RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANTONIO C. GRIOLI

Su alcune esperienze ideali riguardanti il principio di indifferenza materiale

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 47 (1972), p. 139-154

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1972__47__139_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 47 (1972)

SU ALCUNE ESPERIENZE IDEALI RIGUARDANTI IL PRINCIPIO DI INDIFFERENZA MATERIALE

ANTONIO C. GRIOLI *)

1. Il principio di indifferenza materiale [1]) figura tra i principi di cui un teorico può giovarsi nel formulare equazioni costitutive di meccanica, termodinamica ed elettromagnetismo. Qualche fisico però ha sollevato dubbi sulla sua validità riguardo a fenomeni di tipo giromagnetico.

In questa nota mi propondo di indagare sugli eventuali limiti di tale principio in riguardo al verificarsi di tali fenomeni in corpi la cui schematizzazione nella teoria dei sistemi continui richiede la considerazione del momento intrinseco della quantità di moto. Determino il periodo delle piccole oscillazioni di un cilindro di materiale paramagnetico immerso in un forte campo magnetico e il lavoro occorrente per imprimergli una certa velocità angolare quando graviti liberamente in un razzo; infine prendo in esame l'esperienza di Einstein e De Haas [2]). Constato come effettivamente vi sia differenza nei risultati a seconda che si ammetta o meno la validità del principio di indifferenza materiale e calcolo l'ordine di grandezza di tali differenze.

I risultati trovati mostrano come tali differenze siano piccole e possano quindi, in molti casi pratici, essere trascurate, in armonia con il lavoro di A. Bressan riguardante una lievissima influenza della gravitazione sull'elasticità [3]).

---

*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università di Padova - via Belzoni, 3 - 35100 Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

1) Vedi [3], p. 702.

2) Vedi [1].

3) Vedi [4].

2. Considero un cilindro omogeneo di materiale paramagnetico e ne schematizzo le molecole con un nucleo, formato da un protone e da un neutrone, e un elettrone uniformemente rotante attorno ad esso, su un'orbita circolare di raggio r.

Il momento orbitale di tale elettrone è dato da:

$$\overline{P}_o = m_e r^2 \overline{\omega}_0 = 2m_e \frac{S}{T} \overline{vers\, \omega_0} \tag{1}$$

dove m_e è la massa dell'elettrone, ω_0 la velocità angolare, S l'area racchiusa dall'orbita e T il periodo.

A tale momento angolare corrisponde in base al principio di equivalenza il momento magnetico:

$$\overline{m} = i\, s\, \overline{vers\, \omega_0} = -\frac{e}{2m_e} \overline{P}_o \,, \tag{2}$$

dove i rappresenta l'intensità di corrente dovuta alla rotazione dell'elettrone ed e la sua carica elettrica.

Si osservi che $\overline{P}_o$ non può assumere valori arbitrari, ma soltanto valori multipli dell'unità quantistica $\hbar = h/2\Pi$, essendo h la costante di Plank. Il momento angolare dell'intero atomo è somma del momento orbitale (1) e dei momenti angolari propri, o spin, dell'elettrone, del protone e del neutrone, che valgono mezza unità quantistica ciascuno e che penso dovuti ad un moto di rotazione di tali particelle attorno ad un loro asse baricentrale [4]).

Posso dunque esprimere tali momenti angolari con:

$$\overline{P}_e = \mathfrak{J}_1 \overline{\omega}_1 \qquad \overline{P}_p = \mathfrak{J}_2 \overline{\omega}_2 \qquad \overline{P}_n = \mathfrak{J}_3 \overline{\omega}_3 \,, \tag{3}$$

dove $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$, $\mathfrak{J}_3$ sono i momenti di inerzia di tali particelle rispetto ad assi baricentrali e $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$, $\overline{\omega}_3$ le velocità angolari.

Ricordo che pur non avendo senso secondo la meccanica quantistica il considerare elettrone, protone e neutrone come distribuzioni con-

---

[4]) Vedi [1].

tinue di massa, tuttavia, sulla base della teoria atomica di Bohr, da tali ipotesi possono attendersi dei risultati aventi valore di prima approssimazione e quindi certo sufficienti per i nostri scopi.

Anche ai momenti (3) corrispondono dei momenti magnetici, ma mentre quello dell'elettrone è confrontabile con quello dovuto al suo moto orbitale, gli altri sono di fronte a questo trascurabili [5]). Il momento angolare totale di un atomo è dunque:

$$\overline{P}=\overline{P}_o+\overline{P}_e+\overline{P}_p+\overline{P}_n\,, \tag{4}$$

dove $\overline{P}_o$, $\overline{P}_e$, $\overline{P}_p$ e $\overline{P}_n$ sono dati da (1) e dalle (3).

Suppongo il cilindro vincolato a ruotare senza attrito attorno al proprio asse a e lo penso immerso in un campo magnetico uniforme $\overline{H}$ parallelo ad a. L'orientazione dei momenti magnetici dei singoli atomi, e quindi dei rispettivi momenti angolari, sarà evidentemente influenzata dal campo, e vale la seguente formula [6]):

$$\overline{\cos\theta}=\frac{\sum\limits_{-j}^{+j}\frac{m}{j}e^{\frac{\beta m}{j}}}{\sum\limits_{-j}^{+j}e^{\frac{\beta m}{j}}} \qquad \text{con} \qquad \beta=\frac{MH}{kT} \tag{5}$$

dove $\overline{\cos\theta}$ è il valor medio del coseno dell'angolo θ formato da $\overline{H}$ col momento del generico atomo, m è la componente del momento angolare $\overline{j}$ dell'atomo secondo $\overline{H}$, MH è l'energia magnetica, k è la costante di Boltzmann e T la temperatura assoluta.

Da (5) si vede che per valori di T prossimi allo zero e valori elevati di H, si può pensare $\overline{\cos\theta}=1$, il che ci dice che i momenti magnetici dei vari atomi sono tutti paralleli al campo. Osservando inoltre che in un campo magnetico gli spin dell'elettrone, del protone e del neutrone possono assumere soltanto le orientazioni parallele o antiparallele al campo, si può concludere che per T prossima a zero e H sufficientemente elevata tutte le orbite elettroniche stanno su una giacitura ortogonale ad $\boldsymbol{H}$ ed inoltre sono paralleli ad $\overline{\boldsymbol{H}}$ gli assi baricentrali attorno a cui ruotano elettrone,

---

[5]) Vedi [5].
[6]) Vedi [1].

protone e neutrone. In questo caso i momenti angolari $\overline{P}$, che quando non vi è magnetizzaione sono variamente orientati e si equilibrano, ora sono concordemente orientati secondo la direzione di $\overline{\boldsymbol{H}}$ e dunque si sommano, dando luogo ad un momento intrinseco risultante della quantità di moto $\overline{\boldsymbol{K}}_i$ non nullo per l'intero cilindro.

Detta $\overline{\boldsymbol{k}}_i$ la densità di momento intrinseco della quantità di moto, si ha:

$$\overline{\boldsymbol{K}}_{(i)} = \int_C \overline{\boldsymbol{k}}_{(i)} dc, \tag{6}$$

dove C è il volume dell'intero cilindro e $\overline{\boldsymbol{k}}_{(i)}$ è data da:

$$\overline{\boldsymbol{k}}_{(i)} = \frac{dn}{dc}\overline{\boldsymbol{P}}, \tag{7}$$

dove dn è il numero di molecole contenute nel volume dc.

3. Sia $\mathcal{T} : Oxyz$ una terna fissa con l'asse z coincidente con l'asse a del cilindro e $\mathcal{T}' : O\xi\eta\zeta$ una terna solidale al cilindro, con $\zeta \equiv z$.

Si immagini il cilindro rotante con la velocità angolare $\overline{\omega^{(\tau)}}$ rispetto alla terna fissa. Se si ammette la validità del principio di indifferenza materiale, il momento intrinseco della quantità di moto che il cilindro ha rispetto alla terna corotante $\mathcal{T}'$ deve essere uguale a quello che esso ha rispetto alla terna fissa quando si trova macroscopicamente in quiete (ipotesi I).

Avendo indicato con $\overline{\omega_0}$ la velocità angolare orbitale dell'elettrone e con $\overline{\omega_1}$, $\overline{\omega_2}$, $\overline{\omega_3}$, le velocità angolari proprie dell'elettrone, del protone e del neutrone quando il cilindro è macroscopicamente in quiete, tali velocità angolari devono dunque essere le stesse rispetto a $\mathcal{T}'$ quando il cilindro ruota. In quest'ultimo caso le corrispondenti velocità angolari assolute sono allora:

$$\overline{\omega_\alpha{}^a} = \overline{\omega_\alpha} + \overline{\omega^\tau} \qquad \alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3. \tag{8}$$

Il momento angolare assoluto del generico atomo quando il cilindro ruota è:

$$(9)\quad \overline{P^a}=[m_e r^2(\omega_0+\omega^\tau)+\sum_1^3{}_i\,\mathfrak{I}_i(\omega_i+\omega^\tau)]\overline{c}_3=\overline{P}+(m_e r^2+\sum_1^3{}_i\,\mathfrak{I}_i)\omega^\tau\overline{c}_3\,,$$

avendo indicato con $\overline{c}_3$ il versore dell'asse z.

Indicando con h_0, h_1, h_2, h_3 le densità delle quantità $m_e r^2$, $\mathfrak{I}_1$, $\mathfrak{I}_2$, $\mathfrak{I}_3$, ossia queste ultime moltiplicate per dn/dc il momento intrinseco della quantità di moto assoluta è dunque dato, tenendo presente (6), (7), (9), da:

$$(10)\qquad \overline{K}_{(i)}{}^a=\overline{K}_{(i)}+\overline{c}_3\omega^\tau\int_C\sum_0^3{}_\alpha\, h\alpha dc.$$

Il momento toale della quantità di moto assoluta, somma del momento macroscopico della quantità di moto e di quello intrinseco, è dato da:

$$(11)\qquad \overline{K}_\Omega=\mathfrak{I}\overline{\omega}^\tau+B\overline{\omega}_0$$

avendo posto:

$$(12)\qquad \mathfrak{I}=\int_C h'dc \qquad\qquad B=\sum_0^3\alpha\int_C h\alpha dc$$

dove h' è la densità della quantità:

$$(13)\qquad \mathfrak{I}'=m_e r^2+(m_e+m_p+m_n)\rho^2+\sum_1^3{}_i\,\mathfrak{I}_i\,,$$

essendo ρ la distanza del baricentro del generico atomo dall'asse a. $\mathfrak{I}'$ rappresenta dunque il valor medio del momento di inerzia rispetto all'asse a di un generico atomo calcolato per un intero periodo di rotazione e $\mathfrak{I}$ è il momento di inerzia rispetto ad a dell'intero cilindro.

Il valor medio dell'energia cinetica di un atomo per un periodo di rotazione dell'elettrone attorno al nucleo è:

$$(14)\qquad \overline{t}=\frac{1}{2}\mathfrak{I}'\omega^{\tau^2}+\frac{1}{2}m_e r^2(\omega_0^2+2\omega_0\omega^\tau)+\frac{1}{2}\sum_1^3{}_i\,\mathfrak{I}_i(\omega_i^2+2\omega_i\omega^\tau).$$

Per l'intero cilindro si ha:

$$(15) \qquad \overline{\boldsymbol{T}} = \frac{1}{2}\omega^{\tau^2}\int_C h' dc + \frac{1}{2}\sum_0^3{}_\alpha\,(\omega_\alpha{}^2 + 2\omega_\alpha\omega^\tau)\int_C h\alpha dc.$$

Da (12), ponendo:

$$(16) \qquad D = \sum_0^3{}_\alpha\,\omega_\alpha\int_C h\alpha dc,$$

segue:

$$(17) \qquad \overline{\boldsymbol{T}} = \frac{1}{2}\mathfrak{J}\omega^{\tau^2} + \frac{1}{2}\sum_0^3{}_\alpha\,\omega_\alpha{}^2\int_C h\alpha dc + D\omega^\tau.$$

Se invece non si ammette la validità del principio di indifferenza materiale e si suppone che il momento intrinseco assoluto della quantità di moto quando il cilindro ruota sia lo stesso di quando è macroscopicamente in quiete (ipotesi II), si ha per le velocità angolari assolute:

$$(18) \qquad \overline{\omega_\alpha{}^a} = \overline{\omega_\alpha} \qquad \alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Per l'ipotesi fatta il momento intrinseco assoluto della quantità di moto è dato in questo caso da:

$$(19) \qquad \overline{\boldsymbol{K}}{}'^a_{(i)} = \overline{\boldsymbol{K}}_{(i)}\,.$$

Il momento totale assoluto della quantità di moto è in questo caso:

$$(20) \qquad \overline{\overline{K}}{}'_\Omega = (\mathfrak{J} - B)\overline{\omega\tau} + B\overline{\omega_0}\,.$$

Il valor medio dell'energia cinetica di un atomo per un periodo di rotazione dell'elettrone attorno al nucleo è:

$$(21) \qquad \bar{t}' = \frac{1}{2}m_e r^2\omega_0^2 + \frac{1}{2}\sum_1^3{}_i\,\mathfrak{J}_i\omega_i^2 + \frac{1}{2}(m_e + m_p + m_n)\rho^2\omega^{\tau^2}.$$

Tenuto conto di (13), la (21) si può scrivere:

$$(22) \qquad \bar{t}' = \frac{1}{2}\mathfrak{J}'\omega^{\tau^2} - \frac{1}{2}m_e r^2\omega^{\tau^2} - \sum_1^3{}_i\,\mathfrak{J}_i\omega^{\tau^2} + \frac{1}{2}m_e r^2\omega_0^2 + \frac{1}{2}\sum_1^3{}_i\,\mathfrak{J}_i\omega_i^2.$$

Per l'intero cilindro si ha:

$$\overline{T'} = \frac{1}{2}(\mathfrak{J} - B)\omega^{\tau 2} + \frac{1}{2}\sum_{0}^{3}{}_{\alpha}\, \omega_{\alpha}^{2} \int hadc. \tag{23}$$

Quando il cilindro si trova macroscopicamente in quiete non vi è differenza nei momenti intrinseco e totale della quantità di moto e nel valore dell'energia cinetica sia che si parta dall'ipotesi I o dall'ipotesi II. Ponendo in (10), (11), (17), (19), (20), (23), $\overline{\omega^{\tau}} = \overline{O}$ si ha infatti:

$$\overset{\circ}{\overline{K}}{}^{a}_{(i)} = \overset{\circ}{\overline{K}}{}'^{a}_{(i)} = \overline{K}_{(i)} \tag{24}$$

$$\overset{\circ}{\overline{K}}_{\Omega} = \overset{\circ}{\overline{K}}{}'_{\Omega} = \overline{K}_{(i)} \tag{25}$$

$$\overline{T}^{0} = \overline{T}'^{0} = \frac{1}{2}\sum_{0}^{3}{}_{\alpha}\, \omega_{\alpha}^{2} \int_{C} hadc. \tag{26}$$

4. Mi propongo di calcolare il lavoro occorrente per imprimere al cilindro una velocità angolare $\overline{\omega^{\tau}}$ a partire dalla quiete. Se si parte dalla ipotesi I il momento intrinseco della quantità di moto del cilindro, quando questo ruota, subisce un incremento dato dalla (10). Il lavoro L necessario ad imprimere al cilindro la velocità angolare $\overline{\omega^{\tau}}$ è dato allora dalla somma della sua forza viva macroscopica e della forza viva corrispondente all'incremento del momento intrinseco assoluto della quantità di moto. Da (17) e (26) segue:

$$L = \overline{T} - \overline{T}^{0} = \frac{1}{2}\mathfrak{J}\omega^{\tau 2} + D\omega^{\tau}. \tag{27}$$

Se si parte invece dall'ipotesi II, da (23) e (26) segue:

$$L' = \frac{1}{2}(\mathfrak{J} - B)\omega^{\tau 2}. \tag{28}$$

Il confronto tra (27) e (28) mostra come vi sia differenza di risultati a seconda che si parta dall'ipotesi I o dall'ipotesi II, tale differenza essendo data da:

$$\Delta L = L - L' = D\omega^{\tau} - \frac{1}{2} B\omega^{\tau^2}. \tag{29}$$

5. Considero ancora il cilindro immerso nel campo magnetico uniforme $\overline{\boldsymbol{H}}$, ma anzichè vincolato per a, sospeso per un filo inestensibile di costante di torsione τ, per il suo baricentro, parallelamente ad $\overline{\boldsymbol{H}}$ ed all'accelerazione di gravità. Mi propongo di studiare le piccole oscillazioni del cilindro attorno alla sua posizione di equilibrio stabile.

Sia θ l'angolo contato in senso antiorario formato da un semipiano fisso e da uno solidale al cilindro, entrambi passanti per il filo e scelti in modo che sia $\theta = 0$ nella posizione di equilibrio stabile.

Nell'ipotesi I l'energia cinetica del cilindro è data dalla (17), ove a ω^{τ} va sostituito $\dot{\theta}$.

Il momento dovuto alla torsione del filo è:

$$\overline{\boldsymbol{M}} = -\tau\theta\overline{\boldsymbol{c}}_3\,. \tag{30}$$

A tale momento corrisponde il potenziale:

$$V = -\frac{1}{2}\tau\theta^2. \tag{31}$$

L'equazione differenziale delle piccole oscillazioni è dunque:

$$\mathfrak{J}\ddot{\theta} = -\tau\theta. \tag{32}$$

Da (32) segue che il periodo di tali oscillazioni è:

$$\mathfrak{T} = 2\Pi\sqrt{\mathfrak{J}/\tau}. \tag{33}$$

Nell'ipotesi II l'energia cinetica del cilindro è invece data dalla (23), ove a ω^{τ} va sostituito $\dot{\theta}$, mentre il potenziale è dato ancora dalla (31). In questo caso l'equazione delle piccole oscillazioni diviene:

$$(\mathfrak{J} - B)\ddot{\theta} = -\tau\theta \tag{34}$$

e il periodo è:

$$\mathfrak{T}' = 2\Pi\sqrt{\frac{\mathfrak{J}-B}{\tau}}. \tag{35}$$

Anche in questo caso vi è differenza di risultati, come mostra il confronto di (33) e (35) a seconda che si parta dall'ipotesi I o dall'ipotesi II. Tale differenza è data da:

$$\Delta\mathfrak{T} = 2\Pi\left(\sqrt{\mathfrak{J}/\tau} - \sqrt{\frac{\mathfrak{J}-B}{\tau}}\right) \tag{36}$$

6. Considero ancora il cilindro magnetizzato, rotante attorno ad a con velocità angolare $\overline{\omega^\tau}$. Suppongo di scaldarlo bruscamente così che si distrugga l'ordine dovuto al campo magnetico. Se si parte dall'ipotesi I il momento intrinseco assoluto della quantità di moto è dato da (10), e per effetto del disordine dovuto all'aumento di temperatura nella (10) si distrugge la quantità $\boldsymbol{K}_{(i)}$ e per il principio di conservazione del momento della quantità di moto totale, al decremento $\overline{\boldsymbol{K}}_{(i)}$ del momento intrinseco della quantità di moto, corrisponde un incremento del momento macroscopico pari a $\overline{\boldsymbol{K}}_{(i)}$. Detti $\overline{\boldsymbol{K}}_\Omega^-$ e $\overline{\boldsymbol{K}}_\Omega^+$ i momenti totali della quantità di moto del cilindro rispettivamente prima e dopo il riscaldamento, e $\overline{\omega^\tau}$, $\overline{\omega^\tau} + \Delta\overline{\omega^\tau}$ le relative velocità angolari, da (11) segue:

$$\overline{\boldsymbol{K}}_\Omega^- = \mathfrak{J}\overline{\omega^\tau} + \overline{\boldsymbol{K}}_{(i)}. \tag{37}$$

È inoltre:

$$\overline{K}_\Omega^+ = \mathfrak{J}^*(\overline{\omega^\tau} + \Delta\overline{\omega^\tau}). \tag{38}$$

Nella (38) compare $\mathfrak{J}^*$ al posto di $\mathfrak{J}$ poichè dopo il riscaldamento le orbite elettroniche non stanno più su una stessa giacitura, ma su varie giaciture, così che il momento di inerzia del cilindro rispetto all'asse a non è più $\mathfrak{J}$ ma ha un valore compreso fra $\mathfrak{J} - \int_C hdc$ e $\mathfrak{J}$ stesso. È dunque:

$$\mathfrak{J}^* = \mathfrak{J} - \alpha\int_C hdc \quad \text{con } 0 < \alpha < 1. \tag{39}$$

Dovendo essere:

$$\overline{K_\Omega}^- = \overline{K_\Omega}^+, \tag{40}$$

da (37), (38) e (40) si ricava:

$$\Delta\overline{\omega}^\tau = \frac{\overline{K}_{(i)} + (\mathfrak{J} - \mathfrak{J}^*)\overline{\omega}^\tau}{\mathfrak{J} - \alpha \int\limits_C h dc}. \tag{41}$$

Si ammetta ora l'ipotesi II. Il momento intrinseco assoluto della quantità di moto è dato questa volta dalla (19), ma anche in questo caso per effetto del riscaldamento si distrugge la quantità $\boldsymbol{K}_{(i)}$ e quindi anche in questo caso $\overline{\boldsymbol{K}}_{(i)}$ è l'incremento del momento macroscopico della quantità di moto. Detti $\overline{\boldsymbol{K}'_\Omega}^-$ e $\overline{\boldsymbol{K}'_\Omega}^+$ i momenti totali della quantità di moto rispettivamente prima e dopo il riscaldamento, e $\overline{\omega}^\tau$, $\overline{\omega}^\tau + \Delta'\overline{\omega}^\tau$ le relative velocità angolari da (20) si ottiene:

$$\overline{\boldsymbol{K}'_\Omega}^- = (\mathfrak{J} - B)\overline{\omega}^\tau + \overline{\boldsymbol{K}}_{(i)} \qquad \overline{\boldsymbol{K}'_\Omega}^+ = (\mathfrak{J} - B)(\overline{\omega}^\tau + \Delta\overline{\omega}^\tau). \tag{42}$$

Dovendo essere:

$$\overline{\boldsymbol{K}'_\Omega}^- = \overline{\boldsymbol{K}'_\Omega}^+, \tag{43}$$

da (42) e (43) segue:

$$\overline{\Delta'\omega^\tau} = \frac{\overline{\boldsymbol{K}}_{(i)}}{\mathfrak{J} - B}. \tag{44}$$

Anche in questo caso vi è dunque differenza nel risultato a seconda che si accetti l'ipotesi I o l'ipotesi II, tale differenza essendo data da:

$$\Delta\overline{\omega}^\tau - \Delta'\overline{\omega}^\tau = \frac{\overline{\boldsymbol{K}}_{(i)}}{\mathfrak{J} - \alpha \int\limits_C h dc} - \frac{\overline{\boldsymbol{K}}_{(i)}}{\mathfrak{J} - B} \tag{45}$$

7. Considero ora l'esperienza di Einstein e De Haas. Il cilindro sia vincolato attorno al proprio asse a temperatura prossima allo zero assoluto e in quiete. In assenza di magnetizzazione il momento totale della quantità di moto è nullo poichè sono nulli sia il momento macroscopico della quantità di moto che quello intrinseco. Si magnetizzi quindi bruscamente il cilindro parallelamente al proprio asse. Sotto l'effetto del campo magnetico il cilindro acquista un momento intrinseco di quantità di moto non nullo e di conseguenza, per il principio di conservazione del momento totale della quantità di moto, acquista anche un momento macroscopico di quantità di moto uguale e contrario. Se si parte dalla ipotesi I il momento totale della quantità di moto quando il cilindro ha acquistato la velocità angolare $\overline{\omega^\tau}$ è dato dalla (11), e tale momento deve essere nullo. Si ha dunque:

$$\mathfrak{J}\overline{\omega^\tau}+\overline{\boldsymbol{K}}_{(i)}=\overline{O}. \tag{46}$$

Da (46) segue:

$$\overline{\omega^\tau}=-\frac{\overline{\boldsymbol{K}}_{(i)}}{\mathfrak{J}}. \tag{47}$$

Se si parte dall'ipotesi II invece, il momento totale della quantità di moto quando il cilindro ha acquistato la velocità angolare $\overline{\omega'^\tau}$ è dato da (20), ove a $\overline{\omega^\tau}$ si sostituisca $\overline{\omega'^\tau}$. Annullando tale quantità si ha:

$$(\mathfrak{J}-B)\overline{\omega'^\tau}+\overline{\boldsymbol{K}}_{(t)}=\overline{O}. \tag{48}$$

Da (48) segue:

$$\overline{\omega'^\tau}=-\frac{\overline{\boldsymbol{K}}_{(i)}}{\mathfrak{J}-B}. \tag{49}$$

La differenza nei risultati a seconda che si parta dall'ipotesi I o dall'ipotesi II è in questo caso:

$$\Delta\overline{\omega^\tau}=\overline{\omega^\tau}-\overline{\omega'^\tau}=-\frac{\overline{\boldsymbol{K}}_{(i)}}{\mathfrak{J}}+\frac{\overline{\boldsymbol{K}}_{(i)}}{\mathfrak{J}-B}. \tag{50}$$

8. Voglio ora stabilire l'ordine di grandezza delle differenze sin qui trovate nei risultati a seconda che si parta dall'ipotesi I o dall'ipotesi II. Assumo i seguenti valori per le grandezze che vi compaiono [7]):

$$(51) \qquad \begin{aligned} m_e &= 9 \cdot 10^{-28} \text{ g.} \qquad & m_p = m_n &= 1{,}65 \cdot 10^{-24} \text{ g.} \\ r &= 0{,}5 \cdot 10^{-8} \text{ cm.} \qquad & \hbar &= 10^{-27} \text{ erg. sec.} \end{aligned}$$

Essendo certamente ω_0, ω_1, ω_2, $\omega_3 \gg \omega^\tau$, l'ordine di grandezza di ΔL in (29) è dato dai termini che contengono ω^τ al primo grado; si può dunque porre:

$$(52) \qquad \Delta L \approx D\omega^\tau.$$

Per un atomo è:

$$(53) \qquad (m_e r^2 \omega_0 + \sum_1^3{}_i \, \mathfrak{I}_i \omega_i)\omega^\tau = \frac{5}{2} \hbar\omega^\tau = 2{,}5 \cdot 10^{-27} \omega^\tau \text{ erg.}$$

Essendo la massa dell'atomo assunto come modello, data praticamente da:

$$(54) \qquad m_a \approx m_p + m_n = 3{,}3 \cdot 10^{-24} \text{ g.}$$

in un grammo di materiale vi è un numero di atomi dato da:

$$(55) \qquad n = \frac{1}{3{,}3 \cdot 10^{-24}} \approx 3 \cdot 10^{23}.$$

Da (29) segue dunque:

$$(56) \qquad \Delta L \approx 7{,}5 \cdot 10^{-4} \omega^\tau \text{ erg.}$$

per ogni grammo di materiale.

Considero ora la (36) e valuto l'ordine di grandezza del termine B che vi compare. Si ha per ogni grammo di materiale:

$$(57) \qquad \int_C h\,dc = n \cdot m_e r^2 \approx 7{,}5 \cdot 10^{-22} \text{ g. cm}^2$$

---

7) Vedi [2].

$$(58) \qquad \int_C \sum_{1}^{3}{}_i\, h_i dc = n \sum_{1}^{3}{}_i\, \mathfrak{J}_i\,.$$

Inoltre deve essere:

$$(59) \qquad \sum_{1}^{3}{}_i\, \mathfrak{J}_i \omega_i = \frac{3}{2}\hbar.$$

Assumendo come valore comune del raggio del protone, neutrone ed elettrone il valore:

$$(60) \qquad r' = 5 \cdot 10^{-13} \text{ cm},$$

e supponendo le loro masse concentrate tutte a distanza r' dai loro *baricentri*, il che approssima per eccesso $\mathfrak{J}_i$, si ha:

$$(61) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{J}_1 &= m_e r'^2 \approx 2{,}5 \cdot 10^{-52} \text{ g. cm}^2 \\ \mathfrak{J}_2 = \mathfrak{J}_3 &= 1838 m_e r'^2 \approx 4{,}6 \cdot 10^{-49} \text{ g. cm}^2. \end{aligned}$$

Segue che $\int_C \sum_{3}^{1}{}_i\, h_i dc$ è praticamente dato da:

$$(62) \qquad \int_C \sum_{1}^{3}{}_i\, h_i dc \approx 2n\mathfrak{J}_2 \approx 2{,}8 \cdot 10^{-25}.$$

Volendo esaminare il problema dal punto di vista della relatività ristretta, nel qual caso però ci scosteremo dallo spirito della teoria di Bohr sin qui seguita, ricordando che la velocità dei punti dell'elettrone, del protone e del neutrone non può superare quella c della luce e supponendo che gli effetti relativistici di incremento della massa comincino a farsi sentire sensibilmente per velocità maggiori di $c/10$, si vede che tali effetti vanno considerati soltanto per valori di ω_i varianti negli intervalli:

$$(63) \qquad \frac{3}{5} \cdot 10^{22} < \omega_i < \frac{3}{5} \cdot 10^{23} \qquad\qquad i = 1,\ 2,\ 3,$$

se si osserva che i punti dell'elettrone, protone e neutrone a distanza r' dall'asse baricentrale hanno velocità il cui modulo è dato, omettendo termini trascurabili dovuti al sovrapporsi di altri moti, da:

$$v_i = r'\omega_i \qquad i=1,\,2,\,3. \tag{64}$$

Inoltre le ω_i devono soddisfare alle relazioni:

$$\mathfrak{J}_i\omega_i = \frac{\hbar}{2}. \qquad i=1,\,2,\,3. \tag{65}$$

Da (61) e (65) si vede come ω_2 e ω_3 siano inferiori all'estremo inferiori dei valori (63) e quindi per il calcolo di $\mathfrak{J}_2$ e $\mathfrak{J}_3$ si può trascurare l'incremento relativistico della massa.

Per quanto riguarda $\mathfrak{J}_1$, da (64) e (65) segue:

$$\mathfrak{J}_1 < 9\cdot 10^{-50}\ \text{g. cm}^2. \tag{66}$$

Si ha dunque:

$$\int_C \sum_1^3{}_i\, h_i dc < 3\cdot 10^{-25}\ \text{g. cm}^2. \tag{67}$$

In tutti i casi è:

$$\int_C \sum_1^3{}_i\, h_i dc \ll \int_C h_0 dc, \tag{68}$$

e la (36) diviene:

$$\Delta\mathfrak{T} \approx \frac{2\Pi}{\sqrt{\tau}}\left(\sqrt{\mathfrak{J}} - \sqrt{\mathfrak{J} - \int_C h_0 dc}\right) \tag{69}$$

Data la piccolezza di $\int_C h_0 dc$, considerato lo sviluppo in serie di Mc Laurin della funzione $\sqrt{\mathfrak{J} - x}$ e trascurando gli infinitesimi del secondo ordine rispetto ad x, si ottiene da (69):

$$\Delta\mathfrak{T} \approx \frac{\Pi}{\sqrt{\mathfrak{J}\tau}} \int_C h_0 dc \approx \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{J}\tau}}\, 2{,}3\cdot 10^{-21}\ \text{sec.} \tag{70}$$

Considero ora la (45); valuto $\overline{\boldsymbol{K}}_{(i)}$ per un grammo di materiale.

Si ha:

$$\overline{\boldsymbol{K}}_{(i)}=D\overline{\boldsymbol{c}}_3\approx 7{,}5\cdot 10^{-4}\ \mathrm{erg/sec}\ \overline{\boldsymbol{c}}_3\,. \tag{71}$$

Da (68) segue:

$$\Delta\overline{\omega}^{\tau}-\Delta'\overline{\omega}^{\tau}=\overline{\boldsymbol{K}}_{(i)}\left(\frac{1}{\mathfrak{J}-\alpha\int\limits_{C}h_0dc}-\frac{1}{\mathfrak{J}-\int\limits_{C}h_0dc}\right). \tag{72}$$

Sviluppando in serie di Mc Laurin le funzioni $\frac{1}{\mathfrak{J}-\alpha x}$ e $\frac{1}{\mathfrak{J}-x}$ e trascurando infinitesimi del secondo ordine, si ha:

$$\Delta\overline{\omega}^{\tau}-\Delta'\overline{\omega}^{\tau}=\overline{\boldsymbol{K}}_{(i)}\frac{\alpha-1}{\mathfrak{J}}\int\limits_{C}h_0dc\approx\frac{\alpha-1}{\mathfrak{J}}\cdot 5{,}6\cdot 10^{-25}\ \mathrm{sec.}^{-1}\ \overline{\boldsymbol{c}}_3\,. \tag{73}$$

Si consideri ora la (50). Da (68) e (71), con uno sviluppo in serie di Mc Laurin e trascurando gli infinitesimi di ordine superiore a $\int\limits_{C}h_0dc$ si ottiene:

$$\Delta\overline{\omega}^{\tau}=\overline{\boldsymbol{K}}_{(i)}\frac{\int\limits_{C}h_0dc}{\mathfrak{J}}\approx\frac{1}{\mathfrak{J}}\cdot 5{,}6\cdot 10^{-25}\ \mathrm{sec}^{-1}\ \overline{\boldsymbol{c}}_3\,, \tag{74}$$

per un grammo di materiale.

SUMMARY - The principle of material (frame) indifference occurs among the principles that a theorist may call to his aid to formulate definite constitutive equations of mechanics, thermodynamics and electromagnetism. However some physicists doubt of its validity for certain phenomena of the gyromagnetic type (experiment of Einstein De Haas).

This paper concerns possible limits of validity for the above principle in connection with gyromagnetic phenomena inside bodies whose schematization in continuum mechanics involves intrinsic moment of momentum.

I calculate the period of small oscillations for a cylinder $\mathcal{C}$ of a paramagnetic material in a strong magnetic field, and the work required to give to $\mathcal{C}$ the angolar velocity $\overline{\omega}^{\tau}$. Lastly I take the Einstein De Haas experiment into account.

The aformentioned considerations are carried out twice, assuming, first, the validity of the principle of material indifference, and than a natural hypothesis incompatible with it. In both cases, in order to simplify calculations, I schematize the typical molecule of $\mathcal{C}$ into an atom consisting of an electron and a nucleous formed by a neutron and a proton; the electron is assumed to rotate uniformely around the nucleous along a circular orbit.

I evaluate the magnitude order of the differences $\triangle P$, $\triangle L$ and $\triangle \overline{\omega^\tau}$ between the values attributed on the casis of the two assumptions above, to the following magnitudes: the period P of the small oscillations, the work L required to communicate to $\mathcal{C}$ the angular velocity $\overline{\omega^\tau}$ gained by $\mathcal{C}$ during a sudden magnetization of $\mathcal{C}$ (considered in the Einstein - De Haas experiment) — cf. (56), (70) and (74) where the mass of C is assumed be equal 1 gr., where $\mathfrak{J}$ is the moment of inertia of $\mathcal{C}$, and where τ the torsion constant of the thread by which $\mathcal{C}$ is hanged.

The quantity $\triangle P$ to $\triangle \overline{\omega^\tau}$ turn out to be extremely small, so that the principle of material indifference can be acceptable in connection with the phenomena being considered.

BIBLIOGRAFIA

[1] BORN MAX: *Fisica Atomica*, Boringhieri.

[2] WHITE, H. E.: *Introduction to Atomic Spectra*, Mc Graw-Hill Book Company inc.

[3] TRUESDELL, C.: *The Classical Field Theories*, Handbuch der Physik, Springer-Verlag.

[4] BRESSAN, A.: *On the Influence of Gravity on Elasticity*, Meccanica, n. 4, p. 195.

[5] ROSTAGNI, A.: *Elettrologia*, G. Randi, Padova.

Manoscritto pervenuto in redazione il 2 novembre 1971.