1}{\varrho} Au \right) =$$

$$= \frac{1}{\mu + \lambda} (\nabla \sigma - \nabla \Phi) \cdot Au + \frac{1}{\mu + \lambda} \varrho \nabla \cdot (\partial_t u + \nabla \sigma + (u \cdot \nabla) u) \,,$$

où la dernière égalité est due à (1.1). A l'aide de cette égalité on peut exprimer le produit scalaire $\langle \Delta(1.2), \Delta\sigma \rangle$ sous la forme

$$(4.11) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\Delta \sigma\|_{L^2}^2 + \frac{2}{\mu + \lambda} \int_{\mathbb{R}^3} \varrho (\nabla \cdot u) \Delta \sigma \right) + \frac{1}{\mu + \lambda} \|\sqrt{\varrho}\, \Delta \sigma\|_{L^2}^2 = \sum_{i=1}^{11} I_i$$

avec

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^3} (\nabla\cdot u)\,|\Delta\sigma|^2\,,$$

$$I_2 = -2\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\mathbf{R}^3} (\partial_{x_i}u_j)(\partial_{x_i}\partial_{x_j}\sigma)\,\Delta\sigma\,,$$

$$I_3 = -\int_{\mathbf{R}^3} (\Delta u)\cdot(\nabla\sigma)\,\Delta\sigma\,,$$

$$I_4 = \int_{\mathbf{R}^3} (\Delta u)\cdot(\nabla\Phi)\,\Delta\sigma\,,$$

$$I_5 = 2\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\mathbf{R}^3} (\partial_{x_i}u_j)(\partial_{x_i}\partial_{x_j}\Phi)\,\Delta\sigma\,,$$

$$I_6 = \int_{\mathbf{R}^3} u\cdot(\nabla(\Delta\Phi))\,\Delta\sigma\,,$$

$$I_7 = -\frac{1}{\mu+\lambda}\int_{\mathbf{R}^3} \varrho(\nabla\sigma - \nabla\Phi)\cdot(\partial_t\nabla\sigma)\,\nabla\cdot u\,,$$

$$I_8 = -\frac{1}{\mu+\lambda}\int_{\mathbf{R}^3} \varrho(\nabla(\nabla\cdot u))\cdot(\partial_t\nabla\sigma)\,,$$

$$I_9 = -\frac{1}{\mu+\lambda}\int_{\mathbf{R}^3} \varrho(\partial_t\sigma)(\nabla\cdot u)\,\Delta\sigma\,,$$

$$I_{10} = -\frac{1}{\mu+\lambda}\int_{\mathbf{R}^3} \sqrt{\varrho}\,(\nabla\sigma - \nabla\Phi)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{\varrho}}\,Au\right)\Delta\sigma\,,$$

$$I_{11} = -\frac{1}{\mu+\lambda}\int_{\mathbf{R}^3} \varrho(\nabla\cdot((u\cdot\nabla)\,u))\,\Delta\sigma\,.$$

On a

$$|I_1 + I_2| \leqslant c\left(\exp \frac{1}{2} \|\sigma\|_{L^\infty}\right) \|\nabla u\|_{L^\infty} \|\sqrt{\varrho}\, \Delta\sigma\|_{L^2} \|\Delta\sigma\|_{L^2} \leqslant$$

$$\leqslant c\left(\exp \frac{3}{2} \|\sigma\|_{L^\infty}\right)\left(\left\| \frac{1}{\sqrt{\varrho}} Au \right\|_{L^2} + \left\| \nabla_A \left(\frac{1}{\varrho} Au\right)\right\|_{L^2}\right) \|\sqrt{\varrho}\, \Delta\sigma\|_{L^2} \|\Delta\sigma\|_{L^2}$$

(voir la démonstration de (4.4)). En outre, puisque

$$|I_3| \leqslant c\left(\exp \frac{1}{2} \|\sigma\|_{L^\infty}\right) \|\Delta u\|_{L^3} \|\sqrt{\varrho}\, \Delta\sigma\|_{L^2} \|\Delta\sigma\|_{L^2},$$

on voit aisément que le terme I_3 s'estime de la même manière que $I_1 + I_2$.

Il est, d'autre part, facile d'estimer les termes I_4, I_5 et I_6, de sorte qu'en vertu de (1.7)-(1.8) on a

$$|I_4 + I_5 + I_6| \leqslant \frac{1}{4(\mu + \lambda)} \|\sqrt{\varrho}\, \Delta\sigma\|_{L^2}^2 +$$

$$+ c(\exp 2\|\sigma\|_{L^\infty}) \left\| \frac{1}{\sqrt{\varrho}} Au \right\|_{L^2}^2 + c(\exp \|\sigma\|_{L^\infty}) \|\nabla_A u\|_{L^2}^2 .$$

Par ailleurs, compte tenu de (4.1), on a évidemment

$$|I_7 + I_8| \leqslant c(\exp \|\sigma\|_{L^\infty}) \|Au\|_{L^2} \|\partial_t \nabla\sigma\|_{L^2} .$$

Or, si on applique l'opérateur ∇ à l'équation (1.2), on obtient

$$\|\partial_t \nabla\sigma\|_{L^2} \leqslant c(\|Au\|_{L^2} + \|\nabla_A u\|_{L^2}) + c(\|\nabla_A u\|_{L^2} + \|Au\|_{L^2}) \|\Delta\sigma\|_{L^2} .$$

En outre, à l'aide de (4.1) on déduit de (1.2) que

$$\|\partial_t \sigma\|_{L^3} \leqslant c(\|\nabla_A u\|_{L^2} + \|Au\|_{L^2}) .$$

Il en résulte que

$$|I_7 + I_8 + I_9| \leqslant c(\exp 2\|\sigma\|_{L^\infty})\left(\|\nabla_A u\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{1}{\sqrt{\varrho}} Au \right\|_{L^2}^2\right) +$$

$$+ c(\exp 2\|\sigma\|_{L^\infty})\left(\|\nabla_A u\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{1}{\sqrt{\varrho}} Au \right\|_{L^2}^2\right) \|\Delta\sigma\|_{L^2} .$$

Quant à I_{10}, on a évidemment

$$|I_{10}| \leq \frac{1}{4(\mu+\lambda)} \|\sqrt{\varrho}\,\Delta\sigma\|_{L^2}^2 + c\left\|\frac{1}{\sqrt{\varrho}}Au\right\|_{L^2}^2 +$$

$$+ c\left(\exp\frac{1}{2}\|\sigma\|_{L^\infty}\right)\left(\left\|\frac{1}{\sqrt{\varrho}}Au\right\|_{L^2} + \left\|\nabla_A\left(\frac{1}{\varrho}Au\right)\right\|_{L^2}\right)\|\sqrt{\varrho}\,\Delta\sigma\|_{L^2}\|\Delta\sigma\|_{L^2}.$$

Finalement, on a

$$|I_{11}| \leq c(\exp 2\|\sigma\|_{L^\infty})\left\|\frac{1}{\sqrt{\varrho}}Au\right\|_{L^2}\left(\|\nabla_A u\|_{L^2} + \left\|\frac{1}{\sqrt{\varrho}}Au\right\|_{L^2}\right)\|\Delta\sigma\|_{L^2}.$$

En adjoignant ces estimations à (4.11), on obtient (4.6). ■

5. Solution globale.

THÉORÈME 5.1. *On suppose que Φ satisfait aux conditions* (1.7)-(1.8) *et que les normes $\|u_0\|_{H^2}$ et $\|\sigma_0\|_{H^2}$ sont suffisamment petites. Alors les équations* (1.1)-(1.3) *admettent, dans l'intervalle de temps* $[0, \infty[$, *une solution* (u, σ) *et une seule dans la classe*

$$u \in L^\infty(0, \infty; H^2), \qquad \nabla u \in L^2(0, \infty; H^2), \tag{5.1}$$

$$\sigma \in L^\infty(0, \infty; H^2), \qquad \nabla\sigma \in L^2(0, \infty; H^1). \tag{5.2}$$

DÉMONSTRATION. Le théorème (5.1) résultera du théorème 3.1 et de la remarque 3.1, si nous démontrons une estimation *a priori* selon laquelle les normes $\|u(t)\|_{H^2}$ et $\|\sigma(t)\|_{H^2}$ restent uniformément bornées pour tout $t \in [0, \infty[$. En effet, si $\|u(t)\|_{H^2} + \|\sigma(t)\|_{H^2} \leq M$ avec un certain nombre $M < \infty$, alors d'après le théorème 3.1 et la remarque 3.1, (u,σ) peut être prolongée dans l'intervalle $[t, t+T']$ avec $T' \geq \vartheta(M) > 0$ (voir la remarque 3.1), ce qui nous permet de prolonger (u, σ) dans tout $[0, \infty[$.

A cette fin, on pose

$$\mathcal{D}(t) = \|\nabla_A u\|_{L^2}^2 + \left\|\frac{1}{\sqrt{\varrho}}Au\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla_A\left(\frac{1}{\varrho}Au\right)\right\|_{L^2}^2 + \tag{5.3}$$

$$+ \frac{1}{2(\mu+\lambda)}\|\sqrt{\varrho}\,\nabla\sigma\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4(\mu+\lambda)}\|\sqrt{\varrho}\,\Delta\sigma\|_{L^2}^2,$$

$$(5.4)\qquad \mathcal{L}(t) = \frac{1}{2} K_1 \|\sqrt{\varrho}\, u\|_{L^2}^2 + K_2 \|\nabla_A u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} K_3 \|\nabla \sigma\|_{L^2}^2 +$$

$$+ K_4 \left\| \frac{1}{\sqrt{\varrho}} Au \right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} K_5 \|\Delta \sigma\|_{L^2}^2 + K_1 I_1 + \frac{1}{\mu + \lambda} K_2 I_2 + \frac{1}{\mu + \lambda} K_5 I_3 ,$$

où

$$(5.5)\qquad \begin{cases} I_1 = \displaystyle\int_{\mathbf{R}^3} \varrho_{\mathrm{eq}} (\sigma e^\sigma - e^\sigma + 1), \\ I_2 = \displaystyle\int_{\mathbf{R}^3} \varrho u \cdot \nabla \sigma , \\ I_3 = \displaystyle\int_{\mathbf{R}^3} \varrho (\nabla \cdot u) \Delta \sigma , \end{cases}$$

tandis que $K_i\,(i = 1, \ldots, 5)$ sont des constantes à déterminer convenablement (elles seront définies par (5.9)-(5.13)).

Nous voulons en effet choisir les constantes $K_i\,(i = 1, \ldots, 5)$ de sorte que, sous l'hypothèse (4.1) et l'hypothèse

$$(5.6)\qquad \|\sigma\|_{L^\infty(0,\, \infty;\, L^\infty)} \leqslant \delta_1$$

avec une constante positive δ_1, on ait

$$(5.7)\qquad \mathcal{L}(t) \geqslant 0 ,$$

$$(5.8)\qquad \frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) + \mathcal{D}(t) \leqslant a \mathcal{D}(t) (\mathcal{L}(t)^{1/2} + \mathcal{L}(t)) ,$$

avec une constante a, qui est déterminée une fois que δ_0 et δ_1 le sont.

Nous proposons de déterminer les constantes $K_i\,(i = 1, \ldots, 5)$ et le nombre ε figurant dans (4.3) par les relations suivantes

$$(5.9)\qquad K_3 = K_4 = 1 ,$$

$$(5.10)\qquad K_5 = 1 + 4(\mu + \lambda) c_5 \exp \delta_1 ,$$

$$(5.11)\qquad K_2 = 1 + c_{11} + c_9 K_5 \exp 2\delta_1 ,$$

$$(5.12)\qquad \varepsilon = \frac{1}{4 K_2 (\mu + \lambda)} K_5 ,$$

$$(5.13)\qquad K_1 = 1 + \max(c_{10},\, c_{12}) ,$$

où c_{10} et c_{11} seront définies par (5.15)-(5.16), tandis que c_{12} est définie par

$$c_{12} = \frac{1}{\varepsilon} c_1 K_2 \exp \delta_1 + c_4 \exp \delta_1 + c_9 K_5 \exp 2\delta_1 .$$

Pour montrer (5.7), on remarque d'abord que

$$\frac{1}{2} M_1 \|\sigma\|_{L^2}^2 \leqslant I_1 , \tag{5.14}$$

ce qui résulte de la relation

$$\frac{1}{2} s^2 \leqslant se^s - e^s + 1 \qquad \forall s \geqslant 0$$

(voir aussi (1.9)). Par ailleurs, grâce à l'hypothèse (5.6), il existe deux constantes c_{10} et c_{11} (dépendantes de δ_1) telles que

$$|I_2| \leqslant \frac{1}{4} (\mu + \lambda) \|\nabla \sigma\|_{L^2}^2 + c_{10} \|\sqrt{\varrho}\, u\|_{L^2}^2 , \tag{5.15}$$

$$|I_3| \leqslant \frac{1}{4} (\mu + \lambda) \|\varDelta \sigma\|_{L^2}^2 + c_{11} \|\nabla_A u\|_{L^2}^2 . \tag{5.16}$$

On voit aisément que les inégalités (5.14)-(5.16) et la définition de $\mathscr{L}(t)$ (voir (5.4)-(5.5), (5.9)-(5.13)) entraînent (5.7).

D'autre part, si on substitue l'expression (5.12) de ε dans (4.3) et si on somme l'égalité (4.2) et les inégalités (4.3)-(4.6) multipliées par les constantes $K_1 (i = 1, \dots, 5)$ données par (5.9)-(5.13), alors on obtient immédiatement l'inégalité (5.8).

Or, on voit aisément que les inégalités (5.14)-(5.16), l'hypothèse (5.6) et la définition de $\mathscr{L}(t)$ (voir (5.4)-(5.5), (5.9)-(5.13)) impliquent qu'il existe une constante γ_0 telle que

$$\|u(t)\|_{H^2}^2 + \|\sigma(t)\|_{H^2}^2 \leqslant \gamma_0 \mathscr{L}(t) . \tag{5.17}$$

On a donc en particulier

$$\begin{cases} \|\nabla \sigma(t)\|_{L^3}^2 \leqslant \gamma_1 \mathscr{L}(t) \\ \|\sigma(t)\|_{L^\infty}^2 \leqslant \gamma_2 \mathscr{L}(t) \end{cases} \tag{5.18}$$

avec deux constantes γ_1 et γ_2.

On suppose maintenant que

$$\mathscr{L}(0) \leqslant \min\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2} (1 - \sqrt{1 + 4/\alpha}), (1/\gamma_1) \delta_0^2, (1/\gamma_2) \delta_1^2 \right) . \tag{5.19}$$

Alors, comme on a

$$\alpha(s+\sqrt{s})<1$$

pour $0 \leq s < 1/\alpha + 1/2\,(1-\sqrt{1+4/\alpha})$ on déduit de (5.8) que

$$\mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0) \quad \forall t>0\,. \tag{5.20}$$

En même temps il résulte des relations (5.18)-(5.20) que

$$\begin{cases} \|\nabla\sigma(t)\|_{L^3} \leq \delta_0\,, \\ \|\sigma(t)\|_{L^\infty} \leq \delta_1 \end{cases} \tag{5.21}$$

pour tout $t>0$, c'est-à-dire que les hypothèses (4.1) et (5.6) sont vérifiées.

Donc, maintenant on peut dire que (5.19) entraîne (5.20) sans les hypothèses (4.1) et (5.6). Par conséquent, en vertu de (5.17), sous l'hypothèses (5.19) on obtient l'estimation *a priori*

$$\|u(t)\|_{H^2}^2 + \|\sigma(t)\|_{H^2}^2 \leq \gamma_0\mathcal{L}(0)$$

pour tout $t>0$, ce qui, d'après le théorème 3.1 (voir aussi la remarque 3.1), nous permet de prolonger la solution (u,σ) dans tout l'intervalle $[0,\infty[$.

Finalement, comme

$$1-\alpha(\mathcal{L}(t)+\mathcal{L}(t)^{1/2}) \geq 1-\alpha(\mathcal{L}(0)+\mathcal{L}(0)^{1/2})>0$$

pour tout $t>0$ (voir (5.19)-(5.20)), (5.7)-(5.8) entraînent que

$$\mathcal{D}(\cdot)\in L^1(0,\infty)\,.$$

Comme

$$\|\nabla u(t)\|_{H^2}^2 + \|\nabla\sigma\|_{L^2}^2 + \|\Delta\sigma\|_{L^2}^2 \leq c\mathcal{D}(t)$$

avec une constante c (voir (5.3)), on voit aisément que u, σ appartienent à la classe donnée par (5.1)-(5.2).

L'unicité de la solution résulte du théorème 3.1, ce qui achève la démonstration du théorème 5.1. ■

Bibliographie

[BF] R. Benabidallah - H. Fujita Yashima, *Solution locale pour l'équation d'un gaz visqueux isotherme*, Rend. Accad. Naz. Sci XL, Mem. Mat., 17 (1993), pp. 49-81.

[B] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle - Théorie et application*, Masson, Paris (1987).

[K] A. I. Košelev, *Estimations* a priori *dans L^p et solutions généralisées des équations et systèmes elliptiques* (en russe), Uspekhi Mat. Nauk, **13** (1958), pp. 29-89.

[LSU] O. A. Ladyzhenskaya - V. A. Solonnikov - N. N. Ural'tseva, *Linear and Quasilinear Equation of Parabolique Type*, Providence (1968).

[L] J. L. Lions, *Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites*, Gauthier-Villars, Paris (1957).

[MN1] A. Matsumura - T. Nishida, *The initiale value problem for the equation of a motion viscous and heat-conducting gases*, J. Math. Kyoto Univ., **20** (1980), pp. 67-104.

[MN2] A. Matsumura - T. Nishida, *Initial boundary value problems for the equations of motion of compressible viscous and heat-conducting fluids*, Comm. Math. Phys., **89** (1983), pp. 445-464.

[MP] A. Matsumura - M. Padula, *Stability of stationary flows of compressible fluids subject to large external potentiel forces*, Preprint Univ. Ferrara (1992).

Manoscritto pervenuto in redazione il 5 settembre 1994.