RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

WALTER STREB

Über einige Ringklassen

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 84 (1990), p. 39-60

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1990__84__39_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 84 (1990)

Über einige Ringklassen.

WALTER STREB (*)

Einleitung.

Wir geben zunächst einen Überblick über die Ergebnisse in den Abschnitten I-VII dieser Note, wobei gleichzeitig die benötigten Notationen und Definitionen eingeführt werden.

NOTATIONEN. Sei K eine Klasse von Ringen R. Wir definieren Teilmengen $U(R)$, $H(R)$ und $UH(R)$ von K wie folgt:

$$T \in U(R) \quad :\Leftrightarrow T \in K \text{ und } T \text{ Unterring von } R;$$

$$T \in H(R) \quad :\Leftrightarrow T \in K \text{ und } T \text{ homomorphes Bild von } R;$$

$$T \in UH(R) :\Leftrightarrow T \in K \text{ und es existiert } S \in U(R), \text{ so daß } T \in H(S).$$

Ein Ziel der Untersuchungen ist es zu einer vorgegebenen Klasse K von Ringen eine möglichst «einfache» Teilklasse K_{UH} zu konstruieren, so daß gilt: Zu $R \in K$ existiert stets $T \in K_{UH} \cap UH(R)$. Neben interessanten Einblicken in die Struktur von Ringklassen ermöglicht dieser Ansatz Anwendungen der folgenden Art: Gegeben sei eine Eigenschaft E, definiert für alle $R \in K$ (d.h. $E(R) \in \{w, f\}$, $w =$ wahr, $f =$ falsch), wobei gilt: Mit $E(R) = w$ und $T \in UH(R)$ ist $E(T) = w$. Dann gilt folgende Metaaussage: Mit $E(T) = f$ für alle $T \in K_{UH}$ ist $E(R) = f$ für alle $R \in K$. Bei Anwendung auf die Klasse K der nichtkommutativen Ringe erhält man Kommutativitätssätze vgl. [10] und [11]. Zahlreiche Problemstellungen, welche von I. N. Herstein u.a. untersucht wurden, gestatten eine analoge Bearbeitung.

(*) Indirizzo dell'A.: Fachbereich 6, Matematik Universität Essen, GHS, Universitätstraße 2, Essen, 1-4200, B.R.D.

In dieser Note bestimmen with K_{UH}

I) für die Klasse der nichtantikommutativen Ringe;

II) für sechs in der Literatur häufig auftretende Ringklassen K.

Notationen. Stets sei F Körper oder $\mathbb{Z}$ (Ring der ganzen Zahlen), R F-Algebra, $F\{x_1, \ldots, x_n\}$ Polynomring in den nichtvertauschbaren Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$. Für $f \in F\{x_1, \ldots, x_n\}$ und $A \subseteq R$ notieren wir $f \in PI(A)$ gleichwertig $f(A) = 0 :\Leftrightarrow$ Bei allen formalen Substitutionen $a_i \to x_i$, $a_i \in A$, $1 \leqslant i \leqslant n$ gilt $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$. Sei weiterhin

$$F_n\{x_1, \ldots, x_n\} := \{f \in F\{x_1, \ldots, x_n\} \colon f \ n\text{-fach linear}\} ;$$

$$PI_n(R) := F_n\{x_1, \ldots, x_n\} \cap PI(R) .$$

Sei $\mathbb{P}$ die Menge aller Primzahlen und F_p, $p \in \mathbb{P}$ der Primkörper mit p Elementen. Für $n \in \mathbb{N}$ (Menge der natürlichen Zahlen) sei $\mathbb{P}(n) := \{p \in \mathbb{P} \colon p \mid n\}$.

Sei K_{char} die Klasse aller Ringe R, so daß R torsionsfrei (wir setzen $\operatorname{char} R = 0$ und $F(R) = \mathbb{Z}$) oder $pR = 0$ mit $p \in \mathbb{P}$ (wir setzen $\operatorname{char} R = p$ und $F(R) = F_p$).

III) Sei $R \in K_{\text{char}}$ mit $1 \in R$, $F = F(R)$ und $PI_{n-1}(R) = 0$, $1 < n \in \mathbb{Z}$. Wir zeigen, daß gewisse Invarianzbedingungen an $PI_i(R)$ für $i = n$ bzw. $i \in \{n, n+1\}$ hinreichend dafür sind, daß $PI_n(R)$ genau gewisse Standardformen enthält bzw. R kommutativ ist.

Notationen. Für $a, b \in R$ und $A, B \subseteq R$ sei

$$[a, b] := ab - ba , \qquad [A, B] := \{[a, b] \colon a \in A, \ b \in B\} ,$$

$$a \circ b := ab + ba , \qquad A \circ B := \{a \circ b \colon a \in A, \ b \in B\} .$$

Sei R' bzw. R^0 das von $[R, R]$ bzw. $R \circ R$ erzeugte Ideal von R und R_{nil} bzw. R_{reg} die Menge aller nilpotenten bzw. regulären Elemente von R.

Für $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{P}$ sei $K_{\mathbb{Q}}$ die Klasse der $\mathbb{Q}$-torsionsfreien Ringe (für $p \in \mathbb{Q}$ und $0 \neq r \in R'$ gilt $pr \neq 0$).

$f \in F\{x, y\}$ heiße homogen vom x-Gard m und y-Grad $n :\Leftrightarrow$

$$f(ix, jy) = i^m j^n f(x, y) \qquad \text{für alle } i, j \in \mathbb{Z} .$$

Jedes $f \in F\{x, y\}$ besitzt eine eindeutige Darstellung $f = \sum f_{i,j}$, wobei $f_{i,j} \in F\{x, y\}$ homogen vom x-Grad i und y-Grad j. Sei ν: $F\{x, y\} \to \to F[x, y]$ der kanonische F-Algebramorphismus.

IV) Sei $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{P}$, $R \in K_{\mathbb{Q}}$, $1 \in R$. Sei weiterhin $f \in \mathbb{Z}\{x, y\}$ homogen, wobei gilt: Für $T \in K_{\mathbb{Q}}$ mit $f(T) = 0$ ist $T' = 0$. Sei schließlich X Ideal von R mit $X \neq R$ oder $X = R_{\text{nil}}$ und $f(R \setminus X) = 0$. Wir zeigen zunächst einen Struktursatz und dann unter Zusatzbedingungen $R' = 0$.

Ein bekannter und vielfach variierter Satz von I. N. Herstein besagt: $R' = 0$, falls gilt:

(*) Zu $a \in R$ existiert stets $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, so daß $a - a^2 f(a) \in Z(R)$ (Zentrum von R).

Wir bearbeiten Verallgemeinerungen dieses Satzes, welche in einem gewissen Sinne optimal sind.

V) Für $a \in R$ geben wir allgemeine hinreichende Bedingungen E dafür an, daß $a \in Z(R)$. Man kann dann $Z(R)$ bei (*) ersetzen durch $X \subseteq R$, wobei jedes $a \in X$ Bedingung E erfüllt.

Notationen. Sei $\langle ... \rangle$ bzw. $(...)$ der bzw. das von ... erzeugte Unterring bzw. Ideal von R. Sei $G \subseteq F\{x, y\}$ und R F-Algebra.

R heiße G-Ring $:\Leftrightarrow$ Zu $a, b \in R$ existiert stets $f_{a,b} \in G$, so daß $f(a, b) = 0$.

Sei zusätzlich $\nu(G) = 0$ und $f = \sum\limits_{3 \leqslant i+j} f_{i,j}$ für alle $f \in G$.

R heiße α-G-Ring $:\Leftrightarrow$ Zu $a, b \in R$ existiert stets $f_{a,b} \in G$, so daß $[a, b] = f_{a,b}(a, b)$.

R heiße α-Ring $:\Leftrightarrow R$ $\alpha - \mathbb{Z}\{x, y\}$-Ring.

Seien stets R und T Ringe und D Schiefkörper ($D' \neq 0$).

VI) Falls $a, b \in R$ existieren, so daß $[a, b] \notin (\langle a, b \rangle')^2$, so existiert $T \in UH(R)$ mit $T' \neq 0 = (T')^2$ und damit $T \in UH(R)$ mit wohlbestimmten Eigenschaften [8]. Anderenfalls ist R α-Ring. Sei K die Klasse der α-Ringe. Wir zeigen: Für bekannte konkrete Schiefkörper D ($D' \neq 0$), insbesondere verschränkte Produkte und D mit $\exp D = 2$, gilt $D \notin K$. Die wichtige Frage, ob $D \notin K$ für alle Schiefkörper D gilt, ist schwer zu entscheiden. Unter Einschränkungen an $f_{a,b}$ erhalten wir weitere Strukturaussagen für Ringe.

VII) Mittels Matrizenarithmetik realisieren wir optimale $G \subseteq \subseteq \mathbb{Z}\{x, y\}$ und $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{P}$, so daß $M_2(F_p)$ (Ring der 2-2-Matrizen über F_p) kein G-Ring für alle $p \notin \mathbf{Q}$. Für umfangreiche Klassen von G-Ringen $R \in K_{\mathbf{Q}}$ mit $J(R) = 0$ gilt dann $R' = 0$.

I. Klasse K der nichtantikommutativen Ringe.

Notationen. Sei $p \in \mathbf{P}$, $k \in \mathbf{N}$ und $X \subseteq R$,

$$t(R) := \{a \in R\colon \text{ es existiert } k \in \mathbf{N}, \text{ so daß } ka = 0\}\ ;$$

$$t_p(R) := \{a \in R\colon \text{ es existiert } k \in \mathbf{N}, \text{ so daß } p^k a = 0\}\ ;$$

$$R_k := \{a \in R\colon ka = 0\}\ , \qquad {}^2R := \{a^2 \in R\colon a \in R\}\ ;$$

$$\operatorname{ann}_R X := \{a \in R\colon aX = 0\}\ .$$

Bemerkung. $t(R)$ ist eindeutig direkte Summe von Ringen T mit $t_p(T) = T$, $p \in \mathbf{P}$.

Satz 1. Zu jedem $R \in K$ existiert $T \in UH(R)$ mit $(1 \vee \ldots \vee 7)$:

(1) $T = F_p\,,\ 2 \neq p \in \mathbf{P}$ oder $T = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

(2) $T = \mathbb{Z}a$ mit $p^k a = pa^2 = a^3 = 0\ ,\ a^2 = p^{k-1}a\ ,$
$2 \neq p \in \mathbf{P}\ ,\ 1 < k \in \mathbf{N}$.

(3) $T = F_p a \oplus F_p a^2$ mit $a^3 = 0\ ,\quad 2 \neq p \in \mathbf{P}$.

(4) $T = \langle a \rangle = T_{\text{nil}} = t_2(T)$ mit $4a^2 = 2a^3 = 0$.

(5) $T = \langle a, b \rangle = T_{\text{nil}} = t_2(T)$ mit $T' = 2({}^2T) = 0$.

(6) $T = \langle a, b \rangle = t_2(T)$ mit $2({}^2T) = 0\ ,\ T^0 \subseteq T'\ ,\ T'T = 0 = TT'$,
wobei $T_{\text{nil}} \circ T_{\text{nil}} = 0$ oder T nilpotent.

(7) $2T = 0$.

(Wegen $S' = S^0$ für alle $S \in UH(R)$ löst [8] das Problem).

Beweis. (A) Sei zunächst $2({}^2R) \neq 0$, $u \in R$ mit $2u^2 \neq 0$, I maximales Ideal von $\langle u \rangle$ mit $2u^2 \notin I$, $T = \langle u \rangle / I$, $a = u + I$ und $V =$

$= \operatorname{ann}_T T^0$. Dann ist

(*) T^0 kleinstes Ideal von T, $V = T$ oder $F := T/V$ Körper mit p^r Elementen, $p \in \mathbb{P}$, $r \in \mathbb{N}$ [5; Corollary 1, p. 255].

Für $V = T$ gilt $4a^3 = 0$. Anderenfalls sei o.E. $2F = 0$ wegen (1), also $4a^3 = 0$.

(i) Sei $\operatorname{ann}_T \{a\} = 0$. Dann gilt $4a = 0$ und $2a^i \neq 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Für

$$e := a^{p^r - 1} \quad \text{ist } e^2 - e \in V,$$

also $2(e^2 - e)a^2 = 0$, somit $2(e^2 - e) = 0$. Wiederholt man obiges Vorgehen für $a = e$, so erhält man zusätzlich $2(a^2 - a) = 0 = 4a$.

Wir zeigen: T ist endlich. O.E. sei $a^2 \neq a$. Wegen (*) und $2(a^2 - a) = 0$ existiert $f \in \mathbb{Z}[x]$ mit Koeffizienten aus $\{0, 1\}$, so daß $(a^2 - a)f(a)a = 2a^2 = 2a$. Mit $2T$ ist demnach auch T endlich.

Wegen $\operatorname{ann}_T \{a\} = 0$ existiert $1 < n \in \mathbb{N}$, so daß $a^n = a$. Somit ist $1 = a^{n-1} \in T$, also $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \in U(T)$, demnach (1).

(ii) Sei $\operatorname{ann}_T \{a\} \neq 0 = T_2$. Dann gilt $a^3 = 0$. Nach (*) ist $p2a^2 = 0$, also $pa^2 = 0$ mit $2 \neq p \in \mathbb{P}$. Wegen (3) sei o.E. $pa \neq 0$. Dann gilt $T^0 \subseteq (pa) = p\mathbb{Z}a$, also $2a^2 = pia$, $i \in \mathbb{Z}$, somit $0 = 2pa^2 = p^2 ia$. Mit der Bemerkung realisiert man $p^k a = 0 \neq p^{k-1} a$ mit [illegible] $\mathbb{N}$. Dann ist $(a^2) = (2a^2) \subseteq (p^{k-1}a) = p^{k-1}\mathbb{Z}a$, also $a^2 = p^{k-1} ia$ mit p [illegible]. Für $a := i^{-1} a$ gilt (2).

(iii) Sei $\operatorname{ann}_T \{a\} \neq 0 \neq T_2$. Dann gilt $4a^2 = 2a^3 = 0$.

Angenommen $a \notin T_{\mathrm{nil}}$. Für $2 < i \in \mathbb{N}$ ist wegen $2a^3 = 0$ die Definition $I_i := \{f \in F_2[x] : a^i f(a) = 0\}$ sinnvoll. Es existieren $2 < l \in \mathbb{N}$ und $g \in F_2[x]$, so daß $I_l = I_{l+1}$ und $2a^2 = a^l g(a)$, insbesondere $O = 2a^3 = a^{l+1} g(a)$. Somit gilt $g \in I_{l+1} \setminus I_l$, Widerspruch.

Für $4a \neq 0$ gilt $(2a^2) \subseteq (4a) = 4\mathbb{Z}a$. Also existiert $i \in \mathbb{Z}$, so daß $2a^2 = 4ia$. Somit gilt $0 = 4a^2 = 8ia$. Mit der Bemerkung realisiert man $t_2(T) = T$. Insgesamt gilt (4).

Im folgenden sei o.E. $2({}^2R) = 0$.

(B) Es existiere zunächst $T \in UH(R)$ mit $T' = 0 \neq T^0$. O.E. sei $R = T$. Seien $u, v \in R$ mit $u \circ v \neq 0$, I maximales Ideal von $\langle u, v \rangle$

mit $u \circ v \notin I$, $T = \langle u, v \rangle / I$, $a = u + I$, $b = v + I$. Es gilt

$$0 = 2(a + b)^2 - 2a^2 - 2b^2 = 2(a \circ b) = 4ab\ .$$

Sei $c \in \{a, b\}$. Angenommen $c \notin T_{\mathrm{nil}}$. Für $1 < i \in \mathrm{N}$ ist wegen $2c^i = 0$ die Definition $I_i := \{f \in F_2[x, y]\colon c^i f(a, b) = 0\}$ sinnvoll. Es existiert $1 < l \in \mathrm{N}$ und $g \in F_2[x, y]$, so daß $I_l = I_{l+1}$ und $a \circ b = a^l g(a, b)$, also $0 = 2a^2b = (a \circ b)a = a^{l+1}g(a, b)$. Somit gilt $g \in I_{l+1} \setminus I_l$, Widerspruch.

Für $4c \neq 0$ gilt $T^0 \subseteq (4c) = 4\mathbb{Z}c$, also $a \circ b = 4ic$ mit $i \in \mathbb{Z}$, somit $0 = 2a \circ b = 8ic$. Mit der Bemerkung realisiert man $t_2(T) = T$. Insgesamt gilt (5).

(C) Sei schließlich $T^0 \subseteq T'$ für alle $T \in UH(R)$. Wie bei (B) erhält man $T = \langle a, b \rangle$ mit kleinstem Ideal $T^0 = (a \circ b)$ und $2(a \circ b) = 0$, somit $2T^3 = 0 = 2T^0$. Wegen (7) sei o.E. T nicht prim, also $(T^0)^2 = 0$.

Sei zunächst $T^0 \subseteq Z(T)$ und $V := \mathrm{ann}_T\, T^0$. Wie bei ($A$) erhält man (∗). Angenommen $V \circ V = 0$. Für $V \circ T \neq 0$ bzw. $= 0$ wählt man $c \in T$ und $d \in V$ bzw. $d \in T$ mit $c \circ d \neq 0$. Dann gilt

$$0 = [(c^{p^r} - c), d]c^2 = p^r[c, d]c^{p^r+1} + [c, d]c^2 = [c, d]c^2\ ,$$

also $c \in V$, Widerspruch. Also ist $V \circ V \neq 0$. Mit $R = V$ beginnt man bei (C) und erhält (6) bis auf $t_2(T) = T$.

Wegen $T^0 \subseteq T' = [a, b]\mathbb{Z}$ existiert $0 \neq i \in \mathbb{Z}$, so daß $a \circ b = i[a, b]$, also $0 = 2a \circ b = 2i[a, b]$. Wegen T' endlich erfüllt T ACC für Ideale. Demnach existiert $k \in \mathrm{N}$, so daß $T_{2^k} = T_{2^{k+1}}$. Angenommen $2^kT \neq 0$. Dann existiert $t \in T$ mit $a \circ b = 2^k t$. Also gilt $0 = 2a \circ b = 2^{k+1}t$, somit $0 = 2^k t$, Widerspruch. Demnach gilt (6).

Für $T^0 \circ T \neq 0$ schließt man wie in [8] auf (7), indem man $'$ und $[\ ,\ ]$ durch $\circ$ ersetzt.

II. Spezielle Klassen K_i nichtkommutativer Ringe.

Notationen. Seien $J(R)$, $N(R)$ und $P(R)$ der Reihe nach das Jakobson-, Nil- und Prim-radikal von R. Seien $M_n(R)$ der Ring der n-n-Matrizen über R und $e_{i,j}$ die zugehörigen Matrizeneinheiten.

$$R_{pd} := \{a \in R\colon \text{es existieren } i \neq j \in \mathrm{N}, \text{ so daß } a^i = a^j\}\ ;$$

$$R_{ip} := \{e \in R\colon e^2 = e\}\ .$$

Die Ringklassen M_l, M_r, M, C, C_g werden in [8] definiert. Wir definieren Ringklassen K_i wir folgt:

$$R \in K_1 \quad :\Leftrightarrow \{[a, b]: a, b \in R\} \subseteq R_{pd} ;$$

$$R \in K_2 \quad \Leftrightarrow R_{pd} = R ;$$

$$R \in K_3 \quad :\Leftrightarrow R \text{ } \alpha\text{-Ring} ;$$

$$R \in K_4 \quad :\Leftrightarrow [R_{\text{nil}}, R_{\text{nil}}] = 0 ;$$

$$R \in K_5 \quad :\Leftrightarrow R_{ip} \setminus Z(R) \neq \emptyset ;$$

$$R \in K_6 \quad :\Leftrightarrow R' \nsubseteq R_{\text{nil}} ;$$

$$R \in K_{6,n} :\Leftrightarrow R \in K_6 \text{ und } R \text{ } n\text{-torsionsfrei} .$$

Bemerkung 1.

(1) Zu $R \in K_1$ existiert $T \in UH(R) \cap (M \cup C)$.

(2) Zu $R \in K_2$ existiert $T \in UH(R) \cap (M \cup C_g)$.

(3) Zu $R \in (K_2 \cap K_3) \cup (K_2 \cap K_4)$ existiert $T \in UH(R) \cap M$.

(4) Zu $R \in K_5$ existiert $T \in UH(R) \cap (M_l \cup M_r)$.

Beweis. (1) Für Schiefkörper R gilt $R' = 0$ [3; Theorem 3.1.3, p. 74]. Sei nun $R = R_{\text{reg}} = J(R)$. Angenommen es existieren $a, b \in R$ mit $c := [a, b] \neq 0$. Dann existiert $1 < n \in \mathbb{N}$, so daß $c^n = c$. Zu $d := c^{n-1}$ existiert $e \in R$, so daß $d + e = de$. Dann gilt $ce = cde = cd + ce = c + ce$, also $c = 0$, Widerspruch. Nach [8] gilt (1).

(2) Zu jedem $a \in R$ existiert $f_a(x) \in \mathbb{Z}[x]$, so daß $a - a^2 f_a(a) \in R_{\text{nil}}$ [1; p. 1]. Angenommen es existiert $T \in UH(R) \cap (C \setminus C_g)$. Dann ist $[T_{\text{nil}}, T_{\text{nil}}] = 0$, also T α-Ring, Widerspruch.

(3) Gilt nach (2) und [1; Lemma 2, p. 2].

(4) Sei $u = e \in R_{ip} \setminus Z(R)$. Dann existiert $a \in R$, so daß $v := ea - eae \neq 0$ oder $ae - eae \neq 0$. O.E. sei $v \neq 0$. Dann gilt $uv = v$, $vu = 0 = v^2$ und man verfolgt für $T = \langle u, v \rangle$ den Beweis von [8; Corollary (1)].

Bemerkung 2.

(1) Zu $R \in K_6$ existiert $T \in UH(R)$, so daß

(*) $T = M_2(F_p)$ oder T Schiefkörper oder T prim mit $J(T) = T$.

(2) Zu $R \in K_{6,n}$ existiert $T \in UH(R)$, so daß $\big((*)$ mit char $T \nmid n\big)$ oder char $T = 0$.

Beweis. (1) Sei zunächst $J(R)' \not\subseteq R_{\text{nil}}$. O.E. sei $R = J(R)$. Wähle $a \in R' \setminus R_{\text{nil}}$, $X := \{a^i \colon i \in \mathbb{N}\}$ und I Ideal von R maximal mit $I \cap X = \emptyset$. Für $T = R/I$ gilt (*). Sei nun $R' \not\subseteq J(R)$. Über primitive Bilder von $R/J(R)$ realisiert man (*). Aus $R' \subseteq J(R)$ und $J(R) \subseteq \subseteq R_{\text{nil}}$ folgt $R' \subseteq R_{\text{nil}}$, Widerspruch.

(2) Sei $\mathbb{Q} = \mathbb{P}(n)$. Wegen (1) sei o.E. $t_p(R)' \subseteq R_{\text{nil}}$ für alle $p \notin \mathbb{Q}$, also auch $t(R)' = \bigoplus_{p \in \mathbb{P} \setminus \mathbb{Q}} t_p(R)' \subseteq R_{\text{nil}}$. Für $I := t(R)$ gilt

$$(R' \cap I)^5 \subseteq I(R' I^2) I \subseteq II' I \subseteq I' \subseteq R_{\text{nil}},$$

also $R' \cap I \subseteq R_{\text{nil}}$, somit $R' \not\subseteq I$. Für $T = R/I$ gilt somit $T' \not\subseteq T_{\text{nil}}$ und char $T = 0$.

III. Invarianz-Eigenschaften von Polynomidentitäten.

Notationen. Seien $\tau_{k,n}$, $0 < k < n$, bzw. $\sigma_{1,n}$ Abbildungen

$$F_n\{x_1, \dots, x_n\} \to F_r{}^{(} \quad , \dots, x_n\}$$

definiert als lineare Ausdehnung der Zuordnung

$$x_{i_1} \dots x_{i_k} x_{i_{k+1}} \dots x_{i_n} \to x_{i_1} \dots x_{i_{k+1}} x_{i_k} \dots x_{i_n}$$

bzw.

$$x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n} \to x_{i_2} \dots x_{i_n} x_{i_1}.$$

Sei T_n bzw. S_n die von $\{\tau_{k,n} \colon 0 < k < n\}$ bzw. $\{\sigma_{1,n}\}$ erzeugteGruppe Σ_n die Gruppe der Permutationen von $\{1, \dots, n\}$,

$$\sigma_n = \sum_{\pi \in \Sigma_n} \operatorname{sign}(\pi)\, x_{\pi 1} \dots x_{\pi n} \quad \text{und} \quad \tau_n = \sum_{\pi \in \Sigma_n} x_{\pi 1} \dots x_{\pi n}.$$

Für $f \in F_n\{x_1, \ldots, x_n\}$ sei $\partial_i f$ die formale Ableitung von f nach x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Im folgenden sei $R \in R_{\mathrm{char}}$ mit $1 \in R$, $F = F(R)$ und $PI_i = PI_i(R)$, $i \in \mathbb{N}$. Weiterhin sei $PI_{n-1} = 0 \neq PI_n$, $1 < n \in \mathbb{Z}$. Wegen $1 \in R$ gilt:

$$(*) \qquad \text{Mit } f \in PI_n \text{ ist } \partial_i f = 0\,, \quad 1 \leqslant i \leqslant n\,.$$

Satz 1. Sei PI_i S_i-invariant, $n \leqslant i \leqslant n+1$. Dann gilt $R' = 0$.

Beweis. Wir führen die Annahme $n > 2$ zum Widerspruch. Sei $0 \neq f = \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i f_i \in PI_n$. Dann ist

$$(a) \quad f_n + \sum_{1 \leqslant i < n} x_i \partial_n f_i = \partial_n f = 0$$

und

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} f_i[x_i, x_{n+1}] = (\sigma_{1,n} f)\, x_{n+1} - \sigma_{1,n+1}^2 (x_{n+1} f) \in PI_{n+1}\,,$$

also mittels ∂_n

$$(b) \quad \sum_{1 \leqslant i < n} \partial_n f_i [x_i, x_{n+1}] \in PI(R)\,,$$

somit mittels $x_n \to x_{n+1}$ und $\sigma_{1,n}^{n-2}$

$$(c) \quad \sum_{1 \leqslant i < n} [x_i, x_n]\, \partial_n f_i \in PI_n\,.$$

Wegen

$$x_i \partial_n f_i [x_n, x_{n+1}] = x_n \partial_n f_i [x_i, x_{n+1}] - \sigma_{1,n}\big([x_i, x_n]\, \partial_n f_i\big)\, x_{n+1} + \\ + \sigma_{1,n+1}^2\big(x_{n+1}[x_i, x_n]\, \partial_n f_i\big)$$

und $(a-c)$ ist $g = f_n[x_n, x_{n+1}] \in PI_{n+1}$, also

$$[f_n, x_n] = \partial_{n+1}\big(\sigma_{1,n+1}^n(g)\big) \in PI_n\,,$$

demnach $\partial_i f_n = 0$, $1 \leqslant i < n$. Analog erhält man $\partial_i f_j = 0$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, also $f_i = \partial_i f = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$, Widerspruch.

Lemma 2. Sei $\operatorname{char} R \neq 2$, $3 < n \in \mathbb{N}$ und PI_n T_n-invariant. Für $f \in PI_n$ mit $\tau_{1,n} f = -f$ und $\tau_{3,n} f = f$ gilt $f = 0$.

Beweis. Für $i, j, k, l \in \mathbb{N}$ und $a, b, c, d, p, q \in \mathbb{Z}$ sei

$$x(i, j, k, l) = [x_i, x_j](x_k \circ x_l)$$

und

$$x\begin{pmatrix} i, j, k, l \\ a, b, c, d, p, q \end{pmatrix} = ax(i, j, k, l) + bx(i, k, j, l) + cx(i, l, j, k) + \\ + dx(j, k, i, l) + px(j, l, i, k) + qx(k, l, i, j) .$$

Für $n = 4$ hat man $f = x\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ a, b, c, d, p, q \end{pmatrix}$, also $f = 0$ wegen $(*)$. Sei $n > 4$ und o.E. $x_1 x_2 \dots x_n$ Monom von f. Dann gilt eindeutig

$$f = x\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ a, b, c, d, p, q \end{pmatrix} x_5 x_6 \dots x_n + \sum_{5 \leqslant i \leqslant n} x\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 5 \\ r_i, s_i, t_i, u_i, v_i, w_i \end{pmatrix} g_i + g$$

mit

$$g_5 = x_4 x_6 x_7 \dots x_n \quad \text{und} \quad g_{i+1} = \tau_{i-4, n-4}(g_i) , \quad 5 \leqslant i < n .$$

Sei $r = \sum_{5 \leqslant i \leqslant n} r_i, \dots, w = \sum_{5 \leqslant i \leqslant n} w_i$. Mit $\partial_4 f = 0 = \partial_4(\tau_{2,n} f)$ erhält man mittels Koeffizientenvergleich $2a + r = 2b + s = 2d + u = 0$ bzw. $-a + d + p - q - r = 0 = -b - d - p + q - s$ und $a + b + c - p + s = 0 = -a - c + d + p + u$, also $a + b = 0 = b + d$. Mit ∂_i, $1 \leqslant i \leqslant 3$ erhält man analog $d + p = p + q = 0$, $b + c = c + q = 0$, $a + c = c + p = 0$, also $a = 0$, Widerspruch.

Satz 3. Sei PI_n T_n-invariant char $R = p$. Dann gilt:

$PI_n = F\sigma_n$ und $2 \mid n$ für $p = 0$;

$(PI_n = F\sigma_n$ und $2 \mid n$, $p \nmid n)$ oder $(PI_n = F\tau_n$ und $2 \nmid n$, $p \mid n)$

oder $(PI_n \in \{F\sigma_n, F\tau_n, F\sigma_n + F\tau_n\}$ und $2p \mid n)$ für $p > 2$.

Beweis. Für $f \in PI_n$ sei $f_{i,\pm} = f \pm \tau_{i,n} f$, $1 \leqslant i < n$. Mit f ist $f_{i,\pm} \in PI_n$ und $2f = f_{i,+} + f_{i,-}$. Man erledigt $n \leqslant 3$ mit $(*)$. O.E. sei $3 < n$. Wir verwenden in folgenden eine leichte Verallgemeinerung von Lemma 2.

Sei zunächst $4 < n$. Für $g = f_{1,+}$ gilt $g - \tau_{i,n} g = 0$ für $2 < i < n$, insbesondere $\tau_{n-1,n} g = g$, also auch $g - \tau_{2,n} g = 0$. Insgesamt gilt $f_{1,+} \in$

$\in F\tau_n$. Analog erhält man $f_{1,-} \in F\sigma_n$. Insgesamt gilt $f \in F\sigma_n + F\tau_n$. Mit $(*)$ erhält man die Behauptungen.

Sei nun $n = 4$. Für $g = f_{1,+}$ hat man

$$\tau_{1,4}g = g = \tau_{3,4}g \quad \text{und} \quad \partial_i(\tau_{2,4}g) = 0 , \quad 1 \leqslant i \leqslant 4 .$$

Man errechnet $f_{1,+} \in F\tau_n$ und verfährt wie oben.

IV. Eingeschränkte Polynomidentitäten.

Notationen. Sei $R^\times := R \setminus \{0\}$ und $\# M$ die Mächtigkeit einer Menge M. Für $k \neq 0 \neq l \in \mathbb{Z}$ sei $f^{k,l} := f(k + x, l + y)$. Dann gilt

$$(*) \qquad (f^{k,l})_{i,j} = k^{m-i} l^{n-j} (f^{1,1})_{i,j} .$$

$X \subseteq R$ heiße u-Menge, $u \in \mathbb{N} :\Leftrightarrow$ Zu jedem $a \in R$ existiert $0 \neq k \in \mathbb{Z}$ mit $|k| \leqslant u$, so daß $k + a \notin X$.

Jede additive Untergruppe A von R mit $1 \notin A$ (insbesondere jedes echte Ideal von R) und R_{nil} ist 2-Menge.

Für $a, b \in R$ und $A \subseteq R$ sei

$$[a, b]_0 := a , \quad [a, b]_{i+1} := \left[[a, b]_i, b\right] , \quad 0 \leqslant i \in \mathbb{Z} .$$

$$EZ(A) := \{a \in A\colon \text{zu } b \in A \text{ existiert stets } m, n \in \mathbb{N}, \text{ so daß } [a, b^m]_n = 0\} ;$$

$$Ez(A) \ = \{a \in A\colon \text{zu } b \in A \text{ existiert stets } n \in \mathbb{N}, \text{ so daß } [a, b]_n = 0\} .$$

Sei $G = E(R)$ die Einheitengruppe von R. Für $a, b \in G$ sei

$$(a^* b)_0 = a , \quad (a^* b)_1 := aba^{-1}b^{-1} , \quad (a^* b)_{i+1} := \left((a^* b)_i * b\right)_1 , \quad i \in \mathbb{N} ;$$

$$Hz(G) := \{a \in G\colon \text{zu } b \in G \text{ existiert stets } n \in \mathbb{N}, \text{ so daß } (a^* b)_n = 1\} .$$

Für $a, b \in G$ gilt

$$a^* b = [a, b]\, a^{-1} b^{-1} + 1 .$$

Für Ringe R mit $\left([G, G]\right)^2 = 0$ wie in Satz 2 gilt deshalb

$$(*) \qquad (a^* b)_n = 1 \Leftrightarrow [a, b]_n = 0 \quad \text{für alle } a, b \in G \text{ und } n \in \mathbb{N} .$$

Insbesondere ist $Hz(G) = Ez(G)$. Die Ringklassen M_1, C_1, E_e, C_{01} wurden in [8] definiert. Im folgenden sei $1 \in R$, $f \in \mathbb{Z}\{x, y\}$, $\nu f = 0$ und $f = f_{m,n}$ homogen mit $m > 1 < n \in \mathbb{Z}$.

Lemma 1. Sei char $R' = 0$ und $X \subseteq R$ u-Menge. Dann gilt: Mit $f(R \setminus X) = 0$ ist $f(R) = 0$.

Beweis. Zu $a, b \in R$ existiert $k \neq 0 \neq l \in \mathbb{Z}$, so daß für je unendlich viele $i, j \in \mathbb{Z}$ gilt: $k + ia$, $l + jb \notin X$, also $f^{k,l}(ia, jb) = 0$. Dann ist $(f^{k,l})_{i,j}(a, b) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$, somit $f^{1,1}(a, b) = 0$ wegen $(*)$, schließlich $f(a, b) = 0$ wegen $1 \in R$.

Satz 2. Sei $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{P}$, $R \in K_{\mathbb{Q}}$,

$$T' = 0 \quad \text{für alle } T \in K_{\mathbb{Q}} \text{ mit } f(T) = 0 .$$

X Ideal von R mit $X \neq R$ und $f(R \setminus X) = 0$. Dann gilt:

(1) $R' \subseteq t(R)$.

(2) $[R', R'] = 0$. Insbesondere $R'[R', R] = 0 = (R')^3$.

(3) $I := R[X, X]R = R'$ Insbesondere ist $R' = 0$, falls $X = R'$ wegen (2).

(4) $([G, G])^2 = 0$. Insbesondere $(J(R)')^2 = 0$.

(5) Für $a, b \in G$ und $1 < m \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\text{Aus } [a, b]_m = 0 \neq [a, b]_{m-1} \quad \text{folgt } m = 2 .$$

(6) $Ez(G)$ ist kommutativ. Insbesondere ist G kommutativ, falls $Ez(G) = G$.

(7) $Ez(J(R))$ ist kommutativ. Insbesondere ist $R' = 0$, falls $Ez(J(R)) = J(R) = X$ wegen (3).

(8) Es gilt $R' = 0$, falls $Ez(G) = G$ und R endlich dimensionale Algebra über einem unendlichen Körper.

(9) Es gilt $R' = 0$, falls $X = J(R)$ und folgende Bedingung erfüllt ist: Zu $a, b \in G$ existiert stets $l, r \in \mathbb{N}$ mit $\mathbb{P}(l) \subseteq \mathbb{Q}$, so daß $[a^l, b]_r = 0$ oder $(a^{l*} b)_r = 1$.

BEWEIS. (1) Sei $\bar{R} = R/t(R)$. Für $\bar{X} \neq \bar{R}$ gilt $f(\bar{R}) = 0$ nach Lemma 1, also $R' \subseteq t(R)$. Anderenfalls gilt $\bar{X} = \bar{R}$, insbesondere $t(R) \nsubseteq X$. Für $d \in t(R) \setminus X$ ist $(\{d\} + X) \cap X = \emptyset$. Also gilt $f(\bar{R}) = 0$, somit $R' \subseteq t(R)$. Insbesondere ist $UH(R) \subseteq K_{\mathrm{Q}}$.

(2) Für $T = R/X$ ist $f(T) = 0$, also $T' = 0$, somit $R' \subseteq X$.

Betrachte $M_3(F_p)$: Sei $I_p = \underset{1 \leqslant i < j \leqslant 3}{+} F_p e_{i,j}$ und $S_p = F_p 1 + I_p$. Für $p \notin \mathrm{Q}$ gilt $f(S_p) \neq 0$ wegen $S_p' \neq 0$, also $f^{1,1}(I_p) \neq 0$. Somit ist

$$(\dagger) \qquad f^{1,1} = k[x, y] + g(x, y)\,, \qquad g = \sum_{3 \leqslant i+j} g_{i,j}\,, \qquad k \in \mathbb{Z}^{\times}\,,\ \mathrm{P}(k) \subseteq \mathrm{Q}\,.$$

Sei L Ideal von R mit $(1 + L) \cap X = \emptyset$. Dann gilt $f^{1,1}(L) = 0$. Sei T primes Bild von L und $Z = Z(T)$. Für $\# Z = \infty$ gilt $f^{1,1}(TZ^{-1}) = 0$ [7; Corollary 2.3.33, p. 131], also $f(TZ^{-1}) = 0$ wegen $1 \in TZ^{-1}$, somit $T' = 0$. Anderenfalls ist Z Körper, also $f(T) = 0$ wegen $1 \in Z$, somit $T' = 0$. Insgesamt gilt $L' \subseteq P(L)$. Wie in [9] erhält man

$$[P(L), P(L)] = 0\,.$$

Speziell hat man $[X', X'] = 0$ $(L = X)$, also $[R', R'] \subseteq X' \subseteq P(R)$, somit $R' \subseteq P(R)$, und $P(R)' = 0$ $(L = P(R))$.

(3) Für $\bar{R} = R/I$ ist $f(\bar{R} \setminus \bar{X}, \bar{R} \setminus \bar{X}) = 0$ und $[\bar{X}, \bar{X}] = 0$. Für $a \in \bar{X}$, $b \in \bar{R} \setminus \bar{X}$ gilt $ab^i a = a^2 b^i$, $b^i a^2 = ab^i a = a^2 b^i$, also $f(a, b) = 0$ und analog $f(b, a) = 0$. Insgesamt hat man $f(\bar{R}) = 0$, also $\bar{R}' = 0$.

(4) Für $a, b, c, d \in E(R)$ und $r \in R$ gilt

$$0 = [a, b]\, r f(c, d) = k[a, b]\, r [c, d]\, c^{m-1} d^{n-1}$$

nach (2), also $[a, b]\, r [c, d] = 0$.

(5) Angenommen $2 < m$. Für $d = (a^* b)_{m-3}$ und $c = d^* b$ gilt $[c, b]_2 = 0$ wegen $(*)$ und (4) und $[b, c]_2 = \big[[b, c], [d, b] d^{-1} b^{-1} + 1\big] = 0$, also $0 = f(c, b) = k[c, b]\, c^{m-1} b^{m-1}$, somit $0 = [c, b] = [a, b]_{m-1}$ wegen $(*)$ und (4), Widerspruch.

(6) bzw. (7) Für $a, b \in Ez(G)$ bzw. $a - 1$, $b - 1 \in Ez\big(J(R)\big)$ gilt $[a, b]_2 = 0 = [b, a]_2$ nach (5). Wie dort erhält man $[a, b] = 0$.

(8) gilt nach (6) wegen $R = Z(R) G$ [6; Lemma, p. 247].

(9) Für $a \in J(R)'$, $b \in J(R)$ gilt $O = [(1 + a)^l, 1 + b]_2$ wegen $(*)$ und (5), also $O = l[a, b]_2$ wegen (2), somit $0 = [a, b]_2$. Verwende (7).

Satz 3. Sei $f(R \setminus R_{\text{nil}}) = 0$ und (1 oder 2). Dann gilt $R' = 0$.

(1) Für $T \in E_e \cup M_1 \cup C_1$ gilt $f(T \setminus T_{\text{nil}}) \neq 0$.

(2) Sei $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{P}$ und $R \in K_{\mathbb{Q}}$. Für $T \in (E_e \cap K_{\mathbb{Q}}) \cup C_{0,1} \cup \{S_p : p \notin \mathbb{Q}\}$ bzw. $T \in M_1$ gilt $f(T) \neq 0$ bzw. $f(T \setminus T_{\text{nil}}) \neq 0$.

Beweis. (1) gilt nach [8; Corollary (2)].

(2) Analog zum Beweis von Satz 2 gilt $R' \subseteq t(R)$, $UH(R) \subseteq K_{\mathbb{Q}}$ und (†).

Angenommen es existiert $T = \mathbb{Z}1 + T_{p,k} \in C_1$ mit $p^k 1 = 0$, $p \notin \mathbb{Q}$, so daß $T \in UH(R)$. Seien $a, b \in T_{p,k}$: Für $1 + a, 1 + b \notin T_{\text{nil}}$ gilt $O = f^{1,1}(a, b) = k[a, b]$, also $[a, b] = 0$. Für $(1 + a)^n = 0$, $n \in \mathbb{N}$ gilt $[a, b] = [a(1 + a)^n, b] = 0$. Analog schließt man für $1 + b \in R_{\text{nil}}$. Insgesamt ist $T' = 0$, Widerspruch. Nun gilt (2) nach [8; Corollary (2.3)].

V. Bedingungen an $a \in R$ hinreichend für $a \in Z(R)$.

Lemma 1. Sei $T \in U(Z(R))$, $\# T = \infty$, $T^\times \subseteq R_{\text{reg}}$, $\operatorname{char} T = p$, $F = F(T)$ (falls $1 \in R$ und $\operatorname{char} R = 0$ wäre $T = \mathbb{Z}1$ geeignet), $M \subseteq R$, $\# M < \infty$ und $a \in R$ mit (1) oder (2). Dann gilt $a \in Z(R)$.

(1) Es existiert $X \subseteq F[x]^\times$ mit $\# X < \infty$ und $Y \subseteq (Fx + Fy) \times \times (Fx + Fy)$ mit $\# Y < \infty$, wobei für $(ix + jy, kx + ly) \in Y$ gilt, daß $j \neq 0 \neq il - jk$.

(*a*) Zu jedem $r \in R$ existiert $f \in X$ und $(g, h) \in Y$, so daß

$$[f(g(a, r)), h(a, r)] \in M \qquad \text{oder } g(a, r) \circ h(a, r) \in M \,.$$

(*b*) $p \nmid \deg f$ für alle $f \in X$.

(2) Es existiert $f = \sum_{i+j=n} f_{i,j} \in F\{x, y\}$ mit $f_{n,0} \neq 0 \neq f_{n-1,1}$.

(*c*) Für $i, j, k \in \mathbb{N}$ mit $i + j = n$, $k < n$ und $(j - 1)k \leqslant i \leqslant jk$ ist $(yx^k)^{j-1}y$ Teiler eines Monomes von $f_{i,j}$ (etwa $f = (x + y)^n + ly^n$ mit $l \in \{0, 1, -1\}$ wäre geeignet).

Für jedes $r \in R$ gilt $[a, r] \in M$ oder $a \circ r \in M$ oder $f(a, r) \in M_{\text{nil}}$. Weiterhin sei $P(R) = 0$.

Beweis. (1) Sei zunächst $p \neq 2$ und $s \in R$. Wegen $\# Y, \# M < \infty$ ist die zweite Bedingung aus (a) höchstens für endlich viele $r \in s + T$ erfüllt. Wegen $\# X, \# Y, \# M < \infty$ existiert $f \in X$, $(g, h) \in Y$ und $t \in M$, so daß $[f(g(a, s+z)), h(a, s+z)] = t$ für unendlich viele $z \in T$. Sei genauer $f(g(a, s+z)) = \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} s_i z^i$ mit $n = \deg f$. Mittels Homogenisierung erhält man $[s_{n-1}, h(a, s)] = 0$, wobei $s_{n-1} = mg(a, s)$ mit $m \in F^{\times}$, also $[a, s] = 0$.

Für $p = 2$ beachtet man $u \circ v = [u, v]$ und schließt wie oben.

(2) Wegen (1) sei o.E. $X := \{r \in R\colon [a, r] \neq 0 \neq a \circ r\} \neq \emptyset$. Sei $r \in X$ und $s \in R \setminus X$. Für fast alle $z \in T$ gilt $[a, rz] \notin M$ und $a \circ rz \notin M$, also $\sum_{i,j} z^j f_{i,j}(a, r) = f(a, rz) \in M_{\mathrm{nil}}$. Mittels Homogenisierung erhält man $f_{i,j}(a, r) = 0$ für alle i, j mit $j > 0$ und $f_{n,0}(a, r) \in M_{\mathrm{nil}}$, insbesondere $a^{k+1} = 0$.

Für $n \leqslant k$ erhält man mittels $f_{n-1,1}(a, r) = 0$, daß $a^k r a^k = 0$. Wegen $a^k s a^k = 0$ ist Ra^k beschränkt nil, also $a^k = 0$ nach [7; 1.6.25, p. 46]. O.E. sei $1 \leqslant k < n$. Es existieren $i, j \in \mathbb{N}$ mit (c). (Man beginnt mit $i = n - 1$, $j = 1$. Ist $jk < i$, so ersetzt man i durch $i - 1$ und j durch $j + 1$. Dieses Vorgehen wiederholt man bis erstmals $i \leqslant jk$ erreicht ist. Dann gilt $(j-1)k < i + 1$, also $(j-1)k \leqslant i$). Wegen $a^{k+1} = 0$ erhält man mittels $f_{i,j}(a, r) = 0$, daß $a^k(ra^k)^j = 0$. Wegen $a^k(sa^k)^j = 0$ ist Ra^k beschränkt nil, also $a^k = 0$ wie oben. Mittels Induktion erhält man $a = 0$.

Lemma 2. Sei R PI-Ring mit $(*)$ $UH(R) \cap (M \cup C) = \emptyset$.

(1) Sei $a \in R$, $\bar{a} \in Z(\bar{R})$ für alle primen Bilder $\bar{R}$ von R mit $\# Z(\bar{R}) = \infty$. Dann gilt $a \in Z(R)$.

(2) Sei $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{P}$ und $R \in K_{\mathbb{Q}}$. Dann gilt $R/P(R) \in K_{\mathbb{Q}}$. Ist $\# \mathbb{Q} < \infty$, so gilt zusätzlich $R/P(R) = \bigcap_{P \text{ prim}, R/P \in K_{\mathbb{Q}}} P$.

Beweis. (1) Für prime Bilder $\bar{R}$ von R gilt $\# Z(\bar{R}) = \infty$ wegen $(*)$, also $[a, R] \subseteq P(R)$, somit $a \in Z(R)$ nach [8] wegen $(*)$.

(2) Sei $p \in \mathbb{Q}$, $r \in R$ und $pr \in P(R)$. Dann gilt $p^n r^n = 0$ mit $n \in \mathbb{N}$, also $r^n = 0$. Weiterhin ist $p[r, R] = [pr, R] = 0$ nach [8] wegen $(*)$, also $r \in Z(R)$. Es folgt $r \in P(R)$.

Modifiziert man die Koeffizienten der Polynome in Lemma 1 so, daß die Aussagen simultan für $F \in \{\mathbb{Z}\} \cup \{F_p\colon p \in \mathbb{P}\}$ gültig sind, so liefert Lemma 2 unmittelbar ein Corollar zu Lemma 1.

VI. α-Ringe R.

NOTATIONEN. Ist F Unterkörper des Körpers K, so sei $\mathrm{Aut}\,(K|F)$ die Automorphismengruppe von K über F. Im folgenden sei R α-Ring, D α-Schiefkörper und $Z := Z(R)$ bzw. $Z(D)$.

LEMMA 1. Sei R einfach mit $Z \neq 0$. K Unterkörper von R mit $Z \subseteq K$, $[K:Z] < \infty$ und $\mathrm{Aut}\,(K|Z) \neq 1$. Dann ist $\mathrm{char}\, R = p \neq 0$ und K F_p-algebraisch.

BEWEIS. Mit dem Doppel-Zentralisator-Satz [6; p. 232 und Ex. 5, p. 233] erhält man $T \in U(R)$ mit T einfach und $K \subseteq T$, $[K:Z(T)] = q \in \mathrm{P}$ und $1 \neq \sigma \in \mathrm{Aut}\,(K:Z(T))$. O.E. sei $R = T$. Nach dem Satz von Noether Skolem [6; p. 230 und Ex. 1, p. 231] existiert $a \in E(R)$, so daß

(a) $ba = ab^\sigma$ für alle $b \in K$.

Sei $E := \sum_{0 \leqslant i < \infty} a^i K = \bigoplus_{0 \leqslant i < n} a^i K$ mit $n \in \mathrm{N} \cup \{\infty\}$ und $b \in K \setminus Z$ fest gewählt. Dann existiert ein endlich erzeugter Unterring T von Z, so daß

(b) $b^q, b^\sigma \in \sum_{0 \leqslant j < q} Tb^j$,

(c) $a^n \in \sum_{0 \leqslant i < n, 0 \leqslant j < q} Ta^i b^j$, falls $n \neq \infty$.

Für alle $z \in Z^\times$, $u = za$ und $v = zb$ erhält man mit $(a - c)$:

$$0 \neq u(v - v^\sigma) = [u, v] = f_{u,v}(u, v) = u(v - v^\sigma) \sum_i u^i f_i(v, \dots, v^{\sigma^{q-1}}),$$

also $\sum_i u^i f_i(v, \dots, v^{\sigma^{q-1}}) = 1$ mit $f_i \in \mathbb{Z}[x_0, \dots, x_{q-1}]$, somit

$$\sum_{0 \leqslant i < n, 0 \leqslant j < q} z g_{i,j}(z) a^i b^j = 1 \quad \text{mit } g_{i,j} \in T[x],$$

demnach $zg_{0,0}(z) = 1$, also z^{-1} T-ganz. Insgesamt ist Z T-ganz. Für $t \in T^\times$ ist $t^{-1} \in Z$, also T-ganz, somit $t^{-k} \in \sum_{0 \leqslant i < k} Tt^{-i}$. Multiplikation mit t^{k-1} erbringt $t^{-1} \in T$. Also ist T endlich erzeugter Körper. Nach [5; Corollary 1, p. 255] ist $\mathrm{char}\, T = p \neq 0$ und T F_p-algebraisch, also auch Z und K.

SATZ 2. Sei $1 < \deg D < \infty$.

(1) Für jeden Unterkörper K von D mit $Z \subseteq K$ gilt:

(a) $\mathrm{Aut}(K|Z) = 1$,

(b) K ist Z-separabel.

(2) Für $a, c \in D$ gilt: Mit $[c, a]_2 = 0$ ist $[c, a] = 0$. (Mit $c \circ a = 0$ ist $[c, a] = 0$).

(3) $Hz(D^\times) = Z^\times$.

BEWEIS. (1, a) Anderenfalls wäre nach Lemma 1 K, also D F_p-algebraisch, somit $D' = 0$, Widerspruch.

(2) Angenommen $[c, a] \neq 0$. Wähle $w \in D$, so daß $a = [c, a]w$. Sei $b := cw$. Dann gilt $0 = [[c, a]w, a] = [c, a][w, a]$, also $[w, a] = 0$, somit $a = [b, a]$, demnach $aba^{-1} = b - 1$, Widerspruch zu (1, a). (Für $a \neq 0$ folgt $aca^{-1} = -c$, also $2c = 0$ nach (1, a)).

(1, b) Anderenfalls gilt $\mathrm{char}\, D = p \neq 0$ und es existieren $a, b \in D$, so daß $[a, b] \neq 0 = [b, a^p] = [b, a]_p$, Widerspruch zu (2).

(3) Angenommen es existiert $c \in Hz(D^\times) \setminus Z^\times$. Sei K maximaler Unterkörper von D mit $[c, K] \neq 0$. Wegen (1, b) gilt $K = Z[b]$ mit $b \in K$. Dann existiert $0 \leqslant k \in \mathbb{Z}$, so daß $(a^*b)_2 = 1 \neq a^*b$ für $a = (c^*b)_k$. Also gilt $[a^*b, b] = 0$, somit $[aba^{-1}, b] = 0$, demnach $\mathrm{Aut}(K|Z) \neq 1$, Widerspruch zu (1, a).

COROLLAR 3. Sei $1 < d = \deg D < \infty$ und $2^2 \nmid \exp D$. Dann gilt $2 \nmid d$ und ($3 \nmid d$ oder $3^2 | d$).

BEWEIS. Angenommen nicht. Nach [6; Satz, p. 261] sei o.E. $d \in \{2^k, 3\}$. Nach [7; 3.2.29, p. 183] und Lemma 1 ist $d = 2^k$ mit $k > 2$. Sei K Unterkörper von D mit $Z \subseteq K$ und $l = [K:Z]$ maximal unter der Bedingung $l < \deg D$. Nach dem Doppel-Zentralisator-Satz sei o.E. $D = C_D(K)$, also

(*) jeder Unterkörper K von D mit $Z \subset K$ maximal,

wobei $d = 2^k$ mit $k > 2$ wie oben. Nach [7; 3.1.71, p. 173 und 3.1.38 und 39, p. 164] besitzt D eine Involution * erster Art. Nach [7; 3.2.34, p. 185] existiert * und $a \in D \setminus Z$ mit $a^* = a$ Z-algebraisch vom Grad $\leqslant 2^{k-1}$, Widerspruch zu (*).

COROLLAR 4. Sei R PI-Ring. Für alle $a, b \in R$ gelte

$$f_{a,b} = [x, y] \sum_{1 \leqslant i+j} n_{i,j} x^i y^j \in \mathbb{Z}\{x, y\} .$$

Dann ist $R' \subseteq J(R)$, $J(R)' = 0$ und $M_l \cap UH(R) = \emptyset$.

BEWEIS. Für Schiefkörper R schließt man analog zum Beweis von Lemma 1 auf $R' = 0$. Ist $R = M_2(F_p)$, $p \in \mathbb{P}$, so liefern $a = e_{1,1}$ und $b = e_{1,2}$ einen Widerspruch. Standardschlüsse erbringen $R' \subseteq J(R)$. Für $a, b \in J(R)$ sei $e := [a, b]$. Es existieren $c, d \in J(R)$, so daß $e = ec$ und $c + d = cd$. Es folgt $ed = ecd = ec + ed$, also $e = ec = 0$.

COROLLAR 5. Sei R PI-Ring und $J(R) = 0$. Dann gilt $EZ(R) = Z(R)$.

BEWEIS. O.E. sei R primitiv. Für Schiefkörper R verwendet man Satz 2 und [4]. Anderenfalls ist $R = M_2(D)$, da R α-Ring. Man testet $a \in EZ(R)$ mit $b \in \{e_{1,1}, e_{1,1} + e_{1,2}\}$.

BEMERKUNG 6. Sei $(*)$ $M_2(F_p) \notin UH(R)$ für alle $p \in \mathbb{P}$.

(1) Ist T primes Bild von R, so gilt $T_{\text{reg}} = T^\times$, insbesondere $R_{\text{nil}} \subseteq P(R_,$.

(2) $P(R)' = 0$.

BEWEIS. (†) Für $a, r \in R$ mit $a^2 = 0$ und $ra \in J(R)$ gilt $ara = [a, ra] = f_{a,ra}(a, ra) = arag(ra)$ mit $g(ra) \in J(R)$, also $ara = 0$.

(1) Es reicht zu zeigen, daß $T_{\text{nil}} = 0$. Angenommen es existiert $a \in T^\times$ mit $a^2 = 0$. Wegen (†) ist $aJ(T)a = 0$, also $J(T) = 0$. Wegen $(*)$ ist T subdirektes Produkt von Schiefkörpern, Widerspruch.

(2) Sei $c \in P(R)$ mit $c^{2^k} = 0$. Für $d := c^{2^{k-1}}$, $k > 0$ gilt $(d)^2 = 0$ wegen (†). Ein Induktionsschluß erbringt, daß (c) nilpotent ist. Für $a, b \in P(R)$ ist demnach $(a) + (b)$ nilpotent. Nach mehrmaligen Substitutionen $f_{a,b} \to [x, y]$ in $f_{a,b} = \sum g_i[x, y]h_i$ erhalten alle Monome von $f_{a,b}$ hinreichende Länge, so daß $[a, b] = f_{a,b}(a, b) = 0$.

BEMERKUNG 7. Für alle $a, b \in R$ gelte (a) oder (b):

(a) Kein Monom von $f_{a,b}$ besitzt die Gestalt $x^i y$, $i \in \mathbb{N}$.

(b) $f_{a,b} = \sum (f_{a,b})_{i,1} + \sum_j (f_{a,b})_{1,j}$.

Dann gilt $(*)$ aus Bemerkung 6.

BEWEIS. Angenommen nicht. O.E. sei $R = M_2(F_p)$, $p \in \mathbf{P}$.

(a) Für $a, r \in R$ mit $a^2 = 0$ gilt $ara = [ar, a] = f_{ar,a}(ar, a) = 0$, Widerspruch.

(b) Für $a = e_{1,2}$, $b = e_{2,1}$ und $c = [a, b]$ gilt $a^2 = 0 = b^2$ und $c \circ a = 0 = c \circ b$, also $c \in \mathbb{Z}ac + \mathbb{Z}bc = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b$, Widerspruch.

BEMERKUNG 8. Für alle $a, b \in R$ gelte: Kein Monom von $f_{a,b}$ besitzt die Gestalt $x^i y$ oder xy^i, $i \in \mathbf{N}$. Für $e \in R_{id}$ gilt $e \in Z$.

BEWEIS. Für $a \in R$, $b := eae - ea$, $c := eae - ae$ gilt $be = b^2 = = 0 = c^2 = ec$, $eb = b$ und $ce = c$, also $b = [e, b] = f_{e,b}(e, b) = 0$ und $c = [c, e] = f_{c,e}(c, e) = 0$, somit $[e, a] = 0$.

BEMERKUNG 9. Für alle $a, b \in R$ gelte: $f_{a,b} = g_a + h_b$, wobei $g_a = \sum_i (g_a)_{i,1}$ und $h_b = \sum_j (h_b)_{1,j}$. Dann gilt $M \cap UH(R) = \emptyset$.

BEWEIS. Angenommen $T = e_{1,1}F_p + e_{1,2}F_p \in UH(R)$. Dann gilt: Zu $u, v \in T$ existieren $g_u(x)$ und $h_v(y)$, so daß

$$[u, v] = \big(g_u(u)\,u + h_v(v)\,v\big)[u, v]\,.$$

Mit $u \neq v \in \{e_{1,1}, e_{1,2}, e_{1,1} + e_{1,2}\}$ erhält man

$$g_r(1) = g_s(1) = g_r(1) + g_s(1) = 1 \qquad \text{für } r = e_{1,1} \text{ und } s = e_{1,1} + e_{1,2}\,,$$

Widerspruch. Die anderen Ringe bearbeitet man analog.

VII. Optimale Kommutativitätssätze für R mit $J(R) = 0$.

NOTATIONEN. Für $f \in \mathbb{Z}\{x, y\}$ mit $\nu(f) = 0$ gilt

$$f^{1,1} = |f|\,[x, y] + \hat{f}(x, y)\,, \qquad \hat{f} = \sum_{3 \leqslant i+j} \hat{f}_{i,j}\,, \qquad |f| \in \mathbb{Z}\,.$$

Für $i, j \in \mathbf{Z}$ sei $i \sqcap j$ der größte gemeinsame Teiler von i und j.

BEMERKUNG 1. Sei $G \subseteq \mathbb{Z}\{x, y\}$ endlich mit $\nu(G) = 0$. Für alle $f = \sum_{i,j} f_{i,j} \in G$ sei

$$n_f := \prod_{i,j} |f_{i,j}| \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(n_f) \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{P}\,.$$

Sei D $\mathbb{Q}$-torsionsfreier G-Schiefkörper. Dann gilt $D' = 0$.

BEWEIS. Angenommen $D' \neq 0$. Sei $k := \max\{i_0 + j_0$: es existiert $f = \sum f_{i,j} \in G$, so daß $f_{i_0,j_0} \neq 0\}$. Zu $c := 1 + a$, $d := 1 + b$, $a, b \in D$ existiert stets $f \in G$, so daß $f(zc, z^k d) = 0$ für unendlich viele $z \in Z(D)$. Mittels Homogenisierung erhält man

$$0 = f_{i,j}(1 + a, 1 + b) = |f_{i,j}|\,[a, b] + (\hat{f}_{i,j})\,(a, b)\,.$$

Es gilt $n_f = \sum_{i,j} n_{i,j} |f_{i,j}|$ mit $n_{i\,j} \in \mathbb{Z}$, also $0 = n_f[a, b] + \sum_{i,j} n_{i,j}(\hat{f}_{i,j})(a, b)$. Wie oben erhält man nun für $c = a$, $d = b \in D$ ein $f \in G$, so daß $n_f[a, b]$.

BEMERKUNG 2. Sei D Schiefkörper, $D' \neq 0$, $F \in \{Z(D), \mathbb{Z}\}$, $G \subseteq$ $\subseteq F\{x, y\}$ mit $\# G \leqslant \# \mathbb{Z}$ und D α-G-Ring. Dann gilt $\# Z(D) = \# \mathbb{Z}$.

BEWEIS. O.E. sei $F = Z(D)$. Angenommen $\# Z(D) > \# \mathbb{Z}$. Dann existiert zu $a, b \in D$ stets $f \in G$, so daß $[za, b] = f(za, b)$ für unendlich viele $z \in Z(D)$. Mittels Homogenisierung erhält man $[a, b] =$ $= \sum_{2 \leqslant j} f_{1,j}(a, b)$. O.E. sei $f = \sum_j f_{1,j}$ für alle $f \in G$. Analog erhält man jetzt $[a, b] = 0$.

Eine leichte Rechnung erbringt

BEMERKUNG 3. Sei $R = M_2(F_p)$ und $a, b \in R$. Dann gilt $\langle a, b\rangle \neq$ $\neq R \Leftrightarrow [a, b]^2 = 0$.

BEMERKUNG 4. Für $a = (a_{i,j})$, $b = (b_{i,j}) \in M_2(\mathbb{Z})$ sei

$$f_a := x^2 - \operatorname{spur}(a)\,x + \det(a)\,,$$

$$f_{a \circ b} := x \circ y - \operatorname{spur}(b)\,x - \operatorname{spur}(a)\,y - a \circ b + \operatorname{spur}(b)\,a + \operatorname{spur}(a)\,b\,,$$

$$f_{a,b} = xy - b_{2,2}x - a_{1,1}y + a_{1,1}a_{2,2}\,.$$

Für $[a, b]^2 = n \neq 0$ sei $I_{a,b}$ das von f_a, f_b, f_{ab}: erzeugte Ideal von $\mathbb{Z}\{a, b\}$,

$$G^n_{a,b} := \{n_1 + n_2 x + n_3 y + n_4 xy + g: \\ n_i \in \mathbb{Z},\ \mathbf{P}(n_1 \sqcap n_2 \sqcap n_3 \sqcap n_4) \subseteq \mathbf{P}(n),\ g \in I_{a,b}\}\ ,$$

$$\bar{G}^n_{a,b} := \{f \in G^n_{a,b}:\ \nu(f) = 0,\ f - \sum_{3 \leqslant i+j} f_{i,j} = n_f[a, b],\ \mathbf{P}(n_f) \subseteq \mathbf{P}(n)\}\ .$$

Für $a_{2,1} = 0 = b_{2,1}$ und $[a, b] \neq 0$ sei $I_{a,b}$ das von f_a, f_b, $f_{a\circ b}$, f_{ab} erzeugte Ideal von $\mathbb{Z}\{a, b\}$,

$$G^n_{a,b} := \{n_1 + n_2 x + n_3 y + g:\ n_i \in \mathbb{Z},\ \mathbf{P}(n_1 \sqcap n_2 \sqcap n_3) \subseteq \mathbf{P}(n),\ g \in I_{a,b}\}$$

und $\bar{G}^n_{a,b}$ wir oben. Sei $G \subseteq \bar{G}^n_{a,b}$ endlich, $J(R) = 0$ und R n-torsionsfrei.

(1) Ist R $G^n_{a,b}$-Ring, so ist R subdirektes Produkt von Schiefkörpern und primitiven torsionsfreien Ringen.

(2) Ist R G-Ring, so gilt $R' = 0$.

Beweis. (1) Angenommen die Behauptung gilt nicht. Dann existiert $T := M_2(F_p) \in UH(R)$ mit $p \nmid n$. O.E. sei $R = T$. Mittels des kanonischen Ringmorphismus $-: M_2(\mathbb{Z}) \to T$ und Bemerkung 3 erhält man den Widerspruch $g(\bar{a}, \bar{b}) \neq 0$ für alle $g \in G^n_{a,b}$.

(2) gilt nach (1) und Bemerkung 1.

Zur Konstruktion von $a, b \in M_2(\mathbb{Z})$ mit $[a, b] = \pm n$ machen wir folgende

Bemerkung 5. Seien $a = (a_{i,j})$, $b = (b_{i,j}) \in M_2(\mathbb{Z})$ mit $[a, b]^2 = \pm n \neq 0$. Sei $e := a_{2,1} \sqcap b_{2,1}$. Dann gilt $e \mid n$. Es existieren $i, j \in \mathbb{Z}^\times$, so daß $ia_{2\,1} + jb_{2,1} = e$. Sei

$$\bar{a} := a - a_{2,2}1\ , \quad \bar{b} := b - b_{2,2}1\ , \quad c := i\bar{a} + j\bar{b} = \begin{pmatrix} r & s \\ e & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{a} = \bar{a} - a_{2,1}e^{-1}c\ , \quad \hat{b} = \bar{b} - b_{2,1}e^{-1}c\ ,$$

(wobei $i\hat{a} + j\hat{b} = 0$), $d = \hat{b}i^{-1} = -\hat{a}j^{-1} = \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt:

$$(*_1) \qquad a = a_{2,1}e^{-1}c - jd + a_{2,2}1 \,, \qquad b = b_{2,1}e^{-1}c + id + b_{2,2}1 \,,$$

$$(*_2) \qquad [a, b] = [c, d] \quad \text{und} \quad [c, d]^2 = (rv - su)ue + v^2e^2 = \pm n \,.$$

Umgekehrt konstruiert man $a, b \in M_2(\mathbb{Z})$ mit

$$[a, b]^2 = \pm 1 \qquad (n = e = 1)$$

wie folgt: Sei $* \in \{+, -\}$. Wähle $v \in \mathbb{Z}$, dann $u \in \mathbb{Z}$ mit $u \mid *1 - v^2$. Wegen $u \sqcap v = 1$ existieren $r, s \in \mathbb{Z}$, so daß $(*_2)$. Wähle $i \neq 0 \neq j$, $a_{2,1}, b_{2,1} \in \mathbb{Z}$, so daß $ia_{2,1} + jb_{2,1} = 1$. Wähle schließlich $a_{2,2}, b_{2,2} \in \mathbb{Z}$. Für $a, b \in M_2(\mathbb{Z})$ gemäß $(*_1)$ gilt $[a, b]^2 = \pm 1$.

LITERATUR

[1] H. Abu-Khuzam, *A commutativity theorem for periodic rings*, Math. Japonica, **32**, 1 (1987), pp. 1-3.

[2] H. Bell, *On commutativity and structure of periodic rings*, Math. J. Okayama, **27** (1985), pp. 1-3.

[3] I. N. Herstein, *Noncommutative Rings*, Math. Ass. of America, Washington (1968).

[4] I. N. Herstein, *On the hypercenter of a ring*, J. Algebra, **36**, 1 (1975) pp. 151-157.

[5] S. Lang, *Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, New York (1965).

[6] R. S. Pierce, *Associative Algebra*, Springer-Verlag, New York (1982).

[7] L. H. Rowen, *Polynomial Identities in Ring Theory*, Academic Press, New York (1980).

[8] W. Streb, *Zur Struktur nichtkommutativer Ringe*, Math. J. Okayama, **31** (1989), pp. 135-140.

[9] W. Streb, *Über einen Satz von Herstein und Nakayama*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **64** (1981), pp. 159-171.

[10] H. Komatsu - H. Tominaga, *Some commutativity theorems for left s-unital rings*, Resultate Math., **15** (1989), pp, 335-342.

[11] H. Komatsu - H. Tominaga, *Chacron's condition and commutativity theorems*, Math. J. Okayama, **31** (1989), pp. 101-120.

Manoscritto pervenuto in redazione il 29 novembre 1989.