RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

G. DE MARCO

Funzioni reali continue e semicontinue

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 43 (1970), p. 203-208

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1970__43__203_0>

FUNZIONI REALI CONTINUE E SEMICONTINUE

G. De Marco *)

1. Sia X un insieme non vuoto, e sia $\boldsymbol{R}^X$ il corpo dei numeri reali. Diciamo f-sottoalgebre di $\boldsymbol{R}^X$ quelle sottoalgebre di $\boldsymbol{R}^X$ che sono algebre di tutte le funzioni continue di X in $\boldsymbol{R}$ per una topologia su X.

Detto F un sottoinsieme non vuoto di $\boldsymbol{R}^X$, viene in questa nota dato un procedimento che permette di costruire, con sole operazioni algebriche e reticolari su elementi di $\boldsymbol{R}^X$, la minima f-sottoalgebra di $\boldsymbol{R}^X$ che contiene F.

S. Ciampa (cfr. [2]) ha considerato una questione analoga, determinando le f-sottoalgebre di funzioni limitate di $\boldsymbol{R}^X$. Qui viene ripresa la condizione da lui data perchè una sottoalgebra di $\boldsymbol{R}^X$ sia una f-sottoalgebra di funzioni limitate, e vengono in più determinate le f-sottoalgebre di funzioni non limitate.

Viene mostrato come il procedimento seguito conduca, con lievi modifiche, anche alla determinazione dei sottoinsiemi di $\boldsymbol{R}^X$ che sono totalità delle funzioni semicontinue inferiormente per una topologia su X. Anche questa condizione è stata considerata, sempre in [2], da S. Ciampa.

Ringrazio S. Ciampa che mi ha suggerito la presente ricerca.

Le notazioni e la terminologia sono essenzialmente quelle di [3] tranne che per gli spazi completamente regolari, che possono qui non essere di Hausdorff.

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca del C.N.R.
Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

2. Sia dunque X un insieme non vuoto, e sia $F \subseteq \boldsymbol{R}^X$. Se $w = w(F)$ è la topologia debole di F, cioè la meno fine topologia su X per cui le funzioni di F sono continue, l'algebra $C = C(X, w)$ delle funzioni w-continue è ovviamente la minima f-sottoalgebra di $\boldsymbol{R}^X$ contenente F.

Una prebase di chiusi per w è costituita dagli insiemi

$$\begin{matrix} f^{-1}[(-\infty, r]] \\ f^{-1}[[r, +\infty)] \end{matrix} \qquad f \in F,\ r \in \boldsymbol{R}$$

Si ha

$$f^{-1}[(-\infty, r]] = Z[(f-r) \vee 0]$$

$$f^{-1}[[r, +\infty)] = Z[(f-r) \wedge 0]$$

Sia B la minima sottoalgebra con unità di $\boldsymbol{R}^X$, che sia un sottoreticolo di $\boldsymbol{R}^X$, e contenga F. Sia A la sottoalgebra delle funzioni limitate di B.

Poichè gli zeri delle funzioni di B sono gli zeri delle funzioni di A, la famiglia di insiemi $\{Z(u) : u \in A\}$ è una base di chiusi per w.

PROPOSIZIONE 1. *Sia $f \in R^X$ inferiormente limitata, w-semicontinua inferiormente. Essa è inviluppo delle funzioni di A che non superano f.*

DIM. Supponiamo f non negativo (in caso contrario basta considerare la funzione $f-n$, con $n = \inf\{f(x) : x \in X\}$).

Se per $x \in X$ si ha $f(x) > 0$, sia $r \in \boldsymbol{R}$ tale che $0 \leqslant r < f(x)$.

Per la semicontinuità inferiore, esiste un intorno aperto U di x tale che per ogni $y \in U$, $f(y) > r$. Essendo gli $Z(u)$, $u \in A$, una base di chiusi, esiste $u \in A$ tale che $Z(u) \supseteq X - U$ e $x \notin Z(u)$. Posto $\xi = u(x)$, la funzione

$$g = r(((\xi^{-1}u) \vee 0) \wedge 1)$$

è una funzione di A tale che $g(x) = r$, $0 \leqslant g \leqslant f$; infatti, se $y \notin U$, $g(y) = 0 \leqslant f(y)$, se $y \in U$, $g(y) \leqslant r < f(y)$.

PROPOSIZIONE 2. *Sia* $f \in R^X$ *superiormente limitata, w-semicontinua superiormente. Essa è inviluppo inferiore delle funzioni* $v \in A$ *per cui* $v \geq f$.

DIM. $-f$ è inferiormente limitata, w-semicontinua inferiormente. Per la prop. 1

$$-f = \bigvee \{u \in A : u \leq -f\}$$

quindi

$$f = \bigwedge \{v \in A : v \geq f\}.$$

3. Diciamo L-sezione, o sezione reticolare di A una coppia ordinata (Φ, Ψ) di sottoinsiemi con vuoti di A tali che

i) $\bigvee \Phi$, $\bigwedge \Psi$ esistono in R^X, e $\bigvee \Phi = \bigwedge \Psi$

ii) se $\varphi \in \Phi$, $\varphi' \in A$, $\varphi' \leq \varphi$ allora $\varphi' \in \Phi$ e se $\psi \in \Psi$, $\psi' \in A$, $\psi' \geq \psi$ allora $\psi' \in \Psi$.

La funzione $f = \bigvee \Phi = \bigwedge \Psi$ la diciamo elemento separatore della L-sezione.

Indichiamo con C^* la sottoalgebra delle funzioni limitate di $C = C(X, w)$.

TEOREMA 1. C^* *è l'insieme degli elementi separatori delle L-sezioni di* A.

DIM. Se $f \in C^*$, posto $\Phi = \{\varphi \in A : \varphi \leq f\}$, $\Psi = \{\psi \in A : \psi \geq f\}$, (Φ, Ψ) è una L-sezione di A di cui f è elemento separatore, per le Propp. 1, 2.

Sia poi f elemento separatore di una L-sezione (Φ, Ψ) di A; per ogni $\varphi \in \Phi$ e ogni $\psi \in \Psi$ si ha $\varphi \leq f \leq \psi$, ed essendo φ e ψ limitate, tale è anche f. Inoltre f è inferiormente semicontinua, essendo $f = \bigvee \Phi$, e superiormente semicontinua in quanto $f = \bigwedge \Psi$.

Noto C^*, C si costruisce nel modo seguente:

Diciamo t-successione, o successione di troncamenti di C^* una successione $(u_n)_{n \in N}$ di elementi non negativi di C^* tale che

I) $\bigvee \{u_n : n \in N\}$ esiste in R^X

II) $u_{n+1} \wedge n = u_n$ per ogni $n \in N$.

Sia C_+ la totalità delle funzioni non negative di C.

TEOREMA 2. *C_+ è l'insieme degli inviluppi superiori delle t-successioni di C^*.*

DIM. Se $f \in C_+$, si ponga $u_n = f \wedge n$. La successione $(u_n)_{n \in N}$ è una t-successione di C^* tale che $f = \bigvee \{u_n : n \in N\}$.

Sia poi f inviluppo superiore di una t-successione di C, $f = \{u_n : n \in N\}$. Allora $u_n = f \wedge n$, e posto $A_n = \{x \in X : f(x) < n\} = \{x \in X : u_n(x) < n\}$, gli A_n sono aperti, $\bigcup \{A_n : n \in N\} = X$, e $f \mid A_n = u_n \mid A_n$ è continua per ogni n. Quindi f è continua.

La conoscenza di C_+ porge C, potendosi per ogni $f \in C$ scrivere

$$f = f^+ - f^-$$

dove $f^+ = f \vee 0$, $f^- = -(f \wedge 0)$.

4. Mostriamo ora come il procedimento del paragrafo precedente conduca alla determinazione dei sottoreticoli I di $\boldsymbol{R}^X$ che sono reticoli di tutte le funzioni semicontinue inferiormente di X in R per una topologia su X. Per semplicità di linguaggio diremo I-reticoli questi sottoreticoli. Dato un sottoinsieme, F, di $\boldsymbol{R}^X$ costituiremo il minimo I-sottoreticolo di $\boldsymbol{R}^X$ contenente F.

Sia w_i la meno fine topologia su X che rende semicontinue inferiormente le funzioni di F.

Una prebase di chiusi per w_i è costituita dagli insiemi

$$f^{-1}[(-\infty, r]] = Z[(f-r) \vee 0] \quad f \in F \quad r \in R$$

Sia G il sottoreticolo di $\boldsymbol{R}^X$ generato dalle costanti non negative e dalle funzioni della forma

$$s \cdot (f-r) \vee 0 \quad f \in F; \quad r \in \boldsymbol{R}; \quad s \in \boldsymbol{R}_+$$

($\boldsymbol{R}_+$ denota l'insieme dei numeri reali non negativi).

Allora G contiene solo funzioni non negative, ed essendo per $f, g \in G$

$$Z(f) \cup Z(g) = Z(f \wedge g)$$

gli insiemi $\{Z(u) : u \in G\}$ costituiscono una base di chiusi per w_i. Poniamo $A' = \boldsymbol{R} + G$ dove $\boldsymbol{R} + G$ indica la totalità delle funzioni della forma $r+g$, $r \in \boldsymbol{R}$, $g \in G$.

Proposizione 1'. *Ogni $f \in \boldsymbol{R}^X$ w_i-semicontinua inferiormente, e inferiormente limitata, è inviluppo superiore delle funzioni $u \in A'$ tali che $u \leq f$.*

La proposizione 1' si dimostra in modo identico alla Prop. 1 dimostrando dapprima che ogni funzione w_i-semicontinua inferiormente, e non negativa, è inviluppo superiore delle funzioni di G che sono non maggiori di essa. In questa dimostrazione si sfrutta la proprietà di chiusura di G rispetto alla moltiplicazione di suoi elementi per costanti reali non negative. L'essere poi $A' = \boldsymbol{R} + G$ permette di « traslare » convenientemente le operazioni fatte anche a funzioni non positive.

Diciamo ora L-segmento di A' ogni sottoinsieme non vuoto Φ di A' tale che

i)' $\bigvee \Phi$ esiste in $\boldsymbol{R}^X$

ii)' se $\varphi \in \Phi$, $\varphi' \in A'$, $\varphi' \leq \Phi$ allora $\varphi' \in \Phi$.

Diciamo $I^* = I^*(X, w_i)$ la totalità delle funzioni w_i-semicontinue inferiormente, inferiormente limitate.

Teorema 1'. *I^* è l'insieme degli inviluppi superiori degli L-segmenti di A'.*

La dimostrazione è evidente.

Noto I^*, $I = I(X, w_i)$ reticolo di tutte le funzioni w_i-semicontinue inferiormente si costituisce con la medesima tecnica usata per costruire C_+ a partire da C.

Diciamo t-successione di I ogni successione $(u_n)_{n \in N}$ di funzioni di I tali che

I)' $\bigwedge \{u_n : n \in N\}$ esiste in $\boldsymbol{R}^X$

II)' $u_{n+1} \wedge (-n) = u_n$ per ogni $n \in N$.

5. I risultati trovati si riassumono nei seguenti enunciati.

Sia C una sottoalgebra con unità di R^X, C^* la sua sottoalgebra delle *funzioni limitate, C sia sottoreticolo di* $\boldsymbol{R}^X$. *Allora*

a) C^* *è una f-sottoalgebra di funzioni limitate se e solo se contiene gli elementi separatori delle sue L-sezioni;*

b) *C è una f-sottoalgebra se e solo se* C^* *è una f-sottoalgebra di funzioni limitate e C contiene l'insieme degli inviluppi superiori delle t-successioni di* C^*;

Sia I un sottoreticolo di $\boldsymbol{R}^X$ *tale che* $I+I\subseteq I$ *e* $\boldsymbol{R}_+I\subseteq I$; *I contenga le costanti. Sia* I^* *il sottoreticolo delle funzioni inferiormente limitate di I. Allora*

a)′ I^* *è un I-reticolo di funzioni inferiormente limitate se e solo se contiene gli inviluppi superiori dei suoi L-segmenti;*

b)′ *I è un I-reticolo se e solo se* I^* *è un I reticolo di funzioni inferiormente limitate e I contiene gli inviluppi inferiori delle t-successioni di* I^*.

BIBLIOGRAFIA

[1] Ciampa, S.: *Topologie e funzioni reali semicontinue,* Annali Scuola Norm. Sup. di Pisa, XXII, 1968.

[2] Ciampa, S.: *Full Rings of continuous real functions,* Rend. Sem. Mat. Università di Padova, XL, 1968.

[3] Gillmann, L. and Jerison, M.: *Rings of continuous functions,* Van Nostrand, 1960.

Manoscritto pervenuto in redazione il 3 luglio 1969.