RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

TOMASO MILLEVOI

Sulle estensioni degli anelli di Gorenstein

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 41 (1968), p. 319-325
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1968__41__319_0>

SULLE ESTENSIONI DEGLI ANELLI DI GORENSTEIN

di TOMASO MILLEVOI *)

È noto che se un anello R è di Macaulay, allora lo sono pure gli anelli $R[x]$, $\widehat{R}$ (completato di R rispetto ad una topologia $\mathfrak{u}$ adica) e di conseguenza $R[[x]]$ (anello delle serie formali) ed $R\{x\}$ (anello delle serie formali ristrette).

In questo lavoro si mostra che proprietà analoghe di permanenza valgono per gli anelli di Gorenstein che sono particolari anelli di Macaulay.

1. Un anello R commutativo noetheriano si dice di Gorenstein se soddisfa alle seguenti condizioni equivalenti:

(a) Per ogni ideale $\mathfrak{p}$, $R_{\mathfrak{p}}$ è un anello di Macaulay in cui qualche sistema di parametri genera un ideale irriducibile.

(b) Per ogni ideale primo $\mathfrak{p}$ ogni sistema di parametri in $R_{\mathfrak{p}}$ genera un ideale irriducibile.

(c) Per ogni ideale massimale $\mathfrak{m}$, $R_{\mathfrak{m}}$ è un anello di Macaulay in cui qualche sistema di parametri genera un ideale irriducibile.

(d) Per ogni ideale massimale $\mathfrak{m}$ ogni sistema di parametri in $R_{\mathfrak{m}}$ genera un ideale irriducibile.

(e) Ogni ideale di classe principale di R è puro e tutte le sue componenti primarie sono irriducibili.

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

Indirizzo dell'Autore: Seminario Matematico Università, Padova.

Per la dimostrazione dell'equivalenza di tali condizioni cfr. ad es. [1] § 1 pag. 9.

OSSERVAZIONE. Dalla condizione (c) segue subito che un anello R è di Gorenstein se e solo se per ogni ideale massimale $\mathfrak{m}$ di R l'anello locale $R_{\mathfrak{m}}$ è di Gorenstein.

Dimostriamo ora il seguente

TEOREMA 1. *Se R è un anello di Gorenstein, lo è anche $R[x]$, dove x è una indeterminata.*

Poichè $R[x]$ è un anello di Macaulay, basterà verificare, in base alla condizione (c), che, se $\mathfrak{M}$ è un ideale massimale di $R[x]$, nell'anello locale $R[x]_{\mathfrak{M}}$ c'è un sistema di parametri che genera un ideale irriducibile.

Poniamo $\mathfrak{p} = \mathfrak{M} \cap R$. $\mathfrak{p}$ risulta un ideale primo di R ed $R_{\mathfrak{p}}$ un anello di Gorenstein (condizione (a)).

Si verifica facilmente che $R[x]_{\mathfrak{M}} \simeq R_{\mathfrak{p}}[x]_{\mathfrak{M}'}$, dove $\mathfrak{M}'$ è l'ideale massimale generato in $R_{\mathfrak{p}}[x]$ dall'immagine di $\mathfrak{M}$ nell'omomorfismo naturale $R[x] \longrightarrow R_{\mathfrak{p}}[x]$.

Per dimostrare l'asserto potremo dunque supporre che R sia un anello locale di ideale massimale $\mathfrak{p} = \mathfrak{M} \cap R$.

$\mathfrak{M}/\mathfrak{p}R[x]$ è un ideale massimale di $(R/\mathfrak{p})[x]$, e dunque è generato da un polinomio $\overline{F}$, dove $F \in \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} = (\mathfrak{p}, F)$ (cfr. [4] th. (14.7) pag. 46). Si può supporre inoltre che F sia monico.

Sia $q_1, q_2, \dots, q_r$ un sistema di parametri di R, con $(q_1, \dots, q_r) = \mathfrak{q} =$ irriducibile ($= \mathfrak{p}$-primario); si ha che $\mathfrak{q}\, R[x]$ è $\mathfrak{p}\, R[x]$-primario (cfr. [4] (6.15) pag. 18), e dunque $(q_1, \dots, q_r) : F = (q_1, \dots, q_r)$ in $R[x]$ poichè $F \notin \mathfrak{p}\, R[x]$, daltra parte $q_1, \dots, q_r$ formano una R-successione (cfr. [3] Teor. 3.1 cond. 10 pag. 12) e dunque una $R[x]$-successione (cfr. [4] (6.13) pag. 17): si conclude che $q_1, \dots, q_r, F$ formano una $R[x]$-successione. Inoltre ogni ideale primo che contenga $\mathfrak{q}$ ed F contiene $\mathfrak{p}$ ed F, cioè $\mathfrak{M}$; $\mathfrak{M}$ è dunque un primo minimale di $(\mathfrak{q}, F)$; ne segue che, in $R[x]_{\mathfrak{M}}$, $(\mathfrak{q}, F)$ è $\mathfrak{M}\, R[x]_{\mathfrak{M}}$-primario. Di conseguenza $q_1, \dots, q_r, F$ costituiscono un sistema di parametri di $R[x]_{\mathfrak{M}}$.

Dimostriamo ora che l'ideale $(\mathfrak{q}, F)$ è irriducibile in $R[x]_{\mathfrak{M}}$, o, il che è lo stesso, passando al quoziente rispetto all'ideale generato da $\mathfrak{q}$, che (F) modulo $\mathfrak{q}\, R[x]_{\mathfrak{M}}$ è irriducibile in $R[x]_{\mathfrak{M}}/\mathfrak{q}\, R[x]_{\mathfrak{M}}$. Facili considerazioni mostrano che quest'ultimo anello è isomorfo a $(R[x]/\mathfrak{q}\, R[x])_{\mathfrak{M}/\mathfrak{q}R[x]}$.

Si ha d'altra parte $R[x]/\mathfrak{q}\, R[x] \simeq (R/\mathfrak{q})[x]$, e l'anello $R/\mathfrak{q}$ risulta ancora di Gorenstein (cfr. oss. alla Prop. 5.1 pag. 17 in [1]); così il problema è ricondotto al seguente [1]:

Dato un anello locale R di dimensione zero, con ideale massimale $\mathfrak{p}$, in cui l'ideale (0) sia irriducibile, considerato un ideale massimale $\mathfrak{M}$ di $R[x]$, con $\mathfrak{M} = (\mathfrak{p}, F)$, $\mathfrak{M} \cap R = \mathfrak{p}$ ed F polinomio monico, l'ideale (F) risulta irriducibile in $R[x]_{\mathfrak{M}}$.

Per provare che (F) è irriducibile basta mostrare che ogni ideale $\mathfrak{A}$ di $R[x]_{\mathfrak{M}}$ contenente propriamente (F) contiene una costante non nulla di R e dunque (cfr. [7] cond. 3 Th. 34 pag. 248) l'ideale $0:\mathfrak{p}$ di R. Ciò implica infatti che anche l'intersezione di due ideali contenenti propriamente (F) contiene $0:\mathfrak{p}$; ma (F) non può contenere costanti non nulle (essendo F monico), quindi (F) risulta irriducibile.

Sia dunque $\mathfrak{A}$ un ideale di $R[x]_{\mathfrak{M}}$ contenente propriamente (F); $\mathfrak{A}$ contiene quindi un polinomio A a coefficienti in R non multiplo di F. Sia n il grado di F; essendo F monico si può dividere A per F e risulta $A = LF + P$, con P polinomio non nullo di $\mathfrak{A}$, di grado $m < n$:

$$P = p_0 + p_1 x + \dots + p_m x^m .$$

Se tutti i coefficienti di P appartengono all'ideale $0:\mathfrak{p}$, si ha che, essendo questo il più piccolo ideale diverso da zero di R, $(p_m) = 0:\mathfrak{p}$ e dunque $p_i \in (p_m)\ \forall\, i$; si ha quindi

$$P = p_m(x^m + t_{m-1}x^{m-1} + \dots + t_0).$$

Il polinomio $Q = x^m + t_{m-1}x^{m-1} + \dots + t_0$ non appartiene ad $\mathfrak{M} = (\mathfrak{p}, F)$ poichè, come si vede facilmente, i polinomi monici di $\mathfrak{M}$ han grado $\geq n$; Q è dunque invertibile in $R[x]_{\mathfrak{M}}$, per cui $p_m \in \mathfrak{A}$, ciò che si voleva dimostrare.

---

[1]) Il ragionamento sin qui svolto è standard in situazioni di questo tipo; cfr., ad es. [4] Th. 25.10 pag. 86.

Se poi non tutti i coefficienti di P appartengono a $0:\mathfrak{p}$, possiamo trovare un polinomio non nullo di $\mathfrak{A}$, di grado $< n$, con tutti i coefficienti in $0:\mathfrak{p}$, e riportarci così al caso precedente. Sia infatti i il più grande intero per cui $p_i \notin 0:\mathfrak{p}$ $(0 \leq i \leq m)$; se p è un elemento non nullo di $0:\mathfrak{p}$ si ha $(p)=(0:\mathfrak{p}) \subset (p_i)$ onde $p = rp_i$ (per un opportuno $r \in R$) ed il polinomio $rP = rp_m x^m + \dots + px^i + \dots + rp_0$ è ancora un polinomio non nullo (p è $\neq 0$) di $\mathfrak{A}$, di grado al più $m\,(< n)$ con i coefficienti delle potenze di x dalla i-esima in poi tutti in $0:\mathfrak{p}$.

Si ha quindi, per induzione, l'asserto.

Corollario 2. *Siano $x_1, x_2, \dots, x_n$ elementi algebricamente indipendenti sopra un anello R; se R è di Gorenstein, lo è pure l'anello di polinomi $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$.*

Dimostrazione: banale.

2. Sia R un anello ed $\mathfrak{u}$ un ideale di R; consideriamo su R la topologia $\mathfrak{u}$-adica. Se R è un anello locale di ideale massimale $\mathfrak{m}$, la topologia $\mathfrak{m}$-adica sarà chiamata anche topologia naturale di R (cfr. [4] pag. 52).

Sussiste (cfr. [2] Cap. III, § 3 n. 4 prop. 8) la seguente

Proposizione 3. *Sia R un anello noetheriano e sia $\mathfrak{u}$ un ideale di R. Sia $\widehat{R}$ il completato (separato) di R per la topologia $\mathfrak{u}$-adica, j l'applicazione canonica di R in $\widehat{R}$. Allora:*

(i) *La topologia di $\widehat{R}$ è $j(\mathfrak{u})\widehat{R}$-adica.*

(ii) *L'applicazione $\mathfrak{n} \to j(\mathfrak{n})\widehat{R}$ è una biiezione dell'insieme degli ideali massimali di R contenenti $\mathfrak{u}$ sull'insieme degli ideali massimali di $\widehat{R}$, e $\mathfrak{M} \to j^{-1}(\mathfrak{M})$ è la biiezione reciproca.*

(iii) *Sia $\mathfrak{m}$ un ideale massimale di R contenente $\mathfrak{u}$, e sia $\mathfrak{M} = j(\mathfrak{m})\widehat{R}$; j induce un omomorfismo iniettivo $j' : R_{\mathfrak{m}} \to \widehat{R}_{\mathfrak{M}}$ e, identificando $R_{\mathfrak{m}}$ con la sua immagine tramite j', risulta che la topologia naturale di $\widehat{R}_{\mathfrak{M}}$ induce quella naturale in $R_{\mathfrak{m}}$ ed $R_{\mathfrak{m}}$ risulta denso in $\widehat{R}_{\mathfrak{M}}$ per questa topologia.*

Dimostriamo ora il seguente

TEOREMA 4. *Sia R un anello noetheriano, $\mathfrak{u}$ un ideale di R, $\hat{R}$ il completato di R per la topologia $\mathfrak{u}$-adica. Si ha allora*:

(i) *Se R è di Gorenstein, $\hat{R}$ è di Gorenstein.*

(ii) *Se $\mathfrak{u} \subseteq \operatorname{rad} R$ ed $\hat{R}$ è di Gorenstein, anche R è di Gorenstein.*

Supponiamo dapprima che R sia un anello locale di ideale massimale $\mathfrak{m}$ e che la topologia sia quella naturale; in questo caso $\mathfrak{m} = \operatorname{rad} R$ e dunque dobbiamo provare che R è di Gorenstein se e solo se lo è $\hat{R}$.

$\hat{R}$ è locale ([4] cap. II coroll. (17.6) pag. 55); sia $\mathfrak{M}$ il suo ideale massimale. Si ha che $\hat{R}$ è un anello di Macaulay se e solo se lo è R [cfr. [4] cap. III (25.8) pag. 86); inoltre se identifichiamo R con il sottoanello $i(R)$ di $\hat{R}$, essendo $i: R \longrightarrow \hat{R}$ l'omomorfismo canonico (iniettivo) di R nel suo completato, ogni sistema di parametri in R risulta anche un sistema di parametri in $\hat{R}$ (cfr. [5] cap. V Th. 8 pag. 98). Basterà quindi dimostrare che se $t_1, t_2, \ldots, t_s$ è un sistema di parametri in R che genera dunque un ideale $\mathfrak{m}$-primario $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}$ è irriducibile se e solo se l'ideale $\mathfrak{M}$-primario $\mathfrak{q}\hat{R}$ generato da $t_1, t_2, \ldots, t_s$ in $\hat{R}$ è irriducibile.

Poichè $\mathfrak{q}$ è $\mathfrak{m}$-primario, la topologia $\mathfrak{q}$-adica di R coincide con quella naturale, in particolare $\hat{R}$ è il completato di R per la topologia $\mathfrak{q}$-adica. Ne segue l'isomorfismo $\hat{R}/\mathfrak{q}\hat{R} \simeq R/\mathfrak{q}$ per cui $\mathfrak{q}\hat{R}$ è irriducibile se e solo se lo è $\mathfrak{q}$. Ciò prova l'asserto nel caso locale.

Passiamo ora al caso generale.

(i): Basterà verificare che, se $\mathfrak{M}$ è un ideale massimale di $\hat{R}$, l'anello $\hat{R}_{\mathfrak{M}}$ è di Gorenstein. Con riferimento alla proposizione 3 poniamo $\mathfrak{m} = j^{-1}(\mathfrak{M})$; il completato $\bar{R}$ di $R_{\mathfrak{m}}$ coincide, per la (iii), con quello di $\hat{R}_{\mathfrak{M}}$. Poichè $R_{\mathfrak{m}}$ è di Gorenstein per ipotesi, segue dal caso locale che $\bar{R}$ è di Gorenstein e quindi, sempre per il caso locale, anche $\hat{R}_{\mathfrak{M}}$ è di Gorenstein.

(ii): Sia ora $\hat{R}$ di Gorenstein con $\mathfrak{u} \subseteq \operatorname{rad} R$. Sia $\mathfrak{m}$ un ideale massimale di R; da $\mathfrak{u} \subseteq \operatorname{rad} R$ segue $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{m}$. Allora, colle notazioni della proposizione 3, l'ideale $\mathfrak{M} = j(\mathfrak{m})$ è un ideale massimale di $\hat{R}$.

Ne segue, per il caso locale, che il completato $\bar{R}$ di $\widehat{R_{\mathfrak{m}}}$ è di Gorenstein, e lo è pure $R_{\mathfrak{m}}$ di cui $\bar{R}$ è il completato.

Il teorema è così completamente acquisito.

Osservazione: La proprietà (ii) del teorema 4 inverte soltanto parzialmente la (i). Ciò è dovuto al fatto che se $\mathfrak{u} \not\subseteq \operatorname{rad} R$, $\widehat{R}$ può essere di Gorenstein senza che lo sia R, come mostra il seguente esempio:

Consideriamo in $R = k[X, Y, Z]$ l'ideale $\mathfrak{u} = (XY, YZ, ZX)$. L'anello $A = R / \mathfrak{u} = k[x, y, z]$ non è di Gorenstein (è però di Macaulay, essendo $\mathfrak{u}$ perfetto): infatti in A l'elemento $x + y + z$, non nullifico, genera un ideale primario il cui radicale è l'ideale (x, y, z), che risulta massimale; si ha inoltre $(x + y + z) = (x + y + z, x) \cap (x + + y + z, y)$ ed essendo dunque l'ideale $(x + y + z)$ riducibile, l'anello A non è di Gorenstein.

Consideriamo ora il completato $\widehat{A}$ di A rispetto alla topologia $\mathfrak{b}$-adica, con $\mathfrak{b} = (x + y + z - 1)$. Gli unici ideali massimali di A che contengono $\mathfrak{b}$ sono:

$$\mathfrak{m}_1 = (x, y, z - 1) = (z - 1), \qquad \mathfrak{m}_2 = (x, y - 1, z) = (y - 1)$$

$$\mathfrak{m}_3 = (x - 1, y, z) = (x - 1),$$

$A_{\mathfrak{m}_1}$, $A_{\mathfrak{m}_2}$, $A_{\mathfrak{m}_3}$ risultano anelli di Gorenstein (locali regolari) e dunque per la condizione (c) $\widehat{A}$ risulta di Gorenstein (pur non essendolo A).

Corollario 5. *Se R è un anello di Gorenstein, lo è anche l'anello delle serie formali $R[[X_1, \dots, X_n]]$.*

Infatti $R[X_1, \dots, X_n]$ è di Gorenstein (Coroll. 2) ed $R[[X_1, \dots, X_n]]$ ne è il completato per la topologia $(X_1, \dots, X_n)$-adica.

Corollario 6. *Sia R un anello, $\mathfrak{u}$ un ideale di R. Dotiamo R della topologia $\mathfrak{a}$-adica. Se R è di Gorenstein, lo è pure l'anello delle serie formali ristrette $R\{X_1, \dots, X_n\}$.*

Infatti $R\{X_1, \dots, X_n\}$ è il completato di $R[X_1, \dots, X_n]$ per la topologia $\mathfrak{u}(X_1, \dots, X_n)$-adica (cfr. [6] Coroll. pag. 389).

BIBLIOGRAFIA

[1] H. BASS: *On the ubiquity of Gorenstein rings;* Math. Zeitschr. 87, 8-28 (1963).
[2] N. BOURBAKI: *Algèbre Commutative,* Chap. 3, Chap. 4; Hermann Paris 1961.
[3] S. GRECO - P. SALMON: *Anelli di Macaulay*; Pubblicazioni dell'Ist. Mat. dell'Università di Genova, 1965.
[4] M. NAGATA: *Local Rings;* Interscience Publishers 1962.
[5] D. G. NORTHCOTT: *Ideal Theory;* Cambridge University Press. 1960.
[6] P. SALMON: *Sur les séries formelles restreintes;* Bull. Soc. math. France, 92, 1964, p. 385-410.
[7] O. ZARISKI - P. SAMUEL: *Commutative Algebra,* vol. I Van Nostrand, 1958.

Manoscritto pervenuto in redazione il 31 Agosto 1968.