RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ROSALBA BARATTERO

Sul polinomio di Hilbert di un modulo graduato

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 50 (1973), p. 197-222

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1973__50__197_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 50 (1973)

Sul polinomio di Hilbert di un modulo graduato.

ROSALBA BARATTERO (*)

SOMMARIO - Oggetto del nostro studio è il comportamento del polinomio di Hilbert di un modulo graduato rispetto alle operazioni algebriche di quoziente e di prodotto tensoriale.

SUMMARY - The object of our study is the behaviour of the Hilbert polynomial of a graded module with regard to the algebraical operations of quotient and tensor product.

Introduzione.

Scopo di questo lavoro è lo studio del polinomio di Hilbert di un modulo graduato e in particolare del suo comportamento rispetto ad alcune operazioni quali quelle di quozientare e di tensorizzare, che hanno un ben preciso significato geometrico se applicate alle k-varietà algebriche proiettive.

È noto che il polinomio di Hilbert di una varietà proiettiva dà informazioni sulla dimensione, l'ordine, il genere aritmetico e quello di opportune sezioni con sottospazi del P_n^k considerato. Si è cercato di vedere allora se analoghe informazioni algebriche si possono ottenere estendendo ai moduli graduati tali risultati.

In particolare si sono studiate nel § 1 le relazioni che intercorrono tra i polinomi di Hilbert di un A-modulo graduato M (A anello gra-

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica dell'Università - Via L. B. Alberti 4 - 16132 Genova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca del C.N.R.

duato) e dei moduli graduati quozienti del tipo M/fM con f elemento omogeneo di A (cfr. teor. 2), vedendo tra l'altro quali sono i legami tra la dimensione graduata e l'ordine di tali moduli (cfr. def. 1 e 2; prop. 2). Quindi nel § 2 si è studiato, mediante la serie di Poincaré il polinomio di Hilbert dell'$A \otimes_{A_0} B$-modulo graduato $M \otimes_{A_0} N$ dove M (risp. N) è un A-modulo (risp. B-modulo) graduato con $A = \bigoplus_{r \in \mathbf{N}} A_r$ (risp. $B = \bigoplus_{s \in \mathbf{N}} B_s$) e $A_0 = B_0$ e se ne è data una scrittura precisa in funzione dei polinomi di Hilbert di M ed N (cfr. dim. teor. 3) ottenendo relazioni sulle dimensioni graduate e gli ordini di $M \otimes_{A_0} N$ (cfr. teor. 3 e cor. 3).

Nel § 3 si è visto quale sia il comportamente del polinomio di Hilbert rispetto al cambiamento dell'anello di base (cfr. prop. 4) e si è quindi cercato l'interpretazione geometrica (cfr. cor. 4 e osserv. 5).

Infine nel § 4 si sono visti i legami tra la dimensione graduata e la dimensione di Krull (cfr. prop. 5 e teor. 4) degli anelli e dei moduli graduati dando così una nuova reinterpretazione a taluni fatti precedenti (cor. 6 e 7) e si è per ultimo, preso in considerazione il polinomio di Hilbert di $M \otimes_A N$ (con M ed N A-moduli graduati) ed in particolare la sua dimensione graduata (cfr. prop. 7).

Avvertenza. Gli anelli considerati sono supposti commutativi e dotati di identità, e i moduli sono supposti unitari.

§ 1. In questo paragrafo studiamo le relazioni che intercorrono tra il polinomio di Hilbert di un A-modulo graduato M (A anello graduato) e di M/fM dove f è un elemento omogeneo di A (teor. 2).

Il confronto dei gradi e dei coefficienti direttivi di questi polinomi permette di estendere ai moduli alcuni fatti noti sulla dimensione e l'ordine delle varietà algebriche proiettive (prop. 2).

Richiamiamo ora il teorema e il corollario su cui si fonda la nozione di polinomio di Hilbert di un modulo graduato.

Siano $A = \bigoplus_{m \in \mathbf{N}} A_m$ un anello graduato con A_0 artiniano e A sia finitamente generato (f.g.) (come A_0-algebra) dagli elementi $x_1, \ldots, x_s$ che possiamo prendere omogenei di grado $k_1, \ldots, k_s$ ($k_i > 0$), (A lo denotiamo allora $A = A_0[x_1, \ldots, x_s]$) e sia $M = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} M_n$ un A-modulo graduato f.g. Risulta quindi definita la lunghezza degli A_0-moduli M_n (che denotiamo $l_{A_0}(M_n)$ o se non c'è ambiguità $l(M_n)$) (cfr. [9], vol. I, ch. III, § 10, th. 18 e § 11, th. 21). In queste ipotesi vale allora il seguente teorema (cfr. [1], ch. 11, th. 11.1).

TEOREMA 1. *La serie di Poincaré* $P(M, t) = \sum_{n=0}^{\infty} l(M_n) t^n$ *è una funzione razionale della forma*

$$\frac{f(t)}{\prod_{i=1}^{s} (1-t^{k_i})}$$

dove $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$.

In particolare ci interessa il seguente corollario (cfr. [1], ch. 11, cor. 11.2 e dim.).

COROLLARIO 1. *Se* $k_i = 1 \ \forall i$, *allora per* n *sufficientemente grande,* $l(M_n)$ *è un polinomio in* n *(che denotiamo* $p_M(n)$*), a coefficienti razionali di grado* $d-1 \leqslant s-1$ *dove* d *è l'ordine del polo di* $P(M, t)$ *per* $t = 1$. *Più precisamente si ha*:

$$p_M(n) = \sum_{k=0}^{N} a_k \binom{d+n-k-1}{d-1}$$

dove $f(t) = \sum_{k=0}^{N} a_k t^k$.

Il polinomio $p_M(n)$ viene detto *polinomio di Hilbert del modulo graduato* M.

Concluse le premesse possiamo ora enunciare il seguente teorema, facendo presente che da ora in poi, salvo avviso contrario, denoteremo con $A_0[x_1, \dots, x_s]$ gli anelli graduati f.g. come algebre sull'anello base A_0 da elementi omogenei (non nulli) di primo grado.

TEOREMA 2. *Siano* $A = A_0[x_1, \dots, x_s] = \bigoplus_{m \in \mathbf{N}} A_m$ *un anello graduato,* A_0 *artiniano,* M *un* A*-modulo graduato* f.g., $f \in A_r (f \neq 0, r \geqslant 1)$ *ed* $M' = M/fM$. *Allora si ha*:

a) $p_M(n) - p_M(n-r) \leqslant p_{M'}(n)$.

b) Inoltre se f *non è* 0*-divisore in* M, *vale il segno uguale.*

DIM. Sia $M = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} M_n$, fM è un sottomodulo omogeneo di M, infatti se $fy \in fM$ $(y \in M)$ e $y = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} y_n$ si ha $fy = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} fy_n$ dove $fy_n \in fM$, $\forall n \in \mathrm{N}$. Allora per definizione $fM = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} (fM)_n = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} (fM \cap M_n)$ con gli $(fM)_n$ sottogruppi additivi di fM e di M_n.

Risultando

$$\begin{aligned} (fM)_n = fM \cap M_n &= 0 && \text{per } 0 \leqslant n < r\,, \\ &= fM_{n-r} && \text{per } n \geqslant r\,, \end{aligned}$$

si ha:

$$fM = (0) \oplus fM_0 \oplus fM_1 \oplus \ldots \oplus fM_n \oplus \ldots .$$

Considerando l'omomorfismo canonico φ: $M \to M/fM$ si ha (cfr. [9], vol. II, ch. VII, § 2, lemma $1(b)$):

$$\begin{aligned} M/fM &= \bigoplus_{n\in\mathbf{N}} \varphi(M_n) \\ &= \bigoplus_{n\in\mathbf{N}} M_n/fM \cap M_n = M_n \qquad &&\text{per } 0 \leqslant n < r\,, \\ &\qquad\qquad\qquad\quad = M_n/fM_{n-r} &&\text{per } n \geqslant r\,. \end{aligned}$$

Osserviamo che M_n e $\varphi(M_n)$ sono A_0-moduli di lunghezza finita e che si ha: $l(M_n/fM_{n-r}) = l(M_n) - l(fM_{n-r})$ $\forall n \geqslant 0$ (cfr. [9], Vol. I, ch. III, § 11, teor. 20), (l'uguaglianza scritta non perde di significato quando $n < r$, purchè si sottointenda $M_n = (0)$ per $n < 0$). Ma fM_{n-r} è un quoziente di M_{n-r} e quindi $l(fM_{n-r}) \leqslant l(M_{n-r})$.

Se poi f non è 0-divisore in $M \Rightarrow fM_{n-r} \simeq M_{n-r}$ (come A_0-moduli)$\Rightarrow$ $\Rightarrow l(fM_{n-r}) = l(M_{n-r})$ e la tesi segue quindi per definizione di polinomio di Hilbert.

Mostriamo ora con un esempio come l'ipotesi che f sia non 0-divisore in M, è essenziale per ottenere l'uguaglianza del teor. 2.

Esempio 1. Siano A ed M come nella ipotesi del teor. 2 e inoltre sia $f \in \operatorname{Ann} M$ e $p_M(n)$ uguale ad una costante $a > 0$, allora in tal caso $M' = M$ e quindi $p_M(n) - p_M(n-r) = 0$ mentre $p_{M'}(n) = a > 0$.

Osserviamo che il teorema 2 estende un risultato noto, valido sotto le ipotesi più restrittive che A sia l'anello dei polinomi in s indeterminate a coefficienti in un corpo k e che gli A-moduli considerati siano quozienti del tipo $A/\mathfrak{a}$ (con $\mathfrak{a}$ ideale omogeneo di A). (cfr. [4], ch. IV, § 2, pag. 223).

Il teorema 2 ci consente di maggiorare in modo abbastanza semplice o calcolare direttamente il polinomio di Hilbert di taluni moduli graduati quozienti.

Premettiamo ora il seguente

Lemma 1. *Siano $A = A_0[x_1, \ldots, x_s] = \bigoplus_{n\in\mathbf{N}} A_n$ un anello graduato, A_0 artiniano. Considerando l'A-modulo graduato A si ha allora:*

$a)$ $p_A(n) \leqslant l(A_0)\binom{n+s-1}{s-1}$

b) *Se inoltre A è l'anello graduato dei polinomi in s indeterminate a coefficienti in A_0, vale il segno uguale* (cfr. [8], § 3, n. 2, esempio 5, pag. 19).

DIM. Sia $R = A_0[X_1, \ldots, X_s] = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} R_n$ l'R-modulo graduato dei polinomi in s indeterminate a coefficienti in A_0. Poichè gli R_n sono A_0-moduli liberi di base $X_1^{m_1} \ldots X_s^{m_s}$ dove $\sum_{i=1}^{s} m_i = n$ si ha:

$$l(R_n) = l(A_0)\, rg(R_n) = l(A_0) \binom{n+s-1}{s-1} .$$

Ma essendo gli A_n dei quozienti di R_n si ha che:

$$l(A_n) \leqslant l(R_n) \qquad (\forall n \in \mathbf{N}) .$$

Diamo ora la definizione di dimensione graduata e di ordine di un modulo graduato che ci saranno utili anche in seguito.

DEF. 1. Siano $A = A_0[x_1, \ldots, x_s] = \bigoplus_{m \in \mathbf{N}} A_m$ un anello graduato, A_0 artiniano, $M = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} M_n$ un A-modulo graduato f.g. Il grado di $p_M(n)$ sarà chiamato *dimensione graduata* di M e lo denoteremo $\dim_g M$.

Per i legami che tale dimensione ha con la dimensione di Krull cfr. § 4 prop. 5 e teor. 4.

DEF. 2. Nelle ipotesi della def. 1 il coefficiente direttivo di $p_M(n)$ « a meno del fattore $1/(d-1)!$ » (cfr. Cor. 1) sarà chiamato *ordine* di M e lo denoteremo ord M.

OSSERVAZIONE 1. Nel caso sia $A = k[X_1, \ldots, X_s]$ l'anello dei polinomi in s indeterminate a coefficienti in un corpo k e $M = A/U$ (U ideale omogeneo di A), $\dim_g M$ risulta uguale alla dimensione proiettiva della k-varietà algebrica $V(U)$ $(= \dim_p V(U) = d)$ definita da U in P_{s-1}^k (cfr. [9], vol. II, ch. VII, § 12, teor. 4.2, pag. 235) e se inoltre k è algebricamente chiuso ord M risulta uguale oll'ordine di $V(U)$ $(=$ ord $V(U))$ cioè al numero delle intersezioni di $V(U)$ con un generico sottospazio di P_{s-1}^k di dimensione $s-1-d$ (cfr. [5] n. 143, § 9, pag. 167).

Possiamo ora enunciare la seguente

PROPOSIZIONE 1. *Sia $A = A_0[x_1, \ldots, x_s] = \bigoplus_{m \in \mathbf{N}} A_m$ un anello graduato, A_0 artiniano, $f \in A_r$ non 0-divisore in A, $M = A/(f) = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} M_n$ un*

A-modulo graduato quoziente. Allora si ha:

a) $p_M(n) \leqslant \sum_{k=0}^{r-1} \binom{n-r+s-1+k}{s-2} l(A_0)$,

b) *Se inoltre A è l'anello graduato dei polinomi in s indeterminate a coefficienti in A_0, vale il segno uguale.*

DIM. a) Consideriamo l'A-modulo graduato A e il modulo graduato quoziente $M = A/(f)$, per il teor. $2b$) si ha: $p_A(n) - p_A(n-r) = p_M(n)$.

Allora per il lemma $1(a)$ si ottiene:

$$p_M(n) \leqslant l(A_0)\left[\binom{n+s-1}{s-1} - \binom{n-r+s-1}{s-1}\right].$$

(Nell'ipotesi b) vale il segno uguale).

Sfruttando l'identità del calcolo binomiale:

$$\binom{n+s-1}{s-1} - \binom{n-r+s-1}{s-1} = \sum_{k=0}^{r-1} \binom{n-r+s-1+k}{s-2} \tag{I}$$

si ha la tesi.

OSSERVAZIONE 2. Nel caso delle k-varietà algebriche proiettive la prop. 1. ci consente di affermare:

a) il polinomio di Hilbert di $A = k[X_1, \ldots, X_s]/(f)$ (con f polinomio omogeneo di $k[X_1, \ldots, X_s]$ di grado r) *dipende solo dal grado di f.*

b) $\operatorname{ord} A = \partial f$ (cfr. Def. 2) che è un noto risultato.

Vediamo ora il legame che c'è tra le dimensioni graduate e gli ordini di un modulo graduato e di « certi » suoi moduli graduati quozienti.

PROPOSIZIONE 2. *Siano $A = A_0[x_1, \ldots, x_s] = \bigoplus_{m \in \mathbf{N}} A_m$ un anello graduato, A_0 artiniano, $M = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} M_n$ un A-modulo graduato* f.g., $f_1, \ldots, f_r$ $(f_i \in A_{k_i})$ *una M-successione di elementi omogenei di A, $M' = M/(f_1, \ldots, f_r)M$ un A-modulo graduato quoziente con $\dim_g M \geqslant r$.*

Allora si ha:

a) $\dim_g M' = \dim_g M - r$

b) $\operatorname{ord} M' = (\operatorname{ord} M) \cdot (\partial f_1) \cdots (\partial f_r)$.

DIM. Procediamo per induzione su r.

Proviamo che la tesi è vera per $r=1$; l'induzione segue poi facilmente. Osserviamo che per il teor. 2b) si ha:

$$p_{M'}(n) = p_M(n) - p_M(n-k_1)\,.$$

Sia

$$p_M(n) = a_0\binom{n}{d} + a_1\binom{n}{d-1} + \ldots + a_d \qquad a_i \in \mathbf{Z}\,,\ (1 \leqslant d \leqslant s-1)\,,$$

(forma in cui si può scrivere il polinomio di Hilbert di un modulo graduato; cfr. [8], Parte 1, § 3, n. 1, lemmi 2 e 3).

Allora

$$p_M(n-k_1) = a_0\binom{n-k_1}{d} + a_1\binom{n-k_1}{d-1} + \ldots + a_d\,.$$

Applicando la (I) (citata in prop. 1) si ha:

$$p_{M'}(n) = a_0\sum_{j=0}^{k_1-1}\binom{n-k_1+j}{d-1} + a_1\sum_{j=0}^{k_1-1}\binom{n-k_1+j}{d-2} + \ldots\,,$$

da cui segue la tesi.

OSSERVAZIONE 3. La prop. 2, interpretata geometricamente, ci dà alcuni noti risultati che si trovano sostanzialmente sul volume di Gröbner (cfr. [4], ch. IV, § 6 e 7 e per maggiori dettagli cfr. [5], n. 143, § 7 e 8); ne riassumiamo qui i più significativi.

Premettiamo agli enunciati alcune utili considerazioni.

Siano $A = k[X_0, \ldots, X_s] = \bigoplus_{n\in\mathbf{N}} A_n$ l'anello graduato dei polinomi in s indeterminate, a coefficienti in un corpo k *algebricamente chiuso*, $M = A/\mathfrak{a} = \bigoplus_{n\in\mathbf{N}} M_n$ l'A-modulo graduato quoziente dove $\mathfrak{a}$ è un ideale omogeneo privo di componenti primarie irrilevanti, definente in $\mathbf{P}^k_s$ la varietà algebrica proiettiva $V = V(\mathfrak{a})$ di dimensione d, $W = V(f_1, \ldots, f_r)$ la varietà algebrica proiettiva definita in $\mathbf{P}^k_s$ dalla M-successione di polinomi omogenei $f_1, \ldots, f_r$ con $d \geqslant r$.

Osserviamo che per $r=1$ si ricava abbastanza facilmente (cfr. [7], ch. IV, n. 2, es. 9, pag. 176) la seguente equivalenza:

f_1 è non 0-divisore nell'A-modulo $M \Leftrightarrow V(f_1)$ non contiene componenti di $V(\mathfrak{a})$ ($V(f_1)$ varietà algebrica proiettiva definita da (f_1) in $\mathbf{P}^k_s$), da cui discende in modo ovvio il significato geometrico di M-successione nel caso $r > 1$.

Notiamo infine che in questo caso si ha:

$$M' = M/(f_1, \dots, f_r)M = A/(\mathfrak{a}, f_1, \dots, f_r)\,.$$

Allora nelle ipotesi sopra citate si ha:

a) Secando una varietà algebrica proiettiva $V(\mathfrak{a})$ con una « generica » varietà W del tipo $V(f_1, \dots, f_r)$ (per « generica » varietà $V(f_1, \dots, f_r)$ si intende qui una varietà soddisfacente alle ipotesi sopra citate), la dimensione diminuisce di r e l'ordine risulta moltiplicato per il prodotto dei gradi dei polinomi $f_1, \dots, f_r$.

In particolare, l'ordine di $V(\mathfrak{a})$ è uguale a quello di una sua « generica » sezione con una varietà lineare.

b) Se una varietà algebrica proiettiva $V(\mathfrak{a})$ ha dimensione $d \geqslant 1$, allora $V(\mathfrak{a})$ ha sempre intersezione non vuota con un'ipersuperficie.

§ **2.** In questo paragrafo studiamo la serie di Poincarè e il polinomio di Hilbert dell'$A \otimes_{A_0} B$-modulo graduato $M \otimes_{A_0} N$ dove M (risp. N) è un A-modulo graduato (risp. un B-modulo graduato) con $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n$ (risp. $B = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} B_m$) e $A_0 = B_0$ (cfr. prop. 3); seguono quindi alcune relazioni tra le dimensioni graduate e gli ordini (cfr. teor. 3 e cor. 3).

Premettiamo alcuni lemmi che ci saranno utili anche in seguito.

LEMMA 2. *Siano A un anello artiniano, $A = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$ la sua decomposizione canonica* (cfr. [1], ch. 8, teor. 8.7, pag. 90), $m = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} l(A_i)$, *$M$ ed N A-moduli* f.g.

Allora si ha:

a) *Se almeno uno dei due moduli è libero su A, si ha*:

$$l(M \otimes_A N) = \frac{l(M)\,l(N)}{l(A)}\,,$$

b) *Se almeno uno dei due moduli è piatto su A, si ha*:

$$l(M \otimes_A N) \leqslant \frac{l(M)\,l(N)}{m}\,.$$

DIM. (Osserviamo che le lunghezze considerate sono finite).

a) Sia ad esempio M libero su $A \Rightarrow M \simeq A^n$ $\big(n =$ rango di M su $A = rg_A(M)\big) \Rightarrow l(M) = nl(A)$; allora $M \otimes_A N \simeq N^n$, da cui segue che

$$l(M \otimes_A N) = l(N^n) = nl(N) = \frac{l(M)l(N)}{l(A)}.$$

b) Si ha $A = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$ dove gli $A_i = A/\mathfrak{m}_i^k$ sono anelli locali artiniani ($\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n$ i massimali distinti di A, k opportuno intero positivo).

$M = M \otimes_A A = M \otimes_A \left(\bigoplus_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigoplus_{i=1}^{n} (M \otimes_A A_i) = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ (cfr. [2] h. II, § 3, n. 7, prop. 7, pag. 90$\big)$.

(A_i A-modulo secondo l'omomorfismo canonico $A \to A_i$).

Analogamente $N = \bigoplus_{i=1}^{n} (N \otimes_A A_i) = \bigoplus_{i=1}^{n} N_i)$.

Osserviamo che: $M \otimes_A N = \left(\bigoplus_{i=1}^{n} M_i\right) \otimes_A \left(\bigoplus_{j=1}^{n} N_j\right) = \bigoplus_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}} (M_i \otimes_A N_j)$

dove $M_i \otimes_A N_j = 0$ per $i \neq j$ perchè $A_i \otimes_A A_j = 0$ essendo $\mathfrak{m}_i^k$ e $\mathfrak{m}_j^k$ coprimi (cfr. [1], ch. I, prop. 1.16, pag. 9$\big)$. Inoltre $M_i \otimes_A N_i \simeq M_i \otimes_{A_i} N_i$ (cfr. [2], cap. II, § 3, n. 3, cor. di prop. 2, pag. 80$\big)$, quindi

$$(1) \qquad l_A(M \otimes_A N) = \sum_{i=1}^{n} l_{A_i}(M_i \otimes_{A_i} N_i).$$

Osserviamo ora che M_i ed N_i sono f.g. su A_i $\big($cfr. [1], ch. 2, prop. 2.17, pag. 28$\big)$ e M(risp. N) piatto su $A \Rightarrow M_i$(risp. N_i) piatto su A_i $\big($cfr. [1], ch. II, es. 2.20, pag. 29) che equivale a libero su A_i (cfr. [1], ch. 7, es. 15, pag. 86$\big)$. Allora dalla (1), applicando la (*a*), si ha:

$$l(M \otimes_A N) = \sum_{i=1}^{n} \frac{l_{A_i}(M_i) l_{A_i}(N_i)}{l(A_i)} \leqslant \frac{1}{\min l(A_i)} \sum_{i=1}^{n} l_{A_i}(M_i) l_{A_i}(N_i) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\min l(A_i)} \sum_{i=1}^{n} l_{A_i}(M_i) \sum_{j=1}^{n} l_{A_j}(N_j) = \frac{l(M)l(N)}{m} \qquad \text{c.v.d.}$$

Mostriamo ora con un esempio come le ipotesi fatte sui moduli nel lemma 2 siano essenziali:

Esempio 2. Sia A un anello locale artiniano con $l(A) > 1$, $\mathfrak{m}$ l'ideale massimale di A, $M = N = A/\mathfrak{m}$ ($=$ corpo residuo k), allora risulta: $M \otimes_A N \simeq A/\mathfrak{m}$; quindi $l(M \otimes_A N) = l_A(A/\mathfrak{m}) = 1$, mentre

$$\frac{l(M)\, l(N)}{l(A)} = \frac{1}{l(A)} < 1 .$$

In tal caso si osserva che $M = N$ non è piatto (e quindi neppure libero) su A, infatti:
sia k il minimo intero positivo t.c. $\mathfrak{m}^k = 0$, per $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}^{k-1}$ risulta $\mathfrak{m}\mathfrak{a} = (0) \subsetneq \mathfrak{m} \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$, perciò M non è piatto su A (cfr. [3], ch. I, § 2, n. 6, cor. di prop. 7).

Lemma 3. *Siano* $A = \bigoplus_{r=0}^{\infty} A_r$, $B = \bigoplus_{s=0}^{\infty} B_s$ *due anelli graduati con* $A_0 = B_0$, $A \otimes_{A_0} B = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \left(\bigoplus_{r+s=m} A_r \otimes_{A_0} B_s \right)$ *l'A_0-algebra graduata prodotto tensoriale,* $M = \bigoplus_{i=0}^{\infty} M_i$ (*risp.* $N = \bigoplus_{j=0}^{\infty} N_j$) *un A-modulo* (*risp. B-modulo*) *graduato* f.g., *allora* $M \otimes_{A_0} N$ *è un* $A \otimes_{A_0} B$*-modulo graduato* f.g.

Dim. Muniamo $M \otimes_{A_0} N$ della seguente struttura di $A \otimes_{A_0} B$-modulo

$$(a \otimes b)\ (m \otimes n) = am \otimes bn \quad (a \in A,\ b \in B,\ m \in M,\ n \in N) .$$

Tale struttura è compatibile con la seguente graduazione:

$$M \otimes_{A_0} N = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \left(\bigoplus_{i+j=n} M_i \otimes_{A_0} N_j \right)$$

(M ed N sono A_0-moduli graduati con la graduazione dell'ipotesi), infatti risulta vera la seguente inclusione:

$$\left(\bigoplus_{r+s=m} A_r \otimes_{A_0} B_s \right) \left(\bigoplus_{i+j=n} M_i \otimes_{A_0} N_j \right) \subset (M \otimes_{A_0} N)_{n+m}$$

perchè per definizione si ha ($\forall a_r \in A_r$, $b_s \in B_s$, $m_i \in M_i$, $n_j \in N_j$),

$$(a_r \otimes b_s)(m_i \otimes n_j) = a_r m_i \otimes b_s n_j \in M_{i+r} \otimes_{A_0} N_{j+s} \subset (M \otimes_{A_0} N)_{n+m} ,$$

(quindi per linearità si ha l'inclusione).

Infine osserviamo che se M (risp. N) è f.g. da $(m_i)_{i\in I}$ (risp. da $(n_j)_{j\in J}$), allora $M \otimes_{A_0} N$ è f.g. su $A \otimes_{A_0} B$ da $(m_i \otimes n_j)_{(i,j)\in I\times J}$.

Possiamo ora enunciare la seguente

PROPOSIZIONE. 3. *Siano* $A = A_0[x_1, \dots, x_r] = \bigoplus_{\nu\in\mathbf{N}} A_\nu$, $(x_i \in A_{k_i})$ *e* $B = B_0[y_1, \dots, y_s] = \bigoplus_{\lambda\in\mathbf{N}} B_\lambda (y_j \in B_{k_j})$ *due anelli graduati con* $A_0 = B_0$ *artiniano,* $A_0 = \bigoplus_{\mu=1}^{n} A_0^{(\mu)}$ *la sua decomposizione canonica,* $m = \min_{1\leq\mu\leq n} l(A_0^{(\mu)})$, $A \otimes_{A_0} B = \bigoplus_{p\in\mathbf{N}} \left(\bigoplus_{\nu+\lambda=p} A_\nu \otimes_{A_0} B_\lambda \right)$ *l'*A_0*-algebra prodotto tensoriale,* $M = \bigoplus_{i\in\mathbf{N}} M_i$ (risp. $N = \bigoplus_{j\in\mathbf{N}} N_j$) *un* A*-modulo (risp.* B*-modulo) graduato* f.g. *Allora*:

a) *Se* $\forall (i,j)$ *almeno* M_i *o* N_j *è un* A_0*-modulo libero, si ha*:

$$P(M \otimes_{A_0} N, t) = \frac{1}{l(A_0)} P(M, t) P(N, t) ,$$

b) *Se* $\forall (i,j)$ *almeno* M_i *o* N_j *è un* A_0*-modulo piatto, si ha*:

$$P(M \otimes_{A_0} N, t) \leq \frac{1}{m} P(M, t) P(N, t) ,$$

(*dove a* $M \otimes_{A_0} N$ *si è data la struttura di* $A \otimes_{A_0} B$*-modulo graduato* (*cfr. Lemma* 3)).

DIM. Diamo la dimostrazione di (*a*); la (*b*) è analoga.

Osserviamo che $A \otimes_{A_0} B$ è una A_0-algebra f.g. del tipo $A_0[x'_1, \dots, x'_r, y'_1, \dots, y'_s]$, infatti si ha:

$A = A_0[X_1, \dots, X_r]/\mathfrak{a}$, $B = A_0[Y_1, \dots, Y_s]/\mathfrak{b}$, con $\mathfrak{a}$ (risp. $\mathfrak{b}$) ideale di A (risp. di B), allora

$A \otimes_{A_0} B = A_0[X_1, \dots, X_r, Y_1, \dots, Y_s]/\mathfrak{a}^e + \mathfrak{b}^e$

$(\mathfrak{a}^e = \mathfrak{a} A_0[X_1, \dots, X_r, Y_1, \dots, Y_s]$, $\mathfrak{b}^e = \mathfrak{b} A_0[X_1, \dots, X_r, Y_1, \dots, Y_s])$ (cfr. [2] ed. 1958, ch. III. § 3, n. 1, prop. 1).

Inoltre la struttura di A_0-modulo su $M \otimes_{A_0} N$ ottenuta per restrizione da quella di $A \otimes_{A_0} B$-modulo è quella usuale del prodotto tensoriale di due A_0-moduli. Infatti considerando l'omomorfismo di anelli: $A_0 \to A \otimes_{A_0} B$ così definito $a_0 \rightsquigarrow a_0 \otimes 1 = 1 \otimes a_0$ (A, B A_0-algebre), risulta dalla definizione:

$$a_0(m \otimes n) = (a_0 \otimes 1)(m \otimes n) = a_0 m \otimes n$$

ed anche

$$a_0(m \otimes n) = (1 \otimes a_0)(m \otimes n) = m \otimes a_0 n.$$

Consideriamo ora la serie di Poincaré di $M \otimes_{A_0} N$ (l'esistenza è assicurata dal lemma 3), risulta allora:

$$\begin{aligned} P(M \otimes_{A_0} N, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} l(M \otimes_{A_0} N)_n t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} l\Big(\bigoplus_{i+j=n} (M_i \otimes_{A_0} N_j)\Big) t^n \qquad \text{(cfr. [2], ch. II, § 3, n. 7, prop. 7)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} l(M_i \otimes_{A_0} N_j) t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} \frac{l(M_i) l(N_j)}{l(A_0)} t^n \qquad \text{(cfr. lemma 2)} \\ &= \frac{1}{l(A_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} l(M_i) t^i l(N_j) t^j \qquad \text{c.v.d.} \end{aligned}$$

Prima di procedere, facciamo ora presente che, salvo avviso contrario, per tutti gli enunciati successivi, compresi quelli in cui si farà uso della prop. 3, ritorneremo a valerci della seguente ipotesi:

gli anelli graduati del tipo $A_0[x_1, ..., x_s]$ sono f.g., come algebre sull'anello base A_0, da elementi omogenei di primo grado.

Passiamo ora ad enunciare una diseguaglianza tra il polinomio di Hilbert di $M \otimes_{A_0} N$ e i polinomi di Hilbert di M ed N che si trae facilmente dalla dimostrazione della precedente proposizione.

Corollario 2. *Nelle ipotesi della prop.* 3(*a*) *si ha la seguente diseguaglianza valida per n sufficientemente grande*:

$$p_{M \otimes_{A_0} N}(n) \geqslant \frac{1}{l(A_0)} \sum_{\substack{i+j=n \\ i \geqslant m, j \geqslant m'}} p_M(i) p_N(j) , \tag{1}$$

dove

$m \in \mathrm{N}$ *è* t.c. $l(M_i) = p_M(i)$ *per* $i \geqslant m$,

$m' \in \mathrm{N}$ *è* t.c. $l(N_j) = p_N(j)$ per $j \geqslant m'$.

Dim. Ricordando che:

$$l(M \otimes_{A_0} N)_n = \frac{1}{l(A_0)} \sum_{i+j=n} l(M_i) l(N_j)$$

e che per def.

$$l(M\otimes_{A_0}N)_n = p_{M\otimes_{A_0}N}(n) \qquad \text{per } n \geqslant \bar{n} \ (\bar{n} \text{ opportuno}),$$

allora per la (1) basta prendere $n \geqslant \max(\bar{n}, m+m')$.

OSSERVAZIONE 4. La (1) diventa un'eguaglianza nei casi in cui

$$p_M(i) = l(M_i) \quad \forall i \geqslant 0 \qquad \text{e} \qquad p_N(j) = l(N_j) \quad \forall j \geqslant 0$$

come ad esempio si verifica se M (risp. N) è l'anello dei polinomi a coefficienti nell'anello artiniano A_0, in r indeterminate (risp. s indeterminate) considerato come modulo su se stesso.

Facciamo osservare che tra l'altro, in tal caso facendo uso del lemma $2(a)$ e ricordando che

$$A_0[X_1, \dots, X_r] \otimes_{A_0} A_0[Y_1, \dots, Y_s] \simeq A_0[X_1, \dots, X_r, Y_1, \dots, Y_s],$$

si ritrova subito la seguente identità del calcolo binomiale:

$$\binom{n+r+s-1}{r+s-1} = \sum_{i+j=n} \binom{i+r-1}{r-1}\binom{j+s-1}{s-1}.$$

Ora ci serviamo di prop. 3 per calcolare il polinomio di Hilbert di $M \otimes_{A_0} N$ e per ricavare una relazione sulle dimensioni graduate e sugli ordini di $M \otimes_{A_0} N$.

TEOREMA 3. *Nelle ipotesi di prop.* $3(a)$ *si ha*:

$$\dim_g M \otimes_{A_0} N = \dim_g M + \dim_g N + 1 .$$

Nelle ipotesi di prop. $3(b)$ *si ha*:

$$\dim_g M \otimes_{A_0} N \leqslant \dim_g M + \dim_g N + 1 .$$

DIM. Ricordiamo che si può sempre supporre che sia:

$$P(M, t) = \frac{g(t)}{(1-t)^d}, \qquad \left(\text{risp. } P(N, t) = \frac{h(t)}{(1-t)^{d'}}\right),$$

con $g(t)\in\mathbb{Z}[t]$, $g(1)\neq 0$ e $d=$ ordine del polo di $P(M,t)$ per $t=1$, $d\leqslant r$ (risp. $h(t)\in\mathbb{Z}[t]$, $h(1)\neq 0$ e $d'=$ ordine del polo di $P(N,t)$ per $t=1$, $d'\leqslant s$) (cfr. [1], ch. 11, dim. cor. 11.2, pag. 117).

Allora, limitandoci per semplicità al caso (a), per la prop. 3(a) si ha che:

$$P(M\otimes_{A_0}N,t)=\frac{1}{l(A_0)}\frac{g(t)}{(1-t)^d}\frac{h(t)}{(1-t)^{d'}}=\frac{1}{l(A_0)}\frac{g(t)h(t)}{(1-t)^{d+d'}}\,.$$

Osserviamo ora che:

a) $g(1)h(1)\neq 0$ perchè $g(t), h(t)\in\mathbb{Z}[t]$ e $\mathbb{Z}$ è integro;

b) $d+d'$ è l'ordine del polo di $P(M\otimes_{A_0}N,t)$ per $t=1$, perchè l'ordine del polo del prodotto di due funzioni è la somma dei rispettivi ordini del polo.

Allora si ha: per $n\geqslant\partial g+\partial h=m+m'$

$$l(M\otimes_{A_0}N)_n=\frac{1}{l(A_0)}\sum_{k=0}^{m+m'}a_k\binom{d+d'+n-k-1}{d+d'-1}$$

(cfr. Cor. 1) dove $a_k=\sum_{i+j=k}c_ib_j$ con c_i, b_j t.c.

$$g(t)=\sum_{i=0}^{m}c_it^i\,,\qquad h(t)=\sum_{j=0}^{m'}b_jt^j\,,\qquad \text{dunque per } n\geqslant\partial g+\partial h\,,$$

$l(M\otimes_{A_0}N)_n$ è un polinomio che appartiene a $\mathbb{Q}[n]$, il cui grado risulta $d+d'-1$, da cui la tesi.

Corollario 3. *Nelle ipotesi della prop.* 3(a) *si ha*:

$$\operatorname{ord}(M\otimes_{A_0}N)=\frac{(\operatorname{ord}M)\cdot(\operatorname{ord}N)}{l(A_0)}\,.$$

Dim. Segue immediatamente dalla dim del teor. 3 osservando che:

$$\operatorname{ord}(M\otimes_{A_0}N)=\frac{1}{l(A_0)}\sum_{k=0}^{m+m'}a_k=\frac{1}{l(A_0)}\sum_{i=0}^{m}c_i\sum_{j=0}^{m'}b_j$$

e tenendo conto che $\left(\sum_{i=0}^{m}c_i\right)\neq 0$ e $\left(\sum_{j=0}^{m'}b_j\right)\neq 0$ per l'ipotesi che $g(1)\neq 0$ e $h(1)\neq 0$.

Del polinomio di Hilbert di $M \otimes_A N$, con M ed N A-moduli graduati ($A = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} A_n$ anello graduato), non conosciamo l'espressione, però abbiamo due diseguaglianze sul suo grado (cfr. § 4, prop. 7).

§ 3. Ci occupiamo in questo pragrafo di studiare il comportamento del polinomio di Hilbert quando si estende l'anello di base.

Ci occorre premettere, a tal fine, alcuni lemmi di natura analoga ai lemmi 2 e 3 del § 2.

LEMMA 4. *Siano A un anello artiniano, $A = \bigoplus_{i=1}^{r} A_i$ la sua decomposizione canonica, $m = \min_{1 \leqslant i \leqslant r} l(A_i)$, B una A-algebra artiniana, M un A-modulo* f.g., *allora si ha*:

a) Se M è un A-modulo libero $\Rightarrow l_B(M \otimes_A B) = \dfrac{l_A(M)\, l(B)}{l(A)}$,

b) Se M è un A-modulo piatto $\Rightarrow l_B(M \otimes_A B) \leqslant \dfrac{l_A(M)\, l(B)}{m}$,

$\big(l(B)$ = lunghezza dell'anello $B\big)$.

DIM. Dimostriamo la (a), la (b) è analoga alla (b) del lemma 2 di § 2. Sia $(m_j)_{0 \leqslant j \leqslant n}$ una base di M su A, allora $(m_j \otimes 1_B)_{0 \leqslant j \leqslant n}$ è una base di $M \otimes_A B$ considerato come B-modulo (cfr. ad esempio, [2], ch. II, § 3, n. 7, cor. 1 alla prop. 7 pag. 91), da cui ne segue che:

$$l_B(M \otimes_A B) = n l(B) = \frac{l_A(M)}{l(A)}\, l(B)\,. \qquad \text{c.v.d.}$$

Viene spontaneo supporre che nell'ipotesi B piatto o libero su A, si ottengano relazioni analoghe a quelle del lemma 4 per $l_B(M \otimes_A B)$.

LEMMA 5. *Siano $A = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} A_n$ un anello graduato, B_0 un'A_0-algebra, $A \otimes_{A_0} B_0 = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} (A_n \otimes_{A_0} B_0)$ l'A_0-algebra graduata prodotto tensoriale, $M = \bigoplus_{i \in \mathbf{N}} M_i$ un A-modulo graduato* f.g., *allora $M \otimes_{A_0} B_0$ è un $A \otimes_{A_0} B_0$-modulo graduato* f.g.

Dai lemmi 4 e 5 discende subito la seguente

PROPOSIZIONE 4. *Siano $A = A_0[x_1, \ldots, x_r] = \bigoplus_{j \in \mathbf{N}} A_j$ un anello graduato, A_0 artiniano, $A_0 = \bigoplus_{i=1}^{s} A_0^{(i)}$ la sua decomposizione canonica, $m =$*

$= \min_{1 \leq i \leq s} l(A_0^{(i)})$, B_0 *un'*A_0*-algebra artiniana,* $A \otimes_{A_0} B_0 = \bigoplus_{j \in \mathbf{N}} (A_j \otimes_{A_0} B_0)$ *l'*A_0*-algebra graduata prodotto tensoriale,* $M = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} M_n$ *un* A*-modulo graduato* f.g.

Allora si ha:

a) *Se gli* M_n *sono liberi su* A_0 $\forall n \geq \bar{n}$ ($\bar{n}$ *opportuno*) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow p_{M \otimes_{A_0} B_0}(n) = \frac{l(B_0)}{l(A_0)} p_M(n) ,$$

b) *Se gli* M_n *sono piatti su* A_0 $\forall n \geq \bar{n}$ ($\bar{n}$ *opportuno*) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow p_{M \otimes_{A_0} B_0}(n) \leq \frac{l(B_0)}{m} p_M(n) ,$$

(*dove a* $M \otimes_{A_0} B_0$ *si è data la struttura di* $A \otimes_{A_0} B_0$*-modulo graduato* (*cfr. Lemma* 5) *e* $l(B_0) =$ *lunghezza dell'anello* B_0).

Un corollario immediato della prop. 4 è:

COROLLARIO 4. *Nelle ipotesi della prop.* 4(*a*) *si ha*:

$$\dim_g M \otimes_{A_0} B_0 = \dim_g M .$$

Nelle ipotesi della prop. 4(*b*) *si ha*:

$$\dim_g M \otimes_{A_0} B_0 \leq \dim_g M .$$

OSSERVAZIONE 5. La prop. 4(*a*) può essere interpretata geometricamente. Infatti siano $A = k[X_1, \ldots, X_r]$, $K \supset k$ (corpi), $M = A/\mathfrak{a} =$ = l'anello delle coordinate proiettive della k-varietà algebrica proiettiva $V(\mathfrak{a})$ di $\mathbf{P}_{r-1}^k$; quindi $A \otimes_k K = K[X_1, \ldots, X_r]$. Allora l'ordine, il genere aritmetico (cfr. per la def. [9], Vol. II, ch. VII, § 12, p. 236) e la dimensione proiettiva di $V(\mathfrak{a})$ restano invariati per estensioni del corpo k, poichè $p_{M \otimes_k K}(n) = p_M(n)$.

§ 4. Riuniamo qui alcuni risultati riguardanti i legami tra la dimensione di Krull e la dimensione graduata degli anelli e dei moduli graduati (prop. 5, teor. 4), reinterpretando così alcuni risultati dei paragrafi precedenti (cor. 6 e 7) e dando due diseguaglianze per le dimensioni graduate del prodotto tensoriale $M \otimes_A N$ di due A-moduli graduati M ed N (cfr. prop. 7).

Denotiamo da ora in poi con $\dim A$ la dimensione di Krull dell'anello A. Sia M un A-modulo e sia $A_M = A/\operatorname{Ann} M$. Ricordiamo che si chiama dimensione di M e si denota $\dim M$ la dimensione di Krull dell'anello A_M. Ci è poi utile tenere presente che nel caso di un anello quoziente $A' = A/\mathfrak{a}$, la dimensione di Krull dell'anello A' coincide con la dimensione dell'A-modulo A'.

Premettiamo allora un lemma che in seguito enunceremo anche nel caso graduato

LEMMA 6. *Siano A un anello noetheriano, M un A-modulo* f.g., *allora si ha*:

$$\dim M = \max_{\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Ass} M} \dim A/\mathfrak{p}_i .$$

DIM. Tenendo presenti per comodità le notazioni precedenti, proviamo che:

$$\dim A_M = \max_{\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Ass} A_M} \dim A/\mathfrak{p}_i .$$

Ricordiamo dapprima che, se $\operatorname{Ann} M = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{Q}_i$ è una decomposizione primaria ridotta di $\operatorname{Ann} M$ e $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{Q}_i}$ sono i suoi primi associati, allora $\operatorname{Ass}(A_M) = \bigcup_{i \in I} \{\mathfrak{p}_i\}$ (cfr. [3], ch. IV, § 2, n. 3, prop. 4, pag. 144).

È ovvio che

$$\max_{\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Ass} A_M} \dim A/\mathfrak{p}_i \leqslant \dim A_M .$$

Per la diseguaglianza opposta basta osservare che una catena di massima lunghezza di primi contenenti $\operatorname{Ann} M$, è una catena di primi che contengono $\bigcap_{i \in I} \mathfrak{p}_i$ e quindi contengono $\mathfrak{p}_i$ per qualche $i \in I$ (cfr. [1], ch. I, prop. 1.11, pag. 8).

Osserviamo ora che ci si può limitare ai primi minimali di $\operatorname{Ass} A_M$, perchè se $\mathfrak{q}$ è un primo t.c. $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{p}$ con $\mathfrak{p}$ primo minimale, risulta: $\dim A/\mathfrak{q} \leqslant \dim A/\mathfrak{p}$, essendo $A/\mathfrak{q}$ un quoziente di $A/\mathfrak{p}$.

La tesi segue allora ricordando che i primi minimali di $\operatorname{Ann} M$ sono i primi minimali nell'insieme dei primi contenenti $\operatorname{Ann} M$ (cfr. [1], ch. IV, prop. 4.6), i quali coincidono con i primi minimali di $\operatorname{Ass} M$ (cfr. [3], ch. IV, § 1, n. 4, th. 2). c.v.d.

Sia $A = A_0[x_1, \dots, x_n] = \bigoplus_{s \in \mathbb{N}} A_s$ un anello graduato, denotiamo con $\dim A$ la dimensione di Krull dell'anello A considerato privo della graduazione e con $\dim_g A$ la dimensione graduata dell'A-modulo graduato A. Possiamo allora stabilire la seguente

PROPOSIZIONE 5. *Sia* $A = A_0[x_1, \ldots, x_n] = \bigoplus_{s\in\mathbb{N}} A_s$ *un anello graduato,* A_0 *artiniano, allora si ha*: $\dim_g A = \dim A - 1$.

DIM. Per semplicità facciamo una suddivisione in tre casi.

Caso 1. Sia $A_0 = k$ (k corpo). Poichè A è una k-algebra f.g., essa è del tipo R/I con $R = k[X_1, \ldots, X_n]$ e I ideale omogeneo di R. Osserviamo che:

a) il polinomio di Hilbert dell'A-modulo graduato A coincide con il polinomio di Hilbert dell'R-modulo graduato A;

b) i primi associati all'A-modulo graduato A sono omogenei (cfr. [3], ch. IV, § 3, n. 1, prop. 1).

Pertanto si ha (cfr. [9], vol. II, ch. VII, § 12, th. 42', pag. 235):

$$\dim_g A = \max_{\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Ass} A} \dim_p \mathfrak{p}_i$$ ($\dim_p \mathfrak{p}_i$ = dimensione proiettiva dell'ideale $\mathfrak{p}_i$).

Osserviamo ora che:

$$\dim_p \mathfrak{p}_i = \dim \mathfrak{p}_i - 1$$ ($\dim \mathfrak{p}_i$ = grado di trascendenza di $R/\mathfrak{p}_i$ su k),

$$= \dim R/\mathfrak{p}_i - 1$$ ($\dim R/\mathfrak{p}_i$ = dimensione di Krull dell'anello $R/\mathfrak{p}_i$; cfr. [9], vol. II, ch VII, § 7, th. 20).

Facendo allora uso del lemma 6, si ottiene subito la tesi.

Caso 2. Siano A_0 un anello locale artiniano, $\mathfrak{m}_0$ il suo ideale massimale, $A_0 \to A$ l'omomorfismo canonico, $\mathfrak{m}_0^e = \mathfrak{m}_0 A$.

Poichè $\mathfrak{m}_0$ è un ideale nilpotente, allora $\mathfrak{m}_0^k = 0$ (k opportuno intero positivo). Ne segue che: $(\mathfrak{m}_0^e)^k = (\mathfrak{m}_0^k)^e = 0 \Rightarrow$ ogni ideale primo di A contiene l'ideale nilpotente $\mathfrak{m}_0 A \Rightarrow \dim A = \dim A/\mathfrak{m}_0 A$.

Osserviamo ora che poichè risulta $A/\mathfrak{m}_0 A = k[x_1, \ldots, x_n]$ con $k = A_0/\mathfrak{m}_0$ (corpo residuo), per ottenere la tesi, in virtù del caso 1, ci basta provare che $\dim_g A = \dim_g A/\mathfrak{m}_0 A$ (con l'anello graduato $A/\mathfrak{m}_0 A$ considerato come modulo graduato su se stesso).

Risulta $A = \bigoplus_{s\in\mathbf{N}} A_s$, $A/\mathfrak{m}_0 A = \bigoplus_{s\in\mathbf{N}} A_s/\mathfrak{m}_0 A_s$, con gli A_s A_0-moduli, e gli $A_s/\mathfrak{m}_0 A_s$ k-spazi vettoriali e A_0-moduli per restrizione (mediante l'omomorfismo canonico $A_0 \to k$), da cui segue subito che:

$$l_k(A_s/\mathfrak{m}_0 A_s) \leqslant l_{A_0}(A_s/\mathfrak{m}_0 A_s) \leqslant l_{A_0}(A_s) \qquad (\forall s \in \mathbf{N}) ,$$

il che implica $\dim_g A/\mathfrak{m}_0 A \leqslant \dim_g A$.

Ora sappiamo che se $y_1, \ldots, y_\nu$ sono elementi di A_s le cui immagini in $A_s/\mathfrak{m}_0 A_s$ fo mano una base di questo k-spazio vettoriale, allora $y_1, \ldots, y_\nu$ generano l'A_0-modulo A_s (cfr. [1], ch. II, cor. 2.7, pag. 22).

Allora:

$$A_s = \sum_{j=1}^{\nu} A_0 y_j \Rightarrow l(A_s) \leqslant \sum_{j=1}^{\nu} l(A_0 y_j) \leqslant \nu l(A_0) =$$
$$= \dim_k(A_s/\mathfrak{m}_0 A_s)\, l(A_0) (\forall s \in \mathbf{N}) \Rightarrow \dim_g A \leqslant \dim_g A/\mathfrak{m}_0 A .$$

Caso 3. Sia A_0 artiniano e sia $A_0 = \bigoplus_{i=1}^{r} A_0^{(i)}$ la sua decomposizione canonica con gli $A_0^{(i)}$ locali, allora risulta:

$$A = \Big(\bigoplus_{i=1}^{r} A_0^{(i)}\Big)[x_1, \ldots, x_n] = \bigoplus_{i=1}^{r} A_0^{(i)}[x_1, \ldots, x_n] .$$

Posto $A_0^{(i)}[x_1, \ldots, x_n] = R_i$, si ha $A = \bigoplus_{i=1}^{r} R_i$; proviamo quindi che $\dim A = \max_{1\leqslant i\leqslant r} \dim R_i$. L'asserto segue subito osservando che:

$$\mathfrak{a} \text{ è ideale di } A \Leftrightarrow \mathfrak{a} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathfrak{a}_i \text{ con gli } \mathfrak{a}_i \text{ ideali di } R_i .$$

Dimostriamo ora che $\dim_g A = \max_{1\leqslant i\leqslant r} \dim_g R_i$, dove A è considerato A-modulo graduato ed R_i R_i-modulo graduato.

Sia $A = \bigoplus_{s\in\mathbf{N}} A_s$, $R_i = \bigoplus_{s\in\mathbf{N}} R_s^{(i)}$, risulta $A_s = \bigoplus_{i=1}^{r} R_s^{(i)}$ con gli A_s A_0-moduli e gli $R_s^{(i)}$ $A_0^{(i)}$-moduli e A_0-moduli per restrizione (secondo l'omomorfismo canonico $A_0 \to A_0^{(i)}$).

Allora $l_{A_0}(A_s) = \sum_{i=1}^{r} l_{A_0}(R_s^{(i)})$ $(\forall s \in \mathbf{N})$, da cui $\dim_g A = \max_{1\leqslant i\leqslant r} \dim_g R_i$.

Infine, per il caso 2, si ha:

$$\begin{aligned}\dim_g A &= \max_{1\leq i\leq r} \dim_g R_i \\ &= \max_{1\leq i\leq r} \dim R_i - 1 \\ &= \dim A - 1 \qquad \text{c.v.d.}\end{aligned}$$

Ci proponiamo ora di estendere ai moduli graduati la proposizione precedente. Consideriamo un A-modulo graduato M e vediamo qual'è il legame tra $\dim_g M$ e $\dim_g A$. A tale scopo possiamo enunciare il seguente

LEMMA 7. *Siano* $A = A_0[x_1, \ldots, x_s] = \bigoplus_{n\in\mathbf{N}} A_n$ *un anello graduato,* A_0 *artiniano,* $M = \bigoplus_{r\in\mathbf{N}} M_r$ *un* A*-modulo graduato* f.g. *Allora si ha*:

a) $\dim_g M \leq \dim_g A$;

b) $\dim_g M = \dim_g A$ *se* M *è un* A*-modulo fedele.*

DIM. *a*) Poichè M è un A-modulo graduato f.g., ammette un sistema finito di generatori omogenei: $M = Ax_1 + \ldots + Ax_\nu$ $(x_i \in M_{k_i})$.

Allora poichè sia M che Ax_i sono A-moduli graduati, si ha:

$$M_m = (Ax_1)_m + \ldots + (Ax_\nu)_m \qquad (\forall m \in \mathbf{N}) .$$

Passando poi alle lunghezze si ottiene:

$$\begin{aligned} l(M_m) &\leq \sum_{i=1}^{\nu} l(A_{m-k_i}) \quad \forall m \in \mathbf{N} \ \ \big((Ax_i)_m \text{ è un quoziente di } A_{m-k_i}\big) \\ &\leq \nu \cdot l(A_{m-k_{\bar{i}}}) \ \forall m \in \mathbf{N}\,, \text{ dove } l(A_{m-k_{\bar{i}}}) = \max_{1\leq i\leq \nu} l(A_{m-k_i})\,. \end{aligned}$$

Da ciò si ricava: $\dim_g M \leq \dim_g A$.

b) Poichè $\operatorname{Ass} M$ contiene i primi minimali di $\operatorname{Supp}(M) = \operatorname{Spec}(A)$, ne segue che $\exists x \in M_r$ tale che $\operatorname{Ann}(x) = \mathfrak{p}$ con $\mathfrak{p}$ primo omogeneo minimale di A (cfr. [3], ch. IV, § 3, n. 1, prop. 1), che possiamo scegliere tale che $\dim A/\mathfrak{p} = \dim A$. (Supponiamo $\mathfrak{p} \neq (0)$, poichè in caso contrario la tesi è allora immediata).

Allora si può definire il seguente omomorfismo iniettivo di A-moduli

$$\varphi\colon A/\mathfrak{p} \to M \qquad \text{tale che} \qquad \bar{1} \mapsto x \ \ (\bar{1} = \text{classe di } 1 \bmod \mathfrak{p})$$

il quale risulta graduato, di grado r.

Partendo dagli elementi omogenei di grado n, si ha l'omomorfismo iniettivo di A_0-moduli φ_n: $(A/\mathfrak{p})_n \to M_{n+r}$, da cui si ottiene

$$l_{A_0}(A/\mathfrak{p})_n \leqslant l_{A_0}(M_{n+r}) \qquad \forall n \in \mathbf{N} .$$

Quindi tra gli A-moduli graduati $A/\mathfrak{p}$ ed M sussiste la diseguaglianza:

$$\dim_g A/\mathfrak{p} \leqslant \dim_g M .$$

Pertanto per avere la tesi, basta provare i due seguenti fatti:

i) il polinomio di Hilbert dell'A-modulo graduato $A/\mathfrak{p}$ coincide con il polinomio di Hilbert dell'anello graduato $A/\mathfrak{p}$;

ii) $\dim_g A/\mathfrak{p} = \dim_g A$.

La i) si ottiene facilmente; proviamo la ii).

Osserviamo che $A/\mathfrak{p}$ è un anello graduato del tipo $k[y_1, \ldots, y_s] = \bigoplus_{n\in\mathbf{N}} A'_n$, allora si ha:

$$\begin{aligned} \dim_g A/\mathfrak{p} &= \dim A/\mathfrak{p} - 1 && \text{(cfr. prop. 5)}\,, \\ &= \dim A - 1 && \text{(per l'ipotesi fatta su } \mathfrak{p})\,, \\ &= \dim_g A && \text{(cfr. prop. 5)} \end{aligned}$$

c.v.d.

Valendoci del lemma precedente, possiamo ora enunciare il seguente

TEOREMA 4. Siano $A = A_0[x_1, \ldots, x_s] = \bigoplus_{n\in\mathbf{N}} A_n$ *un anello graduato*, A_0 *artiniano*, $M = \bigoplus_{r\in\mathbf{N}} M_r$ *un* A*-modulo graduato* f.g. *Allora si ha*:

$$\dim_g M = \dim M - 1$$

(*per* dim M *si intende la dimensione dell'*A*-modulo* M *considerato privo della graduazione*).

DIM. Poichè ogni A-modulo graduato M si può considerare come $A/\mathrm{Ann}\, M$-modulo graduato (cfr. [2], ch. II, § 11, n. 3, prop. 4) fedele, rimpiazzando A con $A/\mathrm{Ann}\, M$ si può supporre che sia $\mathrm{Ann}\, M = (0)$.

Allora per il lemma 7*b*) si ha: $\dim_g M = \dim_g A$, da cui segue subito la tesi, per la prop. 5.

Facciamo osservare che, in virtù del teor. 4, si ritrova la seguente proprietà:

per gli anelli graduati quozienti $A' = A/\mathfrak{a}$, la dimensione graduata dell'A-modulo A' coincide con la dimensione graduata dell'anello A'.

Come corollario immediato del teorema 4, si può ottenere un'estensione al caso graduato del lemma 6.

Osserviamo che per un anello graduato $A = \bigoplus_{i \in \mathbf{N}} A_i$ si ha: A è noetheriano $\Leftrightarrow A_0$ è noetheriano e A è f.g. come A_0-algebra (cfr. [1], ch. 10, prop. 10.7); pertanto le ipotesi su A del prossimo corollario saranno un pò più forti dell'ipotesi « A noetheriano » del lemma 6.

Corollario 5. *Siano* $A = A_0[x_1, \ldots, x_r] = \bigoplus_{j \in \mathbf{N}} A_j$ *un anello graduato*, A_0 *artiniano*, $M = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} M_n$ *un* A*-modulo graduato* f.g. *Allora si ha*:

$$\dim_g M = \max_{\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Ass} M} \dim_g A/\mathfrak{p}_i .$$

Dim. Osserviamo che sono anelli graduati: $A/\operatorname{Ann} M$ e $A/\mathfrak{p}_i$ con $\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Ass} M$ (cfr. [3], ch. IV, § 3, n. 1, prop. 1).

Allora applicando il teorema 4 ed il lemma 6 si ha:

$$\begin{aligned} \dim_g M &= \dim M - 1 \\ &= \max_{\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Ass} M} \dim A/\mathfrak{p}_i - 1 \\ &= \max_{\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Ass} M} \dim_g A/\mathfrak{p}_i . \qquad \text{c.v.d.} \end{aligned}$$

Osserviamo che il cor. 5 è in accordo con la nota definizione di dimensione di una varietà algebrica e cioè:

$$\dim V = \max_{1 \leq i \leq n} \dim V_i \qquad \text{dove } V = \bigcup_{i=1}^{n} V_i \text{ con le } V_i \text{ varietà irriducibili} .$$

Notiamo ora che mediante il teor. 4 possiamo reinterpretare in termini di dimensioni di Krull il teor. 3 e il cor. 4 dei numeri precedenti.

Più precisamente, possiamo allora enunciare i seguenti corollari, la cui dimostrazione è immediata.

COROLLARIO 6. *Nelle ipotesi della prop.* 3*a*) *si ha*:

$$\dim M \otimes_{A_0} N = \dim M + \dim N \, .$$

Nelle ipotesi della prop. 3*b*) *si ha*:

$$\dim M \otimes_{A_0} N \leqslant \dim M + \dim N \, .$$

COROLLARIO 7. *Nelle ipotesi della prop.* 4*a*) *si ha*:

$$\dim M \otimes_{A_0} B_0 = \dim M \, .$$

Nelle ipotesi della prop. 4*b*) *si ha*:

$$\dim M \otimes_{A_0} B_0 \leqslant \dim M \, .$$

OSSERVAZIONE 6. Il corollario 6, interpretato geometricamente, fornisce un noto risultato sulle varietà algebriche. Più precisamente: siano $R = k[X_0, \dots, X_r]$, $A = R/\mathfrak{a}$ (risp. $B = R/\mathfrak{b}$; $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ ideali omogenei di R), l'anello delle coordinate del cono affine $V_a(\mathfrak{a})$ (risp. $V_a(\mathfrak{b})$) associato alla varietà proiettiva $V_p(\mathfrak{a})$ (risp. $V_p(\mathfrak{b})$) in P_r^K, con K estensione algebricamente chiusa del corpo k.

Ricordando che $A \otimes_k B$ è l'anello delle coordinate affini di $V_a(\mathfrak{a}) \times \times V_a(\mathfrak{b})$ (cfr. [6], ch. I, § 6, prop. 1, pag. 62) e che $\dim A = \dim V_a(\mathfrak{a})$ ($\dim V_a(\mathfrak{a})$ = dimensione della varietà affine $V_a(\mathfrak{a})$; cfr. ad es. [1], ch. 11, teor. 11.25, pag. 124), allora per il cor. 6 si ottiene:

$$\dim V_a(\mathfrak{a}) \times V_a(\mathfrak{b}) = \dim V_a(\mathfrak{a}) + \dim V_a(\mathfrak{b})$$

che peraltro è un risultato valido in generale per qualsiasi varietà algebrica affine (cfr. ad es. [6], ch. I, § 7, prop. 5, pag. 87).

Concludiamo infine vedendo quale è il legame tra le dimensioni graduate degli A-moduli graduati M, N ed $M \otimes_A N$.

A tale scopo limitiamo dapprima le nostre considerazioni ai moduli non graduati. Ci occorre intanto premettere il seguente

LEMMA 8. *Siano* $A = k[X_1, \dots, X_r]$, $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ *due ideali equidimensionali* t.c. $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} \neq (1)$. *Allora si ha*:

$$\dim A/\mathfrak{a} + \dim A/\mathfrak{b} - \dim A \leqslant \dim A/\mathfrak{a} + \mathfrak{b} \leqslant \min(\dim A/\mathfrak{a}, \ \dim A/\mathfrak{b}).$$

Dim. È ovvio che la seconda diseguaglianza è sempre valida per un anello A qualsiasi. Dimostriamo allora la prima diseguaglianza.

Siano $\mathfrak{a}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ (risp. $\mathfrak{b}_j$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$) i primi isolati di $\mathfrak{a}$ (risp. $\mathfrak{b}$).

Considerando per una certa coppia di indici $(\bar{i}, \bar{j})$, gli ideali primi $\mathfrak{a}_{\bar{i}}$ e $\mathfrak{b}_{\bar{j}}$ tali che $\mathfrak{a}_{\bar{i}} + \mathfrak{b}_{\bar{j}} \neq (1)$, risulta (cfr. [9], vol. II, ch. VII, § 9, th. 27): $\dim A/\mathfrak{a}_{\bar{i}} + \dim A/\mathfrak{b}_{\bar{j}} - \dim A \leqslant \dim A/\mathfrak{a}_{\bar{i}} + \mathfrak{b}_{\bar{j}} \leqslant \dim A/\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ ($A/\mathfrak{a}_{\bar{i}} + \mathfrak{b}_{\bar{j}}$ è un quoziente di $A/\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$).

La tesi è allora immediata.

Ci è ora utile dare la seguente

Def. 3. Siano $M, N \neq 0$ dua A-moduli t.c. Ann M ed Ann N sono ideali equidimensionali. Allora M ed N si dicono *A-moduli equidimensionali.*

Possiamo ora enunciare la seguente

Proposizione 6. *Siano $A = k[X_1, \ldots, X_r]$, Med N due A-moduli equidimensionali* f.g., *$M \otimes_A N \neq 0$ l'A-modulo prodotto tensoriale. Allora si ha:*

$$\dim M + \dim N - \dim A \leqslant \dim M \otimes_A N \leqslant \min(\dim M, \dim N)\ .$$

Dim. Osserviamo che si ha (cfr. [3], ch. II, § 4, n. 4, prop. 18):

$$\operatorname{Supp} M \otimes_A N = \operatorname{Supp} M \cap \operatorname{Supp} N \Rightarrow V(\operatorname{Ann} M \otimes_A N) =$$
$$= V(\operatorname{Ann} M + \operatorname{Ann} N) \Rightarrow \sqrt{\operatorname{Ann} M \otimes_A N} = \sqrt{\operatorname{Ann} M + \operatorname{Ann} N}\ .$$

Ma poichè è noto che $\dim A/\mathfrak{a} = \dim A/\sqrt{\mathfrak{a}}$ ($\mathfrak{a}$ ideale di A), risulta allora:

$$\dim M \otimes_A N = \dim A/\operatorname{Ann} M + \operatorname{Ann} N\ .$$

Ora osserviamo che per le ipotesi fatte, Ann M ed Ann N sono due ideali equidimensionali dell'anello A t.c. Ann M + Ann $N \neq (1)$, perciò si può applicare ad essi il lemma 8.

La tesi è allora immediata.

Rileviamo che dalla dimostrazione della prop. 6 discende subito il seguente

COROLLARIO 8. *Siano M ed N due A-moduli* f.g., $M \otimes_A N \neq 0$ *l'A-modulo prodotto tensoriale. Allora si ha*:

$$M (\textit{risp.}\ N)\ A\text{-}\textit{modulo fedele} \Rightarrow \dim M \otimes_A N = \dim N \ (\textit{risp.} = \dim M)\ .$$

Passiamo ora ad estendere la prop. 6 ai moduli graduati, allo scopo di ottenere informazioni sulla $\dim_g M \otimes_A N$ che potranno essere utili per uno studio del polinomio di Hilbert dell'A-modulo graduato $M \otimes_A N$.

PROPOSIZIONE 7. *Siano $A = k[X_1, \ldots, X_r] = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} A_n$ l'anello graduato dei polinomi in r indeterminate, a coefficienti in un corpo k, M, $N \neq 0$ due A-moduli graduati equidimensionali* f.g. *Allora si ha*:

$$\dim_g M + \dim_g N - \dim_g A \leqslant \dim_g M \otimes_A N \leqslant \min (\dim_g M,\ \dim_g N)\ .$$

DIM. Ricordiamo che l'annullatore di un modulo graduato è un ideale omogeneo e che $M \otimes_A N$ è un A-modulo graduato (cfr. [2], ch. II, § 11, n. 5). Osserviamo inoltre che vale la seguente equivalenza:

$$M \neq 0 \ \text{ed} \ N \neq 0 \Leftrightarrow M \otimes_A N \neq 0\ .$$

Proviamo l'implicazione non banale. Posto $I = \bigoplus_{n > 0} A_n$, $k = A/I$ e $M_k = k \otimes_A M \simeq M/IM$, si ha:

$$M \otimes_A N = 0 \Rightarrow M_k \otimes_k N_k = 0 \Rightarrow M_k = 0 \quad \text{oppure} \quad N_k = 0\ .$$

Ma $M_I = 0 \Rightarrow M = 0$ (cfr. [2], ch. II, § 11, n. 4, cor. 1).

La tesi della prop. discende allora dalla prop. 6, utilizzando il teor. 4.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. F. ATIYAH - I. G. MACDONALD, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison Wesley, 1969.

[2] N. BOURBAKI, *Algèbre*, Hermann, Paris, 1962.

[3] N. BOURBAKI, *Algèbre Commutative*, Hermann, Paris, 1961.

[4] W. Gröbner, *Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano*, vol. XLI, Ed. Succ. Fusi, Pavia, 1971.
[5] W. Gröbner, *Modern Algebraische Geometrie, Die ideal-theoretischen grundlagen*, Springer-Verlag, 1949.
[6] D. Mumford, *Introduction to Algebraic Geometry*, preliminary version of first 3 Chapters.
[7] P. Salmon, *Corso di Istituzione di Geometria Superiore*, Genova, Anno Accademico 1968-69.
[8] G. Vecchio, *Prime nozioni sulla molteplicità in Algebra e Geometria Algebrica*, Gruppi 10 e 44 del Comitato per la Matematica del C.N.R., Anno Accademico 1965-66.
[9] O. Zariski - P. Samuel, *Commutative Algebra*, vol. I-II, Van Nostrand, 1958-60.

Lavoro pervenuto in redazione il 28 febbraio 1973.