RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ROMANO ISLER

Una generalizzazione degli spazi di Fréchet

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 41 (1968), p. 164-176
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1968__41__164_0>

UNA GENERALIZZAZIONE DEGLI SPAZI DI FRÉCHET

ROMANO ISLER *)

Lo studio degli spazi topologici che sono completamente individuati dalle loro successioni convergenti è stato oggetto di numerosi lavori. S. P. Franklin [1] caratterizza tali spazi mediante quozienti di spazi metrici. Qui invece si parte dalla considerazione degli spazi di Fréchet, ossia di quegli spazi topologici in cui la chiusura è quella successionale. La nozione di spazio di Fréchet viene poi estesa definendo gli *spazi di Fréchet generalizzati di ordine* α (con α ordinale; vedi definizione al n^0 4) che, sfruttando risultati di M. Dolcher [2] e J. Novák [3], si riconoscono essere tutti e soli quegli spazi topologici che sono individuati dalle loro successioni convergenti (spazi « deducibili da convergenza » in [2], « sequential spaces » in [1]).

Al n^0 5 si dà una condizione necessaria e sufficiente affinchè uno spazio topologico sia di Fréchet generalizzato di ordine α.

1. Categorie $\mathcal{T}$ degli spazi topologici ed $\mathcal{L}$ delle strutture di convergenza.

Per quanto riguarda le nozioni di categoria $\mathcal{T}$ degli spazi topologici e di categoria $\mathcal{L}$ delle strutture di convergenza si rimanda

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Trieste.

al lavoro di Dolcher ([2] pgg. 66-67). Parimenti per quanto riguarda i due funtori covarianti L di $\mathcal{C}$ in $\mathcal{L}$ e T di $\mathcal{L}$ in $\mathcal{C}$.

Basti qui ricordare che, assegnato che sia uno spazio topologico (E, τ), da questo si deduce una struttura di convergenza (E, λ) attraverso il funtore L nel modo usuale; e viceversa, data una struttura di convergenza (E, λ), si deduce da questa una topologia (E, τ) attraverso il funtore T che dichiara aperti tutti e soli gli insiemi A tali che ogni successione convergente ad un punto di A ha tutta una sua coda in A.

2. Categoria $\mathcal{M}$ degli spazi pseudotopologici.

Rifacendoci a Čech ([4] pg. 237) diamo la seguente

DEFINIZIONE: un insieme E si dice *spazio pseudotopologico* (per Čech *closure space*; per Novák *closure topology*) se in E è definita una applicazione w dell'insieme dei sottoinsiemi di E in sè soddisfaciente ai tre seguenti assiomi:

(K 0) $\quad w\varnothing = \varnothing$

(K 1) $\quad A \subset wA$ per ogni $A \subset E$

(K 2) $\quad w(A \cup B) = wA \cup wB$ per ogni $A \subset E$, $B \subset E$.

Lo spazio pseudotopologico lo indicheremo con (E, μ) dove μ indica la struttura che chiameremo *pseudotopologia* ed E l'insieme ambiente. L'applicazione wA (che taluni autori indicano talvolta con $\widehat{A}$) la chiameremo *pseudochiusura* dell'insieme A. Una classe di spazi pseudotopologici che non sono spazi topologici è quella che si ottiene a partire da una struttura di convergenza λ, assumendo come pseudochiusura la chiusura successionale.

OSSERVAZIONE. Se vale inoltre l'assioma

(K 3) $$wA = wwA$$

lo spazio è uno spazio topologico e w è la chiusura.

DEFINIZIONE. Data una pseudotopologia (E, μ) diremo *pseudointorno di un punto* x di E ogni insieme $U(\subset E)$ tale che sia $x \notin w\,\complement U$ (dove $\complement U$ indica il complementare di U in E).

Si verifica allora facilmente che la famiglia di pseudointorni di un punto x costituisce un filtro.

DEFINIZIONE. Diremo *pseudointorno di un insieme* A ogni insieme che sia pseudointorno di ogni punto di A.

Così come per gli spazi topologici, si può definire la pseudotopologia mediante i filtri di pseudointorni, e precisamente:
dato un insieme E, ad ogni punto x di E associamo un filtro $\mathcal{U}_x$, che diremo *filtro dei pseudointorni di* x, tale che x appartenga ad ogni insieme del filtro. Un tale insieme lo diremo *spazio pseudotopologico*. Anche qui, se si aggiunge l'assioma
(U) per ogni $U \in \mathcal{U}_x$ esiste un $V \in \mathcal{U}_x$ tale che $V \subset U$ e tale che dall'essere $p \in V$ segue $V \in U_p$,
lo spazio è uno spazio topologico.

La verifica che si tratta di due definizioni equivalenti è abbastanza semplice e noi qui non la riportiamo. Notiamo che, assegnata la pseudotopologia mediante pseudointorni, la pseudochiusura di un insieme A è l'insieme dei punti x di E tali che in ogni pseudointorno di x cadano punti di A. (v. [3]).

OSSERVAZIONE. Anche per la pseudotopologia si può dare la definizione di *base* di pseudointorni di un punto x; la perfetta analogia con il caso delle topologie ci esonera dal dare ulteriori chiarimenti.

Consideriamo ora la totalità delle pseudotopologie e vogliamo riguardarla come una categoria.

DEFINIZIONE. Dati due insiemi E_1, E_2 e date due pseudotopologie μ_1 e μ_2 rispettivamente in E_1 ed E_2, con le pseudochiusure w_1 e w_2, diremo che una *applicazione* f di E_1 in E_2 è *continua in un punto* x di E_1 se, dall'essere x appartenente a $w_1 A$ segue che $f(x)$ appartiene a $w_2 f(A)$. Diremo che f è *continua in* E_1 se lo è in ogni punto di E_1.

Tale definizione è equivalente alla seguente:

DEFINIZIONE. Una *applicazione f è continua iu un punto x di E_1 se, preso un pseudointorno U_2 di $f(x)$ in E_2, si ha che $f^{-1}(U_2)$ è pseudointorno di x in E_1.*

DIMOSTRAZIONE. Valga la prima definizione. Sia U_2 pseudointorno di $f(x)$ in E_2 e supponiamo per assurdo che $f^{-1}(U_2)$ non sia pseudointorno di x in E_1. Ciò significa che $x \in w_1 \complement f^{-1}(U_2)$; ma allora si ha che. per la prima definizione, $f(x) \in w_2 f(\complement f^{-1}(U_2)) \subset \subset w_2 \complement U_2$ contro l'ipotesi che U_2 sia pseudointorno di $f(x)$ in E_2.

Viceversa valga la seconda definizione. Sia $x \in w_1 A$ e supponiamo che $f(x) \notin w_2 f(A)$. Allora $\complement f(A)$ sarebbe pseudointorno di $f(x)$ e quindi $f^{-1}(\complement f(A))$ sarebbe pseudointorno di x. Allora $x \notin w_1 \complement f^{-1}(\complement f(A))$ e siccome $f^{-1}(\complement f(A)) \subset \complement A$ si avrebbe $w_1 \complement f^{-1}(\complement f(A)) \supset wA$ ossia x non apparterrebbe a wA, contro l'ipotesi. Da ciò segue la tesi.

Allora si può riguardare come oggetto (E, μ) ogni insieme E dotato di una pseudotopologia μ e come mappa $f: (E_1, \mu_1) \longrightarrow (E_2, \mu_2)$ ogni applicazione di E_1 in E_2 la quale sia continua nel senso detto sopra. Si verifica facilmente che questa è una categoria: la indicheremo con $\mathcal{M}$.

Evidentemente $\mathcal{M}$ è una sottocategoria completa di $\mathcal{T}$: le topologie rientrano infatti fra le pseudotopologie, e la definizione precedentemente data di applicazione continua risulta, per le topologie, quella usuale.

Per ogni fissato insieme sostegno E la totalità delle pseudotopologie su E può pensarsi ordinata intendendo che

$$\mu_1 < \mu_2 \qquad \text{(meno fine)}$$

se $w_1 A \supset w_2 A$ qualunque sia A sottoinsieme di E. Si ha poi che, assegnate in E due pseudotopologie μ_1 e μ_2, l'applicazione identica è continua fra (E_1, μ_1) ed (E_2, μ_2) se e solo se $\mu_1 > \mu_2$.

In tale ordine vi sono due elementi estremi: la pseudotopologia meno fine di tutte che è quella per cui $wA = E$ qualunque sia A, sottoinsieme di E, non vuoto e la pseudotopologia più fine di tutte che è quella per cui $wA = A$ per ogni A. Si osservi che entrambe godono della (K 3) e quindi sono topologie.

3. I funtori M ed N.

Data, su un insieme E, una struttura di convergenza λ, vogliamo da essa dedurre mediante una legge M una pseudotopologia μ. Definiamo la pseudochiusura in E al seguente modo:

(M) dato $A\ (\subset E)$ sia wA l'insieme dei punti limite di successioni di punti di A.

E' immediato verificare che questa è una pseudochiusura e che, pur di intendere che $M(f)$ sia, nella categoria $\mathcal{M}$, la stessa applicazione f tra E_1 ed E_2, M è un funtore covariante della categoria $\mathcal{L}$ nella categoria $\mathcal{M}$.

Definizione. Date due strutture di convergenza sul medesimo insieme E, λ_1 e λ_2, diremo che λ_1 *è meno fine di* λ_2 e scriveremo $\lambda_1 < \lambda_2$ se dall'essere una successione λ_2-convergente verso un punto p essa lo è anche nella λ_1. Si ha allora che

$$\lambda_1 < \lambda_2 \Longrightarrow M(\lambda_1) < M(\lambda_2)$$

ossia il funtore M è monotono.

Definizione. Date due topologie su un medesimo insieme E, τ_1 e τ_2, diremo che τ_1 *è meno fine di* τ_2 (e scriveremo $\tau_1 < \tau_2$) se dall'essere U un intorno di un punto x nella τ_1 segue che è intorno di x anche nella τ_2.

Sia ora (E, μ) uno spazio pseudotopologico e si voglia dedurre da questo una topologia τ in E che sia la più fine fra quelle che sono meno fini della μ, ossia fra quelle per cui ogni intorno sia un pseudointorno nella μ. Il Novák ([3]) ha dimostrato che ciò è sempre possibile ed ha anche dato il procedimento per ottenere la chiusura in τ. Sia $A\ (\subset E)$ e consideriamo la pseudochiusura wA; considerando ora la pseudochiusura di wA si ottiene $wwA = w^2A$ e, iterando l'operazione, si ottiene la successione

$$wA \subset w^2A \subset \dots \subset w^nA \subset \dots$$

dove con $w^n A$ si intende ovviamente la n-sima pseudochiusura di A. Si definisce poi, per ogni ordinale $\eta\,(> 0)$

$$w^\eta A = w \bigcup_{\alpha<\eta} w^\alpha A$$

e in questo modo la successione si estende agli ordinali transfiniti

$$A \subset wA \subset w^2 A \subset \ldots \subset w^n A \subset \ldots \subset w^\omega A \subset \,.\,. \subset w^\eta A \subset \ldots \subset w^\Omega A \subset \ldots$$

dove con ω ed Ω si è indicato rispettivamente il minimo ordinale della potenza del numerabile ed il minimo del non numerabile. Novák dimostra allora il seguente teorema: ([3], cor. 1)

Dato uno spazio pseudotopologico (E, μ), sia $\mathfrak{m}$ la potenza di E ed $\aleph_\alpha$ un numero cardinale regolare [1]) maggiore di $\mathfrak{m}$; allora w^{ω_α} è la chiusura della topologia $\bar{\tau}$ più fine fra le meno fini di μ.

La legge che, dato (E, μ) ci fa ottenere nel modo precedente la topologia $(E, \bar{\tau})$ la indichiamo con N. Pur di intendere che $N(f)$ sia, nella categoria $\mathcal{T}$, la stessa applicazione f fra E_1 ed E_2, N è un funtore covariante della categoria $\mathcal{M}$ nella categoria $\mathcal{T}$.

Nel nostro lavoro rivestirà particolare interesse il risultato ottenuto da Novák nel corollario 2 del suo lavoro, risultato ottenuto anche da Dolcher, per via diretta ([2] pg. 86), che qui rienunciamo:

Sia (E, μ) una pseudotopologia. Per ogni $A\,(\subset E)$ e per ogni punto $x \in wA$, ci sia un sottoinsieme B di A numerabile tale che x appartenga a wB. Allora si ha $\bar{A} = wA$ dove con $\bar{A}$ indichiamo la chiusura in $N(\mu)$.

Sia allora (E, λ) una struttura di convergenza e sia $(E, M(\lambda))$ la pseudotopologia dedotta. Essa, come è facile verificare, soddisfa alle ipotesi di quest'ultimo corollario. Allora si ha $w^\Omega A = \bar{A}$ per ogni $A \subset E$, dove con $\bar{A}$ è indicata la chiusura in $(E, NM(\lambda))$.

Abbiamo così visto che, data (E, λ), si deduce attraverso i funtori M ed N una topologia $NM(\lambda)$ in E; d'altra parte attraverso il funtore T si deduce un'altra topologia $T(\lambda)$. Si ha allora che:

$$T = NM.$$

---

[1]) Per la definizione di potenza regolare vedi ad esempio [4] a pagina 405.

Dimostrazione. Sia B un insieme chiuso in $(E, T(\lambda))$. Allora si ha $B = wB$ e quindi $B = w^{\Omega}B$. Viceversa sia B chiuso in $(E, NM(\lambda))$; questo significa che $B = w^{\Omega}B$; ma allora $B = wB$ che è la tesi.

Possiamo allora schematizzare questi risultati con il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L} \arrow[rr, shift left, "T"] \arrow[dr, "M"'] & & \mathcal{T} \arrow[ll, shift left, "L"] \\ & \mathcal{M} \arrow[ur, "N"'] & \end{tikzcd}$$

4. Spazi di Fréchet e di Fréchet generalizzati.

Appare ora evidente che il problema di determinare quegli spazi topologici che sono perfettamente individuati dalle loro successioni convergenti e che si era visto essere tutti e soli quelli che soddisfacevano l'equazione $TL(\tau) = \tau$, si può ora porre mediante la nuova equazione

$$NML(\tau) = \tau.$$

Tali spazi vengono detti «sequential topological spaces» dal Franklin, «full spaces» dal Davison ([5]), «topologie deducibili da convergenze» dal Dolcher.

Definizione. Sia (E, μ) uno spazio pseudotopologico. Diremo *α-pseudointorno (o pseudointorno di ordine α) di un punto x* un insieme U tale che $x \notin w^{\alpha}\,\complement U$.

Diremo *α-pseudointorno di un insieme* A $(\subset E)$ un α-pseudointorno di ogni suo punto.

La totalità degli α-pseudointorni di un punto costituisce, come subito si vede, un filtro. Per $\alpha < \beta$, il filtro $\mathcal{F}_x^{\alpha}$ evidentemente è più fine di $\mathcal{F}_x^{\beta}$.

Definizione. Sia (E, μ) uno spazio pseudotopologico. Diremo *ordine dello spazio* il minimo ordinale η tale che $w^{\eta}A = \bar{A}$ o, che è lo stesso, $w^{\eta}A = w^{\eta+1}A$ qualunque sia A $(\subset E)$.

Si ha allora il seguente

TEOREMA. *Uno spazio pseudotopologico* (E, μ) *è di ordine* η *se e solo se ogni* η*-pseudointorno è intorno nella topologia* $N(\mu)$ *e, per ogni* $\eta' < \eta$*, esiste un* η'*-pseudointorno che non è intorno in* $N(\mu)$.

DIMOSTRAZIONE. Sia (E, μ) di ordine η ossia, per ogni $A\ (\subset E)$, sia $w^\eta A = \overline{A}$. Sia $U_x^{(\eta)}$ un η-pseudointorno di x. Allora $x \notin w^\eta \complement U_x^{(\eta)} = \overline{\complement U_x^{(\eta)}}$. Ma quest'ultimo insieme è chiuso ed allora $\complement(\overline{\complement U_x^{(\eta)}})$ è intorno di x ed è contenuto in $U_x^{(\eta)}$ che risulta quindi intorno di x. Sia $\eta' < \eta$; ci sarà allora un insieme $A\ (\subset E)$ tale che $w^{\eta'} A \subsetneqq w^\eta A$; allora esiste un punto x tale che $x \in w^\eta A$, $x \notin w^{\eta'} A$; sia $U_x^{(\eta')} = \complement A$. Esso è evidentemente un η'-psendointorno di x, ma non ne è intorno. Viceversa dimostriamo che $\overline{A} = w^\eta A$, ossia che $\overline{A} \subset w^\eta A$. Sia $x \notin w^\eta A$, allora $\complement A$ è un η-pseudointorno di x e come tale un intorno. Ma allora x non appartiene ad $\overline{A}$ che è la tesi. Che poi η sia il minimo ordinale è immediato.

DEFINIZIONE. Diremo *ordine di uno spazio topologico* (E, τ) l'ordine α dello spazio pseudotopologico $(E, ML(\tau))$. In particolare sono di ordine 1 gli spazi topologici per i quali la chiusura successionale è idempotente. Nel caso poi in cui la chiusura w^α coincida con la chiusura in τ diremo che (E, τ) è *spazio di Fréchet generalizzato di ordine* α. Se l'ordine dello spazio di Fréchet generalizzato è 1, lo spazio lo chiameremo semplicemente di Fréchet in accordo con Franklin ed altri.

Ovviamente *sono deducibili da strutture di convergenza tutti e soli gli spazi di Fréchet generalizzati.*

Si constata subito che uno spazio topologico (E, τ) è di Fréchet generalizzato di ordine α se e solo se, per ogni $x \in E$, ogni α-pseudointorno è anche intorno nella topologia τ ed esiste, per ogni $\alpha' < \alpha$, un α'-pseudointorno che non è intorno in τ.

Sarà spesso utile considerare gli spazi di Fréchet generalizzati basandosi su quest'ultima definizione.

5. Una condizione necessaria e sufficiente.

Vogliamo ora dare una condizione necessaria e sufficiente affinchè uno spazio topologico sia di Fréchet di ordine α. Pur essendo possibile dare un'unica dimostrazione di questo teorema, noi lo dimostreremo in due parti e precisamente prima nel caso di $\alpha = 1$ e poi nel caso di α qualunque.

TEOREMA. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè uno spazio topologico* (E, τ) *sia di Fréchet è che il filtro degli intorni di un punto generico* x *sia l'intersezione* [2]) *di una famiglia di filtri a base numerabile.*

DIMOSTRAZIONE. Dire che uno spazio è di Fréchet è equivalente a dire che ogni pseudointorno nella pseudotopologia $ML(\tau)$ è un intorno nella topologia τ. Supponiamo allora che lo spazio sia di Fréchet, ossia che ogni pseudointorno sia un intorno; preso un punto qualunque x di E, consideriamo la totalità delle successioni convergenti ad x ed i filtri aventi per base le code delle successioni con aggiunto il punto x; consideriamo poi l'intersezione di questi filtri.

Ogni insieme del filtro intersezione è un pseudointorno di x e quindi, per l'ipotesi, un intorno; inoltre ogni altro intorno di x contiene un insieme del filtro intersezione che risulta così essere il filtro degli intorni di x.

Viceversa sia V_x un pseudointorno di x, ma non un intorno.

Essendo il filtro $\mathcal{U}_x$ degli intorni di x l'intersezione di filtri a base numerabile, V_x non può appartenere a tutti i filtri; ossia c'è almeno un filtro $\mathcal{F}$, fra quanti danno luogo all'intersezione, a cui V_x non appartiene. Allora in ogni insieme F di $\mathcal{F}$ ci sono dei punti che non appartengono a V_x. Ma allora, essendo $\mathcal{F}$ a base numerabile, esso ammette una base numerabile ordinata per inclusione (bastando all'uopo prendere il primo insieme, poi l'intersezione dei primi due e così via): $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$ e per ogni F_n c'è un

---

[2]) Diremo filtro intersezione di una famiglia di filtri quello che ha come insiemi quelli che appartengono contemporaneamente a tutti i filtri.

punto x_n di F_n che non appartiene a V_x. Allora la successione $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ converge ad x senza terminare in V_x, il che è assurdo; col che il teorema resta dimostrato.

DEFINIZIONE. In uno spazio pseudotopologico (E, μ) diremo α-pseudointorno di un filtro $\mathcal{F}$ il filtro i cui insiemi sono gli α-pseudointorni degli insiemi del filtro $\mathcal{F}$.

Enunciamo a questo punto il seguente

TEOREMA. *Uno spazio topologico (E, τ) è di Fréchet generalizzato di ordine α se e solo se, comunque si prenda un punto x di E, il filtro $\mathcal{U}_x$ degli intorni di x è l'intersezione degli η-pseudointorni per ogni $\eta < \alpha$ del filtro $\mathcal{F}_x$ intersezione di una famiglia di filtri $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ a base numerabile con nucleo contenente x e non esiste alcun ordinale $\bar{\alpha} < \alpha$ per cui valga la suddetta proprietà.*

PREMESSE ALLA DIMOSTRAZIONE. L'enunciato del teorema si può anche, tenuto conto del teorema di cui al n^0 4, porre al seguente modo:

In uno spazio topologico le due seguenti proposizioni sono equivalenti:

I) (I_a) Ogni α-pseudointorno di un punto x qualunque è intorno nella topologia τ.
(I_b) Non esiste alcun $\bar{\alpha} < \alpha$ per cui valga la (I_a).

II) (II_a) Il filtro $\mathcal{U}_x$ degli intorni di un punto x qualunque è l'intersezione degli η-pseudointorni, per ogni $\eta < \alpha$, del filtro $\mathcal{F}_x$ intersezione di una famiglia di filtri $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ a base numerabile con nucleo contenente x.
(II_b) Non esiste alcun $\bar{\alpha} < \alpha$ per cui valga la (II_a).

La dimostrazione procederà per induzione e precisamente: per $\alpha = 1$ il teorema è vero; ammesso vero per ogni ordinale minore di α dimostreremo che dalla proposizione (I) segue la (II_a); chè se poi non seguisse la (II_b), ci sarebbero degli ordinali $\eta < \alpha$ per cui varrebbe la (II_a) ed allora, preso il minimo, $\bar{\alpha}$, di questi η, si avrebbe che lo spazio, per aver ammesso vero il teorema per $\bar{\alpha} < \alpha$, sarebbe di Fréchet di ordine $\bar{\alpha}$, ossia sarebbe vera la (I) relativamente ad $\bar{\alpha}$, il che è assurdo.

Analogamente viceversa basta dimostrare che dalla proposizione (II) segue la (I_a); chè se non seguisse la (I_b), lo spazio sarebbe di Fréchet di ordine $\bar{\alpha} < \alpha$ e quindi la seconda proposizione, per aver ammesso vero il teorema per $\bar{\alpha} < \alpha$, non sarebbe vera.

Passiamo ora alla

DIMOSTRAZIONE. Distingueremo il caso di α ordinale limite dal caso di α ordinale isolato e daremo la dimostrazione in due parti.

Sia α ordinale limite: dimostriamo che dalla (I) segue la (II_a):

Preso un punto $x \in E$, consideriamo la totalità delle successioni convergenti ad x e quindi i filtri aventi come sistema generatore le code (a cui si aggiunga il punto x) di una successione convergente ad x e infine l'intersezione $\mathcal{F}_x$ di qnesti filtri. Sia ora $\mathcal{U}_x^{(\eta)}$ il filtro η-pseudointorno di $\mathcal{F}_x$ e sia $\mathcal{U}_x$ uguale all'intersezione dei filtri $\mathcal{U}_x^{(\eta)}$ al variare di $\eta < \alpha$. Sia $U \in \mathcal{U}_x$; verifichiamo che dall'essere U η-pseudointorno di un certo insieme $F \in \mathcal{F}_x$ per ogni $\eta < \alpha$, segue che è anche α-pseudointorno di x: infatti si ha $\bigcup_{\eta < \alpha} w^\eta (\complement U \cap F) = \emptyset$ da cui segue, poichè in $\complement F$ non ci sono successioni convergenti ad x, $x \notin w \bigcup_{\eta < \alpha} w^\eta \complement U = w^\alpha \complement U$, ossia U è α-pseudointorno di x; e allora per la (I) U è intorno di x. Abbiamo così trovato un filtro $\mathcal{U}_x$ costruito nel modo voluto e fatto tutto di intorni di x. Inoltre ogni intorno U' di x è di questo tipo. Infatti contenendo una coda di ogni successione convergente ad x ed essendo un intorno di ciascuna, U' è anche un loro ϑ-pseudointorno con ϑ ordinale qualunque e quindi anche un loro η-pseudointorno per ogni $\eta < \alpha$.

Viceversa dimostriamo che dalla (II) segue la $(\mathrm{I_a})$:

Supponiamo ci sia un α-pseudointorno U di x che non sia intorno di x in τ, ossia non sia η-pseudointorno per ogni $\eta < \alpha$ di alcun insieme $F \in \mathcal{F}_x$. Esiste allora almeno un filtro $\mathcal{F}_{\bar{i}}$ fra quanti formano l'intersezione $\mathcal{F}_x$ tale che U non è η-pseudointorno per ogni $\eta < \alpha$ di alcun insieme $F \in \mathcal{F}_{\bar{i}}$. Siccome $\mathcal{F}_{\bar{i}}$ ha base numerabile, se ne può estrarre una base di insiemi ordinati per inclusione:

$F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots$. Per ciascun F_n esisterà un ordinale $\eta_n < \alpha$ tale che U non è η_n-pseudointorno di F_n. Allora esiste un punto $x_n \in F_n$ tale che $x_n \in w^{\eta_n} \complement U$ e quindi, per ogni n, $x_n \in \bigcup_{\eta<\alpha} w^{\eta} \complement U$. Si ha inoltre che la successione $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ converge ad x nella topologia τ per come sono fatti gli intorni e quindi si ha che

$$x \in w \bigcup_{\eta<\alpha} w^{\eta} \complement U = w^{\alpha} \complement U$$

da cui segue che U non è α-pseudointorno di x che è la tesi.

Sia α ordinale isolato; in questo caso la proposizione (II_a) si può enunciare al seguente modo:

(II'_a) Il filtro $\mathcal{U}_x$ degli intorni di un generico punto x è l'$(\alpha - 1)$-pseudointorno del filtro $\mathcal{F}_x$ intersezione di una famiglia di filtri $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ a base numerabile con nucleo contenente x.

La dimostrazione seguirà pari pari il ragionamento precedente. Nella prima parte si prenderà $\mathcal{U}_x$ come il filtro $(\alpha - 1)$-pseudointorno di $\mathcal{F}_x$. Ed allora $\mathcal{U}_x$ sarà α-pseudointorno di x com'è immediato verificare.

Nella seconda parte si supporrà esistere un α pseudointorno U di x che non è intorno, ossia non è $(\alpha - 1)$-pseudointorno di alcun $F \in \mathcal{F}_x$. Esisterà allora un filtro $\mathcal{F}_{\bar{i}}$ tale che U non è $(\alpha - 1)$-pseudointorno di alcun $F \in \mathcal{F}_{\bar{i}}$.

Presa una base di $\mathcal{F}_{\bar{i}}$ ordinata per inclusione $F_1 \supset F_2 \supset \ldots \ldots \supset F_n \supset \ldots$, sia $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ la successione dei punti relativi appartenenti rispettivamente ad $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$ tali che $x_n \in w^{(\alpha-1)} \complement U$. Ma allora, poichè la successione $\{x_n\}$ converge ad x, si ha che $x \in w w^{(\alpha-1)} \complement U = w^{\alpha} \complement U$ e quindi U non è α-pseudointorno di x. Col che il teorema rimane completamente dimostrato.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. P. FRANKLIN, *Spaces in which sequences suffices*; Fund. Math. Vol. 57 (1965) p. 107-115.

[2] M. DOLCHER, *Topologie e strutture di convergenza*; Ann. della Scuola Norm. Sup. di Pisa, serie III, vol. XIV (1960), p. 63-92.

[3] J. NOVÁK, *On some problems concerning multivalued convergences*; Czech. Math. Journ. Vol. 14 (89), (1964), p. 548-561.

[4] E. ČECH, *Topological spaces*; Publishing House, Praha; Interscience Publishers, London, 1966.

[5] W. F. DAVISON, *Mosaic of compact metric spaces*; Trans. Amer. Math. Soc. 91 (1959), p. 525-546.

Manoscritto pervenuto in redazione il 1-3-68.