

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

REMO GATTAZZO

## **Punti di tipo 9 di una cubica ellittica**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 61 (1979), p. 285-301

<[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1979\\_\\_61\\_\\_285\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1979__61__285_0)>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

## Punti di tipo 9 di una cubica ellittica.

REMO GATTAZZO (\*)

SUMMARY - Let  $E$  be an elliptic cubic of  $\mathbf{P}_k^2$ ,  $k$  algebraically closed field of characteristic  $p$ ,  $p \neq 2, 3$ . An algebraic process is given to determine the 72 points  $P \in E$ , flexes excepted, for which a cubic  $C_3 \subset \mathbf{P}_k^2$  exists with  $E \cdot C_3 = 9P$ . Such a point  $P$  is called of type 9. For each of these points  $P$  the equation of relative cubic  $C_3$  is calculated. Moreover a generalization of such process is given.

### Introduzione.

Sia  $E$  una cubica ellittica  $E \subset \mathbf{P}_\mathbf{C}^2$ , con  $\mathbf{C}$  campo dei numeri complessi. Le applicazioni geometriche del teorema di Abel (cfr. [2], vol I, pag. 488) permettono di determinare il numero dei punti  $P \in E$  tali che  $3nP$  è intersezione completa di  $E$  e di una curva algebrica  $C_n \subset \mathbf{P}_\mathbf{C}^2$ , in simboli  $E \cdot C_n = 3nP$  e tale numero è  $(3n)^2$ . Il teorema dell'inversione degli integrali abeliani di prima specie permette di determinare tali punti.

Mi risulta che solo in pochi casi (flessi, punti sestatici, cfr. [3], vol. I, pag. 277) è stato scritto un procedimento algebrico per determinare tali punti. Notiamo inoltre che i teoremi citati non forniscono un criterio per trovare l'equazione della curva  $C_n$  la cui intersezione completa con  $E$  è  $3nP$ .

È noto che tali punti rientrano tra quelli di ordine finito per  $E$

(\*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica Applicata, Università di Padova.

Lavoro svolto nell'ambito dei gruppi di ricerca matematica del C.N.R. (G.N.S.A.G.A.).

dotata della nota struttura di gruppo abeliano  $(E, \oplus)$  nel senso che, se viene fissato un flesso  $0 \in E$  come elemento neutro, allora  $E \cdot C_n = 3nP$  se e solo se  $\underbrace{P \oplus \dots \oplus P}_{3n\text{-volte}} = 0$  in  $(E, \oplus)$ . Inoltre è noto (cfr. [5],

Example 4.8.1 e 4.8.3, pag. 322) che in caratteristica  $p$ ,  $p \neq 2, 3$ , il sottogruppo degli elementi di ordine  $3n$  è costituito da  $(3n)^2$  elementi.

Col seguente scritto si vuole dare un procedimento algebrico, valido per ogni campo  $k$  algebricamente chiuso di caratteristica  $p$  arbitraria, eccettuati al più i valori  $p = 2, 3$ , per la determinazione dei punti  $P \in E$  tali che  $9P$  è intersezione completa di  $E$  con una cubica  $C_3$ . Questi sono i 9 flessi e i 72 punti di tipo 9 (cioè punti non di flesso per i quali esiste una cubica  $C_3$  per cui  $E \cdot C_3 = 9P$ ) che determiniamo in modo algebrico fornendo in sostanza le loro coordinate. Viene esteso poi lo studio ai punti  $P \in E$  tali che esiste una curva  $C_n$  con  $E \cdot C_n = 3nP$ , con  $n = (2^r - (-1)^r)/3$  e  $n = 2^t + (-1)^t$ , per  $r \geq 3$  e  $t \geq 2$ .

Si fornisce inoltre un procedimento per la determinazione della equazione di  $C_3$  nel caso dei punti di tipo 9 e di alcune  $C_n$ , con  $n > 3$ , che finora mi risulta fosse noto solo per  $n = 1$ : tangente di flesso,  $n = 2$ : conica surosculatrice (cfr. [3], vol. 1, pag. 277). Un rapido cenno di un procedimento per trovare i punti  $P \in E$  di cui un flesso è un tangenziale successivo e la  $C_n$ , con  $n = 2^s$  e  $s \geq 1$ , relativa ad essi, trovasi in [8], Oss. 6, pag. 178.

## 1. Flessi e punti sestatici di $E$ .

Supponiamo in questo numero che  $E$  sia una cubica ellittica di  $\mathbf{P}_k^2$ , con  $k$  campo algebricamente chiuso di caratteristica  $p$ ,  $p \neq 2, 3$ . I punti di flesso di  $E$  sono 9 (cfr. [5], Example 4.8.3, pag. 322) e si trovano intersecando  $E$  con la sua curva hessiana (cfr. [1]). Le rette tangenti nei punti di flesso si trovano con l'usuale formula. I flessi di  $E$  sono a tre a tre allineati e formano il sottogruppo degli elementi di ordine 3 di  $(E, \oplus)$ .

Assunte tre rette contenenti i 9 flessi come triangolo di riferimento  $(X, Y, Z)$  per  $\mathbf{P}_k^2$ , si può scegliere un conveniente punto unità in modo che i flessi di  $E$  siano i seguenti

$$\begin{array}{lll} (0, 1, -1) & (0, 1, -\varepsilon) & (0, 1, -\varepsilon^2) \\ (-\varepsilon^2, 0, 1) & (-1, 0, 1) & (-\varepsilon, 0, 1) \\ (1, -\varepsilon, 0) & (1, -\varepsilon^2, 0) & (1, -1, 0) \end{array} \quad (\text{tabella } \Phi)$$

ove  $\varepsilon$  è una radice cubica di 1, con  $\varepsilon \neq 1$ . Rispetto a tale riferimento  $E$  assume la forma canonica (cfr. [3], vol. II, pag. 218)

$$(1) \quad X^3 + Y^3 + Z^3 - 3aXYZ \quad \text{con } a^3 \neq 1.$$

I punti sestatici di  $E$  sono i punti  $P \in E$  per i quali esiste una conica irriducibile (conica surosculatrice) che interseca  $E$  secondo il divisore  $6P$ . Tali punti sono quelli che hanno il tangenziale (cioè il punto  $Q \in E$  che è intersezione di  $E$  con la retta tangente in  $P$  ad  $E$ ) coincidente con un flesso di  $E$ . I punti sestatici di  $E$  si trovano intersecando  $E$  con le curve polari prime di  $E$  relative ai flessi di  $E$ ; tali coniche sono riducibili nella tangente di flesso ed in una ulteriore retta che interseca  $E$  secondo tre punti sestatici. Se  $E$  è data dalla (1), le 9 rette che intersecano  $E$  secondo i punti sestatici sono le componenti della

$$(X^3 - Y^3)(X^3 - Z^3)(Y^3 - Z^3).$$

I punti sestatici sono 27 distinti tra loro e dai flessi. Flessi e sestatici formano il sottogruppo degli elementi di ordine 6 di  $(E, \oplus)$ .

L'equazione di ciascuna conica surosculatrice ad  $E$  in un punto sestatico si può calcolare secondo il procedimento riportato in [3], vol. I, pag. 271 che vale in ogni caratteristica  $p$ ,  $p \neq 2, 3$ , oppure secondo il procedimento qui riportato nell'Osservazione 3 del n. 2.

## 2. Punti di tipo 9 di $E$ .

Sia  $k$  un campo algebricamente chiuso e di caratteristica arbitraria. Indicheremo con  $C_n$  una curva algebrica di  $\mathbb{P}_k^2$  di ordine  $n$ .

**DEFINIZIONE 1.** Diciamo che il punto  $P \in E$  è di tipo  $3n$  se esiste una curva  $C_n \subset \mathbb{P}_k^2$  che individua su  $E$  il divisore  $3nP$  e non esiste alcuna curva  $C_{n'} \subset \mathbb{P}_k^2$ , con  $n' < n$ , che individui il divisore  $3n'P$ ; chiameremo  $C_n$  curva  $3n$ -osculatrice ad  $E$  in  $P$ .

**OSSERVAZIONE 1.** Ogni curva  $C_n$   $3n$ -osculatrice risulta essere chiaramente ridotta ed irriducibile, mentre se esiste una curva  $C_n \subset \mathbb{P}_k^2$  ridotta ed irriducibile tale che individua su  $E$  il divisore  $E \cdot C_n = 3nP$  allora non è detto che  $P$  è punto di tipo  $3n$  di  $E$ . Infatti se  $F$  è un flesso di  $E$  e  $T$  è la retta tangente ad  $E$  in  $F$ , esisterà, almeno in

caratteristica zero, per il teorema di Bertini una curva del fascio  $E + \lambda T^3$ , con  $\lambda$  parametro, che sia ridotta ed irriducibile.

Nel numero precedente abbiamo considerato i flessi di  $E$  (punti di tipo 3) ed i punti sestatici (punti di tipo 6) e le relative curve  $3n$ -osculatrici, con  $n = 1, 2$  (tangenti di flesso e coniche suosculatrici). Ci si pone ora il problema di determinare i punti di tipo 9 di  $E$  e le relative cubiche 9-osculatrici. Premettiamo la seguente

**DEFINIZIONE 2.** *Dicesi triangolo tangenziale di  $E$  una terna (ordinata) di punti distinti  $A_1, A_2, A_3 \in E$  tali che*

$$\begin{aligned} A_2 &\text{ è il tangenziale di } A_1, \\ A_3 &\text{ è il tangenziale di } A_2, \\ A_1 &\text{ è il tangenziale di } A_3. \end{aligned}$$

*I punti  $A_1, A_2, A_3$  si dicono i vertici e le rette  $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1$  si dicono i lati del triangolo tangenziale.*

**NOTA.** La nozione di triangolo tangenziale era già noto implicitamente in passato (cfr., ad esempio, [7], pag. 30).

**OSSERVAZIONE 2.** Nessun punto di tipo 3 o di tipo 6 può essere vertice di un triangolo tangenziale (altrimenti due vertici coinciderebbero).

**PROPOSIZIONE 2.1.** *Il punto  $A \in E$  è un vertice di un triangolo tangenziale di  $E$  se e solo se  $A$  è di tipo 9.*

Premettiamo alla dimostrazione della Prop. 2.1 il

**LEMMA 2.2.** *Sia  $J(E)$  l'ideale omogeneo di  $E$  in  $k[X, Y, Z]$ ,  $R$  l'anello delle coordinate omogenee di  $E$ ,  $R = k[X, Y, Z]/J(E)$ , ed infine  $K$  il campo dei quozienti di  $R$ . Per ogni elemento omogeneo  $h \in K$  tale che il divisore definito su  $E$  da  $h$ ,  $\text{div}(h)$ , sia effettivo, esiste almeno una curva (non necessariamente ridotta o irriducibile)  $C_n \subset \mathbf{P}_k^2$ , con*

$$n = \text{grado div}(h)/3, \quad \text{tale che } E \cdot C_n = \text{div}(h).$$

**DIM.** È lecito pensare  $E$  quale cono affine  $V \subset k^3$ . Essendo  $V$  non singolare in  $\text{codim} = 1$ ,  $R$  risulta allora integralmente chiuso in  $K$  (cfr. [6], pag. 391), e quindi, per il teorema di struttura dei domini

noetheriani integralmente chiusi,

$$(2) \quad R = \bigcap_{h(\mathfrak{p})=1} R_{\mathfrak{p}} .$$

Ne segue che, per ogni elemento omogeneo  $h \in K$  tale che  $\text{div}(h)$  sia effettivo,  $h \in R_{\mathfrak{p}}$  per ogni ideale primo  $\mathfrak{p} \subset R$  di altezza  $h(\mathfrak{p}) = 1$ . Quindi, per la (2), si ha  $h \in R$ . Esiste allora in  $k[X, Y, Z]$  almeno un polinomio omogeneo  $H$  tale che, nell'omomorfismo canonico  $k[X, Y, Z] \rightarrow R$ , ha per immagine  $h$ . Ogni tale polinomio  $H$  individua in  $\mathbf{P}_k^2$  una curva  $C_n$  tale che  $E \cdot C_n = \text{div}(h)$ . Per il teorema di Bézout,  $C_n$  avrà allora necessariamente ordine  $n = \text{grado}(\text{div}(h))/3$ . ■

Riferendoci alle notazioni del Lemma 2.2, indicheremo in seguito con  $f$  l'immagine di  $F \in k[X, Y, Z]$  in  $R$  e, nel caso in cui  $F$  sia omogeneo, indicheremo ancora con  $F$  la curva di  $\mathbf{P}_k^2$  individuata da  $F$ .

DIM. (della Prop. 2.1). Si supponga che  $A = A_1, A_2, A_3$  siano punti di  $E$  che sono vertici di un triangolo tangenziale. Sia  $T_i$  la retta tangente ad  $E$  in  $A_i$ , ( $i = 1, 2, 3$ ). Si ha allora

$$(3) \quad \text{div}\left(\frac{t_1^4 t_3}{t_2^2}\right) = 9A_1 = 9A .$$

Per il Lemma 2.2 risulta allora che esiste una curva  $C_3 \subset \mathbf{P}_k^2$  tale che  $E \cdot C_3 = 9A$ . Proviamo che  $A$  è un punto di tipo 9. Infatti se non fosse di tipo 9 sarebbe di tipo 6 o di tipo 3 contro l'Osservazione 2.

Viceversa supponiamo che esista una cubica  $C_3$  9-oscultatrice ad  $E$  in un punto  $A \in E$ . Siano inoltre  $A_2$  il punto tangenziale di  $A$  e  $A_3$  il punto tangenziale di  $A_2$ . Affermo che il punto  $A_3$  ha per tangenziale esattamente  $A$ . Infatti detto  $Q$  il punto tangenziale di  $A_3$ , siano  $T, T_2, T_3$  le rette tangenti ad  $E$  rispettivamente in  $A, A_2, A_3$ . Si ha

$$\text{div}\left(\frac{t_1^4 t_3}{t_2^2}\right) = 8A + Q, \quad \text{div}(c_3) = 9A, \quad \text{div}\left(\frac{c_3 t_2^2}{t_1^4 t_3}\right) = Q - A .$$

In altre parole  $A$  è linearmente equivalente a  $Q$ :  $A \equiv Q$ . D'altra parte per il teorema di Riemann-Roch applicato al divisore  $A$  di  $E$  risulta  $\dim |A| = 0$ , cioè  $|A| = \{A\}$  e quindi  $A = Q$ . ■

OSSERVAZIONE 3. Nella dimostrazione della Prop. 2.1 abbiamo dato un procedimento costruttivo per la determinazione dell'equa-

zione della cubica 9-osculatrice ad  $E$  in un vertice di un triangolo tangenziale.

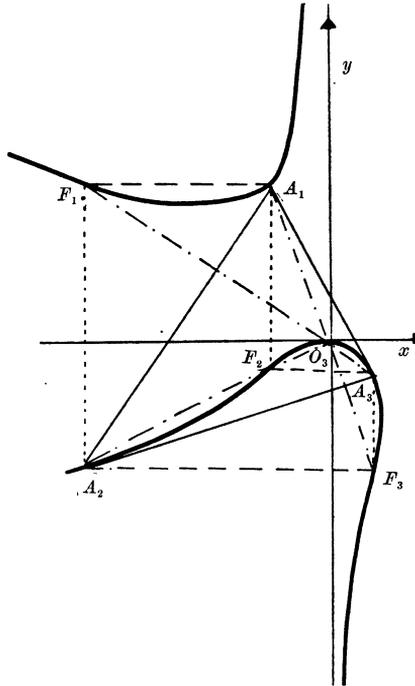


Figura 1

Ad esempio sia  $E$  la curva (cfr. fig. 1 per  $b = 0$ )

$$XY^2 + YZ^2 + ZX^2 + 3bXYZ \quad \text{con } b^3 \neq -1$$

che ha per triangolo tangenziale  $O_1 = (1, 0, 0)$ ,  $O_2 = (0, 1, 0)$ ,  $O_3 = (0, 0, 1)$ . Le (3) per  $O_3$  diventano

$$\begin{aligned} \frac{y^4 x}{z^2} &= \frac{y^2(-yz^2 - zx^2 - 3bxyz)}{z^2} = -y^3 - \frac{xy^2(x + 3by)}{z} = \\ &= -y^3 + \frac{(yz^2 + zx^2 + 3bxyz)(x + 3by)}{z} = \\ &= -y^3 + (yz + x^2 + 3bxy)(x + 3by), \end{aligned}$$

che è un elemento di  $R$ . Allora in  $k[X, Y, Z]$  il polinomio

$$(X + 3bY)(YZ + X^2 + 3bXY) - Y^3$$

determina una curva  $C_3 \subset \mathbb{P}_k^2$  che risulta essere 9-osculatrice ad  $E$  in  $O_3$ . Ogni altra curva 9-osculatrice ad  $E$  in  $O_3$  appartiene al fascio di cubiche individuato da  $E$  e da  $C_3$  ed ogni cubica del fascio risulta ridotta ed irriducibile.

### 3. Determinazione dei punti di tipo 9 di $E$ .

Premettiamo due lemmi.

LEMMA 3.1 (D. Gallarati, cfr. [4]). *Se  $E \subset \mathbb{P}_k^2$  è una cubica ellittica con  $k$  campo algebricamente chiuso di caratteristica arbitraria, se  $A, B, C$  sono punti (distinti) allineati di  $E$  per i quali esistono curve  $H_1, H_2 \subset \mathbb{P}_k^2$  (non necessariamente irriducibili o ridotte) tali che*

$$E \cdot H_1 = 3m_1 A, \quad E \cdot H_2 = 3m_2 B$$

*allora esiste una curva  $H \subset \mathbb{P}_k^2$  (non necessariamente irriducibile o ridotta) tale che  $E \cdot H = 3mC$ , ad esempio con  $m = m \cdot c \cdot m\{m_1, m_2\}$ . In particolare se fra  $A, B$  uno è un flesso ed uno è un punto di tipo 9 allora necessariamente  $C$  è di tipo 9; mentre se  $A, B$  sono entrambi di tipo 9 allora  $C$  può essere un flesso o un punto di tipo 9.*

DIM. Sia  $L$  la retta di  $\mathbb{P}_k^2$  tale che  $E \cdot L = A + B + C$ ; con  $m$  denotiamo il minimo comune multiplo fra  $m_1$  e  $m_2$ . Posto

$$h = \frac{l^{3m}}{h_1^{m/m_1} h_2^{m/m_2}},$$

risulta  $\text{div}(h) = 3mC$ . Applicando il Lemma 2.2 esiste un polinomio omogeneo  $H$  di grado  $m$  che dà la curva desiderata e questo prova la prima parte del lemma.

In particolare supponendo che  $A$  sia punto di tipo 9 e  $B$  un flesso, allora dalla Def. 1 segue che esistono curve  $H_1, H_2$  di ordine 3 e 1 rispettivamente, per cui esiste una curva  $H$  di ordine 3 tale che  $E \cdot H = 9C$ . Il punto  $C$  è di tipo 9 se escludiamo che esso possa essere

un flesso o un punto sestatico. Infatti se  $C$  fosse flesso o sestatico, l'essere allineato col flesso  $B$  e col punto  $A$  comporterebbe, per l'attuale lemma, che anche  $A$  sarebbe flesso o sestatico contrariamente a quanto detto nell'Osservazione 2 del n. 2. ■

LEMMA 3.2. *Se  $A \in E$  è un punto di tipo  $3n$  ed  $A' \in E$  è il punto tangenziale di  $A$ , allora  $A'$  è di tipo  $3n$  se  $n$  è dispari,  $A'$  è di tipo  $3n/2$  se  $n$  è pari.*

DIM. Sia  $H_1$  la curva tale che  $E \cdot H_1 = 3nA$  e  $T$  la retta tangente ad  $E$  in  $A$ . Procediamo come nella dimostrazione del Lemma 3.1 distinguendo due casi:  $n$  dispari ed  $n$  pari. Posto  $n' = n$  se  $n$  è dispari e  $n' = n/2$  se  $n$  è pari, si sceglie ora rispettivamente nei due casi

$$h = \frac{t^{3n'}}{h_1^2}, \quad \bar{h} = \frac{t^{3n'}}{h_1}$$

per cui  $\text{div}(h) = 3n'A'$ . Allora esiste una curva  $H \subset \mathbf{P}_k^2$  tale che  $E \cdot H = 3n'A'$ . Per provare che  $A'$  è di tipo  $3n'$  dobbiamo riconoscere che non esiste una curva  $D$  di ordine  $m$ , con  $m < n'$ , tale che  $E \cdot D = 3mA'$ . Se esistesse una tale curva, allora esisterebbe pure una curva  $\bar{D}$  di ordine  $n' - m$ , con  $\bar{D}$  definita dall'elemento  $h/\bar{d} \in K$ , tale che  $E \cdot \bar{D} = 3(n' - m)A'$ . Scambiando eventualmente  $D$  con  $\bar{D}$  si può supporre che  $m \leq n' - m$ . Allora quando  $n$  è dispari  $n = n' > 2m$ ; mentre  $n > n' = n/2 \geq 2m$  quando  $n$  è pari. Risulta allora

$$\text{div}\left(\frac{t^m}{\bar{d}}\right) = 3.2mA \quad \text{con } 2m < n$$

per cui  $A$  non sarebbe punto di tipo  $3n$  (cfr. Def. 1) come assunto nell'ipotesi. ■

PROPOSIZIONE 3.3. *Sia  $E \subset \mathbf{P}_k^2$  una cubica ellittica, con  $k$  campo algebricamente chiuso di caratteristica  $p$ ,  $p \neq 2, 3$ . I punti di tipo 9 di  $E$  sono i 72 vertici di 24 triangoli tangenziali che si possono ottenere dall'equazione di  $E$  con un procedimento algebrico.*

DIM. Procederemo per passi.

PASSO I. Con un eventuale cambio del riferimento delle coordinate di  $\mathbf{P}_k^2$ , come accennato nel n. 1, possiamo assumere che  $E$  abbia

la forma canonica

$$(1) \quad X^3 + Y^3 + Z^3 - 3aXYZ \quad \text{con } a^3 \neq 1.$$

PASSO II. Posto

$$c_i = \sqrt[3]{\varepsilon^{i-1} + \frac{a}{\sqrt[3]{1-a^3}}} \quad (i = 1, 2, 3)$$

con le determinazioni delle radici cubiche tali che  $c_1 c_2 c_3 \sqrt[3]{1-a^3} = 1$ , consideriamo i punti

$(c_1, c_2, c_3)$	$(c_1, \varepsilon c_2, \varepsilon^2 c_3)$	$(c_1, \varepsilon^2 c_2, \varepsilon c_3)$	
$(c_2, c_3, c_1)$	$(c_2, \varepsilon c_3, \varepsilon^2 c_1)$	$(c_2, \varepsilon^2 c_3, \varepsilon c_1)$	(tabella $\Gamma_0^+$ )
$(c_3, \varepsilon c_1, \varepsilon^2 c_2)$	$(c_3, \varepsilon^2 c_1, \varepsilon c_2)$	$(c_3, c_1, c_2)$	
$(c_1, c_3, c_2)$	$(c_1, \varepsilon^2 c_3, \varepsilon c_2)$	$(c_1, \varepsilon c_3, \varepsilon^2 c_2)$	
$(c_3, c_2, c_1)$	$(c_3, \varepsilon^2 c_2, \varepsilon c_1)$	$(c_3, \varepsilon c_2, \varepsilon^2 c_1)$	(tabella $\Gamma_0^-$ )
$(c_2, \varepsilon^2 c_1, \varepsilon c_3)$	$(c_2, \varepsilon c_1, \varepsilon^2 c_3)$	$(c_2, c_1, c_3)$	

Dal calcolo diretto si constata che

- a) i punti di  $\Gamma_0^+ \cup \Gamma_0^-$  sono 18 tra loro distinti;
- b) i punti di ogni riga delle tabelle  $\Gamma_0^+$  e  $\Gamma_0^-$  sono vertici di uno stesso triangolo tangenziale e quindi sono punti di tipo 9 di  $E$ ;
- c) i 9 punti di  $\Gamma_0^+$  (di  $\Gamma_0^-$ ) appartengono a 9 rette distinte congiungenti un arbitrario vertice di un triangolo con un arbitrario vertice di un secondo triangolo e passanti di conseguenza per un vertice del terzo;
- d) un punto arbitrario di  $\Gamma_0^+$  e un punto arbitrario di  $\Gamma_0^-$  sono allineati con un flesso di  $E$  (dato dalla tabella  $\Phi$  del n. 1);
- e) un punto arbitrario di  $\Gamma_0^+$  (di  $\Gamma_0^-$ ) ed un flesso arbitrario di  $E$  sono allineati con un punto di  $\Gamma_0^-$  (di  $\Gamma_0^+$ ).

PASSO III. Cambiando il riferimento di  $\mathbb{P}_k^2$  con le

$$\begin{cases} X = X_1 + Y_1 + Z_1 \\ Y = X_1 + \varepsilon^2 Y_1 + \varepsilon Z_1 \\ Z = X_1 + \varepsilon Y_1 + \varepsilon^2 Z_1 \end{cases}$$

otteniamo per  $E$  la

$$(1') \quad X_1^3 + Y_1^3 + Z_1^3 - 3 \frac{a+2}{a-1} X_1 Y_1 Z_1,$$

e, sostituendo  $a$  con  $a_1 = (a+2)/(a-1)$ , otteniamo come al Passo II nel riferimento  $(X_1, Y_1, Z_1)$  un insieme  $\Gamma_1$  di punti di tipo 9 di  $E$  che godono delle medesime proprietà  $a), b), c), d), e)$  dell'insieme  $\Gamma_0$  (si noti che la tabella  $\Phi$  del n. 1 fornisce i flessi di  $E$  anche rispetto al riferimento  $(X_1, Y_1, Z_1)$ ).

Verifichiamo ora che  $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$ . Allo scopo si consideri la funzione razionale su  $E$

$$\alpha = \frac{(x^3 + y^3 + z^3)^2}{x^6 + y^6 + z^6}$$

che rispetto al riferimento  $(X_1, Y_1, Z_1)$  diviene

$$\alpha = \frac{3(x_1^3 + y_1^3 + z_1^3 + 6x_1 y_1 z_1)^2}{x_1^6 + y_1^6 + z_1^6 + 30x_1 y_1 z_1 (x_1^3 + y_1^3 + z_1^3) + 20(x_1^3 y_1^3 + x_1^3 z_1^3 + y_1^3 z_1^3) + 90x_1^2 y_1^2 z_1^2}.$$

Sui punti di  $\Gamma_0$  e di  $\Gamma_1$   $\alpha$  assume lo stesso valore costante e si ha, con ovvio significato dei simboli,

$$\alpha(\Gamma_0) = 3, \quad \alpha(\Gamma_1) = \frac{3a^2}{3a^2 + 2a + 2}.$$

Essendo per ipotesi  $a^3 \neq 1$  risulta  $\alpha(\Gamma_0) \neq \alpha(\Gamma_1)$  e quindi  $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$ .

PASSO IV. Dal Lemma 3.1 ogni punto  $C \in E$  allineato con un punto  $A$  ed un punto  $B$ , entrambi di tipo 9 di  $E$ , è un flesso o un punto di tipo 9. Se assumiamo  $A \in \Gamma_0$  e  $B \in \Gamma_1$  il punto  $C \in E$  allineato con tali  $A$  e  $B$  non può essere un flesso altrimenti, per la  $e)$ ,  $A, B \in \Gamma_0 \cap \Gamma_1$ , contrariamente a quanto provato al Passo III. Quindi  $C$  è un punto di tipo 9 di  $E$  e per la  $c)$   $C \notin \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ . Facendo variare  $A$  in  $\Gamma_0$  e  $B$  in  $\Gamma_1$ ,  $C$  descrive un insieme costituito da punti di tipo 9 non appartenenti a  $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$ .

PASSO V. Dimostriamo ora che quando  $A$  varia in un insieme di due punti  $A', A'' \in \Gamma_1$  che sono allineati con un flesso  $F \in E$  (e per il resto sono arbitrari) e  $B$  varia in  $\Gamma_0$  allora i punti  $C \in E$  allineati con  $A$  e  $B$  descrivono un insieme di 36 punti distinti di tipo 9. Infatti

l'insieme delle rette che congiungono  $A'$  con un punto  $B$  variabile in  $\Gamma_0$  sono 18 (quanti i punti di  $\Gamma_0$ ) e tutte distinte tra loro per la  $e$ ). Tali rette intersecano  $E$  secondo il punto  $A'$  contato 18 volte, secondo tutti i punti di  $\Gamma_0$  e secondo un insieme  $\Gamma'$  di 18 punti che sono distinti tra loro e da  $A'$  e dai punti di  $\Gamma_0$ , per il Passo IV. Lo stesso dicasi per i punti di  $E$  allineati con  $A''$  e con  $B$  variabile in  $\Gamma_0$ ; indichiamo con  $\Gamma''$  l'insieme di tali 18 punti. Verifichiamo che  $\Gamma' \cap \Gamma'' = \emptyset$ .

Se esistesse  $C \in \Gamma' \cap \Gamma''$  allora esisterebbero due rette  $R_1, R_2$  tali che  $\text{div}(r_1) = A' + B' + C$ ,  $\text{div}(r_2) = A'' + B'' + C$  con  $B', B'' \in \Gamma_0$ . Indichiamo con  $T$  la retta tangente in  $C$  ad  $E$ , con  $S$  la retta congiungente  $A'$  con  $A''$ , con  $U$  la retta congiungente  $B'$  con  $B''$  ed infine denotiamo con  $C_1$  il punto tangenziale di  $C$ . Risulta

$$\text{div} \left( \frac{stu}{r_1 r_2} \right) = F + C_1 + D$$

ove  $D$  denota il punto di  $E$  allineato con  $B'$  e  $B''$ . Proviamo che  $D \in \Gamma_0$ . Per il Lemma 2.2 i punti  $F, C_1, D$  sono allineati. Ora il punto  $C_1$  è di tipo 9 in quanto tangenziale di  $C$  (cfr. Lemma 3.2); d'altra parte, essendo  $D$  allineato con  $B'$  e  $B''$ ,  $D$  è un flesso oppure è di tipo 9 per le  $d$ ) e  $e$ ) e nel secondo caso  $D \in \Gamma_0$ . Escludiamo il primo caso; infatti  $C_1$  sarebbe allineato con i due flessi  $F$  e  $D$  il che non può succedere in quanto  $C_1$  è di tipo 9. Dunque  $D \in \Gamma_0$ . Per la  $e$ ) anche  $C_1 \in \Gamma_0$  ed essendo  $C$  il tangenziale del tangenziale di  $C_1$  allora per la  $b$ )  $C \in \Gamma_0$ . Ciò è in contrasto con quanto stabilito al Passo IV.

PASSO VI. Riconosciamo che tutti i punti di tipo 9 di  $E$  formano l'insieme  $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma' \cup \Gamma''$ . Infatti dal Passo V  $\Gamma$  è costituito da 72 punti distinti di tipo 9 di  $E$  che sono vertici di 24 triangoli tangenziali di  $E$ ; inoltre gli elementi di  $\Gamma$  ed i flessi di  $E$  sono tutti elementi di ordine 9 per  $(E, \oplus)$ . D'altra parte il sottogruppo di  $(E, \oplus)$  costituito dagli elementi di ordine 9 consta di 81 elementi (cfr. [5], Example 4.8.1, pag. 322) per cui non possono esistere in  $E$  punti di tipo 9 diversi da quelli contenuti in  $\Gamma$ . ■

#### 4. Poligoni tangenziali di $E$ .

In questo numero si proponiamo di estendere la nozione di triangolo tangenziale in quella di poligono tangenziale e di dare informazioni sul tipo dei vertici di tali poligoni.

DEFINIZIONE 3. Diciamo che i punti distinti  $P_0, \dots, P_{r-1} \in E$  sono i vertici di un poligono tangenziale di  $E$  di  $r$  lati se  $P_i$  è il tangenziale del punto  $P_{i-1}$  per  $i = 1, \dots, r-1$  e  $P_0$  è il tangenziale di  $P_{r-1}$ : Le rette  $P_0P_1, \dots, P_{r-1}P_0$  si dicono i lati del poligono tangenziale.

OSSERVAZIONE 4. La Def. 3 può essere accolta per  $r \geq 3$  sebbene per  $r = 1$  si potrebbero considerare poligoni tangenziali di un vertice e di un lato consistenti in un flesso di  $E$  e nella relativa tangente; per  $r = 2$  la Def. 3 non ha senso.

Si osservi inoltre che se  $A \in E$  è un vertice di un poligono tangenziale di  $r$  lati, allora  $A$  non può essere vertice di un poligono tangenziale di  $r'$  lati con  $r' < r$ .

PROPOSIZIONE 4.1. Il punto  $A \in E$  è vertice di un poligono tangenziale di  $E$  di  $r$  lati, con  $r \geq 3$ , se e solo se esiste una curva  $C_n \subset \mathbf{P}_k^2$  di ordine  $n = (2^r - (-1)^r)/3$  tale che  $E \cdot C_n = 3nA$ . (k campo algebricamente chiuso di caratteristica arbitraria.)

DIM. È l'ovvia estensione della dim. della Prop. 2.1, prescindendo dal fatto che  $A$  sia di tipo  $3n$ . ■

Ci si pone ora il problema di stabilire in quali casi la curva  $C_n$  è ridotta ed irriducibile e di ordine minimo tra tutte quelle che godono di tale proprietà, cioè stabilire quando il vertice  $A$  è di tipo  $3n$  e in caso contrario determinare il tipo dei vertici di un poligono tangenziale di  $r$  lati per  $r > 3$ . Intanto abbiamo la seguente

OSSERVAZIONE 5. Per il Lemma 3.2 possiamo dire a priori che i vertici di un poligono tangenziale sono tutti dello stesso tipo ed esso deve essere dispari. Infatti se fosse pari il tipo di un vertice, allora il tipo del vertice successivo sarebbe la metà del precedente; il tipo dell'ulteriore vertice sarebbe non maggiore della metà del tipo del primo, ecc. Dopo  $r$  passi otterremo una contraddizione.

Informazioni sull'insieme di tutte le curve  $C_n$  della Prop. 4.1 vengono date dal

LEMMA 4.2. Sia  $E$  una cubica ellittica di  $\mathbf{P}_k^2$ , e  $P \in E$  tale che esiste una curva  $C_n \subset \mathbf{P}_k^2$  tale che  $E \cdot C_n = 3nP$ . Detto  $C_n(P)$  l'insieme di tutte tali curve, allora o tutte le curve  $C_n$  sono irriducibili oppure esiste una curva irriducibile e ridotta  $H_{n'}$ , di ordine  $n'$ , definita da un polinomio  $H_{n'}$ , tale che ogni curva di  $C_n(P)$  è data da un polinomio del tipo

$$H_{n'}^t + GE, \quad E, G \in k[X, Y, Z] \text{ ed } E \text{ definente la cubica } E.$$

DIM. Se le  $C_n$  di  $\mathcal{C}_n(P)$  non sono tutte irriducibili, basta prendere fra le curve componenti ridotte ed irriducibili delle curve di  $\mathcal{C}_n(P)$  una curva  $H_{n'}$  di ordine  $n'$  minimo. Esistono allora degli interi  $t$  e  $n''$  tali che  $n = tn' + n''$ , con  $0 \leq n'' < n'$ . Sia  $C_n \in \mathcal{C}_n(P)$  e si consideri il divisore

$$\operatorname{div}\left(\frac{c_n}{h_{n'}^t}\right) = 3(n - tn')P = 3n''P.$$

Se  $n'' > 0$  allora per il Lemma 2.2 esiste almeno una curva  $H_{n''}$  tale che la curva che ha per componenti  $H_{n'}$  e  $tH_{n''}$  appartiene a  $\mathcal{C}_n(P)$ ; tale curva ha senz'altro una componente ridotta ed irriducibile di ordine  $\leq n'' < n'$ , il che non può essere per la minimalità di  $n'$ . ■

COROLLARIO 4.3. *Se  $E \cdot C_n = 3nP$  si ha che  $P$  è di tipo  $3n$  oppure di tipo  $3m$  con  $m = n/t$ .*

Esaminiamo ora il tipo dei vertici di un poligono tangenziale di  $r$  lati per alcuni valori di  $r$ . Per  $r = 4, 5$  si ottengono rispettivamente quadrilateri e pentagoni tangenziali i cui vertici, con molteplicità 15 e 33 rispettivamente, sono intersezione completa di  $E$  con curve di ordine 5 e 11. Tali curve non possono essere riducibili perchè, altrimenti, per il Lemma 4.2, dovrebbero essere rette contate 5 e 11 volte e quindi i vertici sarebbero flessi. Quindi:

*I vertici di ogni quadrilatero tangenziale sono tutti di tipo 15 e quelli di un pentagono tangenziale sono tutti di tipo 33.*

Più in generale:

*I vertici di ogni poligono tangenziale di  $r$  lati sono tutti di tipo*

$$3n = 2r - (-1)^r \text{ se l'intero } (2r - (-1)^r)/3 \text{ è primo.}$$

Per  $r = 6$  si ottiene  $n = 21$  e si presentano due possibilità: le curve  $C_{21}$  tali che  $E \cdot C_{21} = 63P$ , con  $P$  vertice di un esagono tangenziale di  $E$ , possono essere tutte irriducibili e ridotte, ed allora  $P$  ed ogni altro vertice dell'esagono sono di tipo 63; oppure qualcuna delle  $C_{21}$  risulta essere una curva riducibile in una  $C_7$ , contata 3 volte (non può essere  $C_3$  contata 7 volte perchè altrimenti  $P$  sarebbe vertice di un triangolo tangenziale, il che non può essere, per l'Osservazione 4). In tale caso ogni vertice dell'esagono tangenziale è di tipo 21. Rinviando al prossimo numero per un esempio di esagono tangenziale i cui vertici sono di tipo 21.

### 5. Poligoni tangenziali aperti di $E$ .

DEFINIZIONE 4. Diciamo che i punti distinti  $P_0, \dots, P_r \in E$  sono, nell'ordine, vertici di un  $Q$ -poligono tangenziale aperto di  $E$  di  $r$  lati  $P_0P_1, \dots, P_{r-1}P_r$  se  $P_i$  è il tangenziale di  $P_{i-1}$  per  $i = 1, \dots, r$  ed inoltre  $P_0, P_r, Q$  sono punti allineati, con  $Q$  punto fissato di  $E$ .

OSSERVAZIONE 6. Può darsi che i vertici di un  $Q$ -poligono tangenziale aperto di  $r$  lati siano vertici di un poligono tangenziale di  $s$  lati, con  $s > r$  (cfr. l'esempio seguente). Può invece accadere che nessun vertice di un  $Q$ -poligono tangenziale aperto sia vertice di qualche poligono tangenziale chiuso. Ad esempio ciò succede se tutti i vertici del  $Q$ -poligono tangenziale aperto sono di tipo pari (cfr. Osservazione 5 del n. 4).

Osserviamo infine che non è detto che i vertici di un  $Q$ -poligono tangenziale aperto siano tutti dello stesso tipo.

La seguente proposizione dà informazioni sul primo vertice di un poligono tangenziale aperto.

PROPOSIZIONE 5.1. Il punto  $A \in E$  è il primo vertice di un  $Q$ -poligono tangenziale aperto di  $E$  di  $r$  lati, con  $Q$  punto fissato di  $E$  di tipo  $3m$ , se e solo se esiste un curva  $C_n \subset \mathbb{P}_k^2$ , di ordine  $n = m(2^r + (-1)^r)$ , tale che  $E \cdot C_n = 3nA$ , per  $r \geq 2$ .

DIM. Si suppone che esista un  $Q$ -poligono tangenziale aperto di  $E$  di  $r$  lati, con  $r \geq 2$ , e  $A = P_0$ . Si supponga che  $C_m$  sia la curva tale che  $E \cdot C_m = 3mQ$ . Indicata con  $T_i$  la retta tangente ad  $E$  in  $P_i$ ,  $i = 0, \dots, r-1$ , e con  $S$  la retta congiungente  $P_0, P_r, Q$ , si ponga

$$h_r = \prod_{j=0}^{r-1} t_j^{(-1)^j 2^{r-1-j}}.$$

Risulta allora

$$\operatorname{div} (h_r^{3m} s^{3m(-1)^r} c_m^{(-1)^{r+1}}) = 3m(2^r + (-1)^r)P_0.$$

Per il Lemma 2.2 esiste allora almeno una curva  $C_n$  di ordine  $n = m(2^r + (-1)^r)$  per cui  $E \cdot C_n = 3nA$ . Il viceversa si dimostra facilmente con considerazioni simili a quelle della dim. della Prop. 2.1. ■

Per stabilire il tipo dei vertici  $P_0, \dots, P_r$  di un  $Q$ -poligono tangenziale aperto di  $r$  lati, con  $r \geq 2$ , si pone lo stesso problema del n. 4 precedente: la Prop. 5.1 assicura l'esistenza e sostanzialmente dice come trovare l'equazione (cfr. Osservazione 2 del n. 2) di una curva  $C_n$  tale che  $E \cdot C_n = 3nP_0$ , ma nulla dice sulla sua eventuale riducibilità. È ancora applicabile il Lemma 4.2 che permette di affermare che: se  $Q$  è un flesso e l'intero  $n = 2^r + (-1)^r$  è primo, con  $r \geq 2$ , allora il punto  $P_0$  è di tipo  $3(2^r + (-1)^r)$ . In questo modo si ottengono ad esempio punti  $P_0 \in E$  di tipo 15, 21, 51, 93 rispettivamente per  $r = 2, 3, 4, 5$  ed  $m = 1$ . Più difficile è dire in generale qual'è il tipo del primo vertice di un  $Q$ -poligono tangenziale aperto per  $r \geq 6$  e  $m \geq 2$ .

Concludiamo col seguente esempio che illustra la nozione di esagono tangenziale e di poligono tangenziale aperto di  $r = 3$  lati ed il loro collegamento.

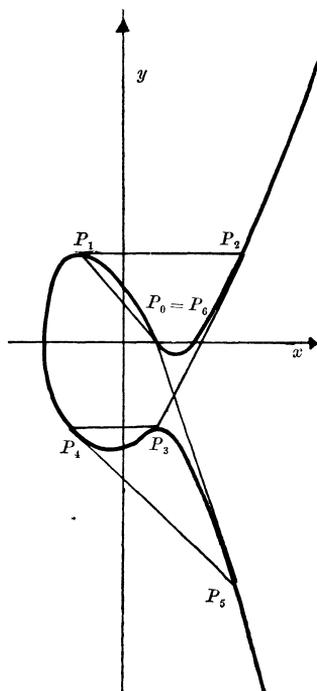


Figura 2

ESEMPIO. Sia  $E$  la cubica ellittica (cfr. fig. 2)

$$Y^2Z + XYZ + YZ^2 - X^3 + X^2Z + 3XZ^2 - 3Z^3$$

di  $\mathbf{P}_k^2$ , con  $k$  campo di caratteristica  $p$ ,  $p \neq 2, 3$ .  $E$  contiene il flesso  $F = (0, 1, 0)$  ed il punto  $A = (1, 0, 1)$ . Detto  $P_0 = A$  e  $P_i$  il punto tangenziale di  $P_{i-1}$  per  $i = 1, \dots, 6$ , risulta

$$\begin{aligned} P_1 &= (-1, 2, 1), & P_2 &= (3, 2, 1), & P_3 &= (1, -2, 1), \\ P_4 &= (-1, -2, 1), & P_5 &= (3, -6, 1), & P_6 &= P_0. \end{aligned}$$

Poichè  $P_0, P_3, F$  sono allineati, si può considerare  $P_0$  quale primo vertice di un  $F$ -poligono tangenziale aperto di  $r = 3$  lati; esiste perciò una curva ridotta ed irriducibile  $C_7$  tale che  $E \cdot C_7 = 21A$  ed  $A$  è di tipo 21. D'altra parte abbiamo visto che  $A$ , come del resto tutti gli altri  $P_i$ , ( $i = 1, \dots, 5$ ), risulta essere pure vertice di un esagono tangenziale di  $E$ ; così  $A$  (e  $P_i$ ) è vertice di un esagono tangenziale ed è di tipo 21.

## 6. Osservazioni.

1) Se  $P_0, \dots, P_{r-1} \in E$  sono vertici di un poligono tangenziale di  $E$ , allora esiste almeno una curva  $C_r \subset \mathbf{P}_k^2$ , di ordine  $r$ , tale che

$$E \cdot C_r = 3(P_0 + \dots + P_{r-1}).$$

Infatti dette  $C_n^{(i)}$  e  $T_i$  rispettivamente la curva  $3n$ -osculatrice e la retta tangente ad  $E$  in  $P_i$ , ( $i = 0, \dots, r-1$ ), basta considerare

$$g = \frac{c_n^{(0)} \dots c_n^{(r-1)}}{(t_1 \dots t_{r-1})^{n-1}} \in K$$

avente per divisore  $\text{div}(g) = 3(P_0 + \dots + P_{r-1})$  che individua almeno una curva  $C_r$  suddetta.

2) Se  $C_n$  e  $C'_n$  sono due curve di  $\mathbf{P}_k^2$  tali che  $E \cdot C_n = (3n-1)P_0 + P_1$  e  $E \cdot C'_n = (3n-1)P_0 + P'_1$  allora risulta  $P_1 = P'_1$  per il teorema di Riemann-Roch (cfr. dim. della Prop. 2.1); si può perciò gene-

realizzare in modo ovvio la nozione di poligono tangenziale per  $n \geq 1$ , considerando come lati curve  $C_n$  anzichè rette. I vertici di siffatti poligoni tangenziali generalizzati sono ancora tutti punti dello stesso tipo 3s.

3) Quanto fatto per la cubica ellittica piana  $E$  si può ripetere per la quartica ellittica sghemba  $C_4 \subset \mathbb{P}_k^3$ ; basta fissare un punto  $\bar{P} \in C_4$  e per ogni punto  $P \in C_4$  chiamare tangenziale di  $P$  il punto  $Q \in C_4$  ulteriore intersezione di  $C_4$  col piano tangente a  $C_4$  in  $P$  e passante per  $\bar{P}$ . Di fatto ciò non dice nulla di nuovo perchè  $C_4$  è isomorfa alla cubica ellittica piana proiezione di  $C_4$  da  $\bar{P}$ , e tale proiezione mantiene i tangenziali.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] S. ABHYANKAR, *Remark on Hessians and flexes*, Nieuw Archief v. Wisk., (3) **11** (1963), pp. 110-117.
- [2] P. APPEL - E. GOURSAT, *Théorie des fonctions algébriques*, Gauthier-Villars, Paris (1895).
- [3] F. ENRIQUES - O. CHISINI, *Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, vol. I, II, III, Zanichelli, Bologna (1918).
- [4] D. GALLARATI, *Ricerche sul contatto di superficie algebriche lungo curve*, Mémoires de l'Ac. Roy. Belgique, **32** (1960).
- [5] R. HARTSHORNE, *Algebraic Geometry*, Springer, New York (1977).
- [6] D. MUMFORD, *Lectures on curves on an Algebraic Surface*, Annals of Math. Studies 59, Princeton U.P. (1966).
- [7] J. G. SEMPLE - G. T. KNEBONE, *Algebraic Curves*, Oxford (1959).
- [8] E. STAGNARO, *Su alcune generalizzazioni della nozione di dominio fattoriale*, Ann. Univ. Ferrara, **19** (1974), pp. 157-179.

Manoscritto pervenuto in redazione il 20 dicembre 1978.