RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

FEDERICO MENEGAZZO

Gruppi nei quali la relazione di quasi-normalità è transitiva

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 40 (1968), p. 347-361

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1968__40__347_0>

GRUPPI NEI QUALI LA RELAZIONE DI QUASI-NORMALITÀ È TRANSITIVA

FEDERICO MENEGAZZO *)

Un sottogruppo H del gruppo G si dice quasi-normale [5] in G (e scriveremo $H \subseteq_q G$) se esso è permutabile con ogni sottogruppo di G; in particolare H risulta un elemento modulare nel reticolo dei sottogruppi di G. Il gruppo G gode della proprietà (q), ovvero è un (q)-gruppo, se $A \subseteq_q B \subseteq_q G$ implica $A \subseteq_q G$ [8], in altre parole se la quasi-normalità è una relazione transitiva. I (q)-gruppi risolubili sono stati determinati nel caso finito da G. ZACHER [8]; nella presente nota si prosegue lo studio di questa classe di gruppi sostituendo l'ipotesi di finitezza con condizioni meno restrittive. Più precisamente si dimostrano i risultati seguenti:

TEOREMA A. *Se il gruppo risolubile G gode della proprietà (q), esso è supersolubile.*

TEOREMA B. *Se G è un (q)-gruppo risolubile aperiodico, allora G è abeliano.*

TEOREMA D. *Sia G un gruppo periodico. G è un (q)-gruppo risolubile se e solo se possiede un sottogruppo normale N tale che*

1) *N è di Hall e privo di elementi di ordine 2;*

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematici del C. N. R.

Indirizzo dell'Autore: Seminario Matematico, Università, Padova.

2) *G/N è prodotto diretto di p-gruppi risolubili con proprietà* (q);

3) *ogni sottogruppo di N è normale in G.*

I p-gruppi risolubili con proprietà (q) sono caratterizzati nel teorema $C1$ se p è un numero primo dispari, e nel teorema $C2$ se $p = 2$.

Notazioni e richiami.

Le notazioni saranno quelle usuali della teoria dei gruppi; in particolare, se K è un insieme di elementi del gruppo G, $\langle K \rangle$ indica il sottogruppo di G generato dagli elementi di K, e con i simboli $Z_\alpha(G)$, $\Gamma_\alpha(G)$, $G^{(\alpha)}$, dove α è un qualunque ordinale, si denotano rispettivamente l'α-esimo termine della serie centrale ascendente, della serie centrale discendente e della serie derivata di G.

Il gruppo G si dice risolubile (supersolubile) se ogni immagine omomorfa non identica di G possiede un sottogruppo normale abeliano (rispettivamente: ciclico) non identico.

Il gruppo G è superiormente (inferiormente) speciale se la serie centrale ascendente (discendente) termina con G (con il sottogruppo identico).

Il gruppo G è un t-gruppo se da $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$ segue $A \trianglelefteq G$.

Con $\pi(G)$ indicheremo l'insieme dei numeri primi p_i tali che esiste un elemento del gruppo G il cui periodo è p_i.

Il sottogruppo normale N di G è di Hall se è periodico e $\pi(N) \cap \pi(G/N) = \emptyset$. Se p è un numero primo e G è un gruppo indicheremo con $G(p)$ il sottogruppo di G generato dagli elementi periodici i cui ordini sono divisibili soltanto per numeri primi maggiori di p.

Ricordiamo ora alcuni risultati fondamentali per lo studio dei (q)-gruppi:

i) Le immagini omomorfe e i sottogruppi quasi-normali di un (q)-gruppo sono ancora (q)-gruppi [8];

ii) Un sottogruppo H del gruppo G è quasi-normale in G se e solo se è permutabile con ogni sottogruppo ciclico di G [2];

iii) Se il sottogruppo (proprio) H del gruppo G è massimale rispetto alla proprietà di essere quasi-normale in G, allora $H \triangleleft G$ [5].

1. Dimostreremo in questa sezione il teorema A; il risultato sarà ottenuto come corollario di alcune proposizioni.

PROPOSIZIONE 1.1. *Sia G un (q)-gruppo risolubile, ed A un sottogruppo quasi-normale di G di ordine primo p. Allora la chiusura normale A^G di A contiene un sottogruppo normale di G di ordine primo.*

Se $U = \langle x \in G \mid x^p = 1 \rangle$, risulta $A \trianglelefteq U \trianglelefteq G$ per la proprietà iii) da cui, per ogni $y \in G$, $A^y = y^{-1} Ay \trianglelefteq A^G \trianglelefteq U$; e A^G è un p-gruppo abeliano elementare. Se $A \trianglelefteq G$, $A = A^G$ e il teorema è vero; supponiamo allora $\langle a \rangle = A$ non sia normale, e sia $g \notin \mathcal{N}_G(A)$. La quasi normalità di A implica $g^{-1} ag = a^r g^s \in A^G$ e g^s ha ordine p: da ciò segue che $\mathcal{N}_G(A)$ contiene gli elementi aperiodici e tutti i k-sottogruppi di Sylow di G per $k \neq p$; non è pertanto restrittivo supporre $|g| = p^\alpha$. In questo caso $\langle g \rangle$ è massimale e quindi normale nel p-gruppo finito $\langle a, g \rangle$, e $[a, g] = a^{r-1} g^s \in \langle g \rangle$ da cui $g^{-1} ag = ag^s$ e inoltre $g^{-p} ag^p = ag^{sp} = a$. Abbiamo cioè dimostrato che $\mathcal{N}_G(A)$ contiene il sottogruppo (normale) H di G generato dagli elementi aperiodici e da $G^p = \langle x^p \mid x \in G \rangle$; il quoziente G/H è un (q)-gruppo di esponente p, pertanto ogni sottogruppo subnormale vi è quasi-normale (per la proprietà transitiva della quasi-normalità) e anzi normale per la proprietà iii) del numero precedente. G/H è dunque un t-gruppo risolubile e quindi, nelle nostre ipotesi, è abeliano [6] [1]; in particolare $G' \subseteq \mathcal{N}_G(A)$. Consideriamo ora $B = \langle g^s \rangle$; è chiaro che $B \subseteq A^G$, ha ordine p, $B \subseteq_q G$ e $\mathcal{N}_G(B) \supseteq H$, e supponiamo esista $x \in G$, $x \notin \mathcal{N}_G(B)$: non è restrittivo supporre inoltre che $|x|$ sia una potenza di p. Risulta allora $x^{-1} ax = ax^t$, $g^{-1} x^t g = x^t g^u$, $x^{-1} g^s x = g^s x^v$, $|x^v| = p$, $x^{tp} = g^{up} = 1$, e distinguiamo due casi.

I) $[g^{-1}, x^{-1}] \in \mathcal{C}_G(A)$. Allora $(xg)^{-1} a (xg) = (gx)^{-1} a (gx)$ e cioè, per le posizioni fatte, $ag^s x^t g^u = ax^t g^s x^v$; segue $1 \neq g^u = x^v \in \langle x \rangle$ contro l'ipotesi che $x \notin \mathcal{N}_G(B)$.

II) $[g^{-1}, x^{-1}] \notin \mathcal{C}_G(A)$. In questo caso $[x^{-1}, g^{-1}] a [g^{-1}, x^{-1}] = a^m$ con $m \not\equiv 1 \pmod{p}$; come sopra $(gx)^{-1} a (gx) = (xg)^{-1} a^m (xg)$ e, a conti fatti, $a^m g^{ms} x^{mt} g^{mu} = ax^t g^s x^v$ con $x^{t+v} \neq x^{mt}$ (dall'uguaglianza

---

[1]) Il risultato in questione è valido anche se la nostra definizione di risolubilità è più debole di quella adottata in [6].

seguirebbe $A \subseteq \langle g \rangle$ contro la scelta di g) e quindi $x^v \in AB$; in altre parole $B^G \subseteq AB$ che è abeliano elementare di ordine p^2. Poichè A non è normale in G nè coniugato di B, risulta $B = B^G \trianglelefteq G$, contro la scelta di x.

Ne discende che non esiste un siffatto $x \in G$, e pertanto $B \trianglelefteq G$ e la conclusione.

PROPOSIZIONE 1.2. *Siano G un (q)-gruppo ed H un sottogruppo abeliano, libero da torsione e normale in G. Allora ogni sottogruppo di H è normale in G.*

Proveremo la tesi per i sottogruppi ciclici di H, e sia $A = \langle a \rangle$ uno di questi. Ovviamente $A \subseteq_q G$, e per ogni $x \in G$ risulta $xa = a^r x^s$ per r, s numeri interi convenienti. Se x è periodico ciò implica $xax^{-1} = a^r x^{s-1} \in H$, da cui $x^{s-1} = 1$ e $x \in \mathcal{N}_G(A)$; se x è aperiodico e $\langle x \rangle \cap A = \langle a^i \rangle \neq 1$ anche $A \cap xAx^{-1} \neq 1$ e il gruppo abeliano $\langle A, xAx^{-1} \rangle$ è ciclico; se d ne è un generatore, $a = d^\alpha$ e $xax^{-1} = d^\beta$ implicano $d^{\alpha i} = a^i = xa^i x^{-1} = d^{\beta i}$ donde $\alpha = \beta$ e $x \in \mathcal{N}_G(A)$. Se invece $\langle x \rangle \cap A = 1$ il teorema di isomorfismo assicura che $r = 1$ oppure $r = -1$, e ugualmente per s. Si trova poi che se $r = 1$, $s = -1$ $(xa)^2 = a^2 \in \langle a \rangle$ di modo che $\langle a \rangle$ è di indice 2 in $\langle a, xa \rangle = \langle x, a \rangle$, contro l'ipotesi; se invece $r = -1$, $s = -1$ $xa = (xa)^{-1}$ avrebbe ordine 2, mentre nei rimanenti casi $x \in \mathcal{N}_G(A)$, il che prova l'asserto.

TEOREMA A. *Se il gruppo risolubile G gode della proprietà (q), esso è supersolubile.*

Poichè la proprietà (q) è ereditata dalle immagini omomorfe, basterà provare che ogni (q)-gruppo risolubile non identico G ha un sottogruppo normale ciclico non identico. Sia infatti $H \neq 1, H \trianglelefteq G$ e abeliano: se H non è libero da torsione sia $a \neq 1$, $a \in H$, $a^p = 1$ con p numero primo; $\langle a \rangle \subseteq_q G$ e la conclusione segue dalla proposizione 1.1. Se H è aperiodico ogni suo sottogruppo è normale in G per la proposizione 1.2.

2. Esaminiamo ora un notevole caso particolare, quello dei gruppi risolubili liberi da torsione, dimostrando il

TEOREMA B. *Se G è un gruppo risolubile aperiodico con proprietà (q), esso è abeliano.*

Sia $N \neq 1$ un sottogruppo abeliano normale massimo di G (un N siffatto esiste per ipotesi) e supponiamo $G \neq N$. In G/N esiste allora un sottogruppo M/N abeliano, normale e non identico, ed M è ancora un (q)-gruppo risolubile aperiodico. Per la proposizione 1.2 ogni sottogruppo di N è normale in M, e supponiamo esistano $x \in M$, $a \in N$, $a \neq 1$ tali che $xax^{-1} = a^{-1}$.

Poichè $x^2 \in \mathcal{C}_M(N) \langle N, x^2 \rangle$ è abeliano e normale in M; ancora per la proposizione 1.2 ogni sottogruppo di $\langle N, x^2 \rangle$ è normale in M, da cui $x(x^2 a) x^{-1} = x^2 a^{-1}$ deve essere uguale ad $x^2 a$ oppure ad $x^{-2} a^{-1}$, e in ogni caso M conterrebbe un elemento periodico contro l'ipotesi. Ma allora N è contenuto nel centro di M che risulta speciale e modulare, e anzi ([7], p. 19) abeliano; di qui $M = N$ e dunque $G = N$, come volevasi.

3. Prima di iniziare lo studio dei gruppi risolubili con proprietà (q) e periodici, proviamo due lemmi di carattere un po' più generale.

PROPOSIZIONE 3.1. *Sia $\{H_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una catena discendente di sottogruppi quasi-normali del gruppo G, e $H = \bigcap_{\alpha \in I} H_\alpha$. Se $x \in G$ verifica la condizione*

$$(*) \qquad |\langle x \rangle : \langle x \rangle \cap H| = n(x) \quad \text{è finito}$$

allora H è un sottogruppo quasi-normale di $\langle H, x \rangle$.

Fissato $x \in G$ soddisfacente alla $(*)$, sia $\langle x \rangle \cap H = \langle x^t \rangle$ con $t \geq 0$ e minimo; e scegliamo $\beta \in I$ tale che $|\langle x \rangle : \langle x \rangle \cap H_\beta| < |\langle x \rangle : \langle x \rangle \cap H| = |\langle x \rangle : \langle x \rangle \cap H_{\beta+1}|$. Sia poi $a \in H$: la quasi-normalità di H_α per ogni $\alpha \in I$ comporta $xax^{-1} = a_\alpha x^{r_\alpha}$, $a_\alpha \in H_\alpha$; e si può scegliere a_α in modo che $0 \leq r_\alpha < t$. Segue poi se $\alpha > \beta$ da $xax^{-1} = a_\alpha x^{r_\alpha} = a_{\beta+1} x^{r_{\beta+1}}$ che $x^{r_{\beta+1} - r_\alpha} \in H_{\beta+1}$ da cui facilmente si trae che $r_\alpha = r_{\beta+1} = r$ non dipende da α e $a_{\beta+1} = a_\alpha = \bar{a} \in \bigcap_{\alpha \in I} H_\alpha = H$ e infine $\langle x \rangle H = H \langle x \rangle$, c. v. d.

PROPOSIZIONE 3.2. *Se gli elementi periodici del (q)-gruppo G inferiormente speciale formano un sottogruppo T, ogni sottogruppo di G è quasi-normale.*

Proviamo innanzitutto l'asserto per i sottogruppi periodici. Sia $g \in G$ e periodico, e poniamo $H_\alpha = \langle g, \Gamma_\alpha \rangle$ ove $\Gamma_\alpha = \Gamma_\alpha(T)$: qualunque sia α risulta $H_\alpha \subseteq_q T$. Infatti $H_0 = T \subseteq_q T$; se $\alpha = \beta + 1$ $H_\beta \subseteq_q T$ per l'ipotesi induttiva e $H_\beta/\Gamma_\alpha = \langle g \Gamma_\alpha \rangle (\Gamma_\beta/\Gamma_\alpha)$ è abeliano poichè $\Gamma_\beta/\Gamma_\alpha \subseteq Z_1(T/\Gamma_\alpha)$; ma allora $H_\alpha \trianglelefteq H_\beta \subseteq_q T$ implica $H_\alpha \subseteq_q T$. Se poi α è un ordinale limite $\Gamma_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} \Gamma_\beta$ e banalmente $\bigcap_{\beta<\alpha} H_\beta \supseteq \langle g, \Gamma_\alpha \rangle$; inoltre esiste $\beta_0 < \alpha$ tale che $\langle g \rangle \cap \Gamma_\alpha = \langle g \rangle \cap \Gamma_\beta = \langle g^t \rangle$ per ogni β con $\beta_0 < \beta < \alpha$ e $t \geq 0$ e minimo, e sia $x \in \bigcap_{\beta<\alpha} H_\beta$. Risulta (se $\beta' > \beta > \beta_0$) $x = g^r a_\beta = g^s a_{\beta'}$ con $a_\beta \in \Gamma_\beta$, $a_{\beta'} \in \Gamma_{\beta'}$, $0 \leq r < t$, $0 \leq$ $\leq s < t$ (tale scelta di r, s è certamente possibile) da cui $g^{|r-s|} \in \Gamma_{\beta'}$ e quindi $g^r = g^s$, $a_\beta \in \bigcap_{\beta'<\alpha} \Gamma_{\beta'} = \Gamma_\alpha$; in definitiva $x \in \langle g, \Gamma_\alpha \rangle = H_\alpha$ e $H_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} H_\beta$ è quasi-normale in T per la proposizione precedente. Questo stesso ragionamento, con $t = 0$, prova $\langle g \rangle = \bigcap_\alpha H_\alpha$ e $\langle g \rangle \subseteq_q T$, da cui per la proprietà transitiva $\langle g \rangle \subseteq_q G$. Se $G = T$ non c'è altro da dimostrare; altrimenti per ogni $x \notin T$, $t \in T$ si ha (ricordando $\langle t \rangle \subseteq_q G$) $\langle x, t \rangle \cap T = \langle t \rangle \lhd \langle x, t \rangle$: cioè ogni sottogruppo di T è normale in G; in particolare T è abeliano o hamiltoniano, mentre G/T è abeliano per il teorema B. Fissato allora $g \in G$, $g \notin T$, consideriamo i due casi:

I) T è hamiltoniano, $T = Q \times R$ con Q gruppo dei quaternioni ed R abeliano elementare. Poichè l'automorfismo indotto da g su T è l'identità o l'inversione $\langle g^2, R \rangle \subseteq Z_1(\langle g, T \rangle)$, $\langle g, T \rangle / Z_1(\langle g, T \rangle)$ è un 2-gruppo finito e quindi $\langle g, T \rangle$ è speciale: segue $\langle g \rangle \lhd\lhd \langle g, T \rangle \trianglelefteq G$ e $\langle g \rangle \subseteq_q G$.

II) T è abeliano. Su ogni p-componente T_p di $T g$ induce una potenza [6], cioè per ogni $y \in T_p$ $g^{-1} y g = y^{\alpha(p)}$ dove $\alpha(p)$ è un intero p-adico non dipendente da y; inoltre $\alpha(p) \equiv 1 \pmod{p}$ perchè $\langle g, T \rangle$ è inferiormente speciale (supponendo $\alpha(p) \not\equiv 1 \pmod{p}$ per ogni $z \in T$ di ordine p si avrebbe $\langle [z, g] \rangle = \langle z \rangle$, da cui $z \in \bigcap_\alpha \Gamma_\alpha(\langle g, T \rangle) \neq 1$) e $\alpha(2) \equiv 1 \pmod{4}$, altrimenti un opportuno quoziente del (q)-gruppo $\langle g, T \rangle$ sarebbe diedrale e quindi non un (q)-gruppo. Ma allora ([7], p. 21) $\langle g, T \rangle$ è quasi-hamiltoniano, e $\langle g \rangle \subseteq_q \langle g, T \rangle \trianglelefteq G$ implica $\langle g \rangle \subseteq_q G$, c. v. d.

COROLLARIO. *I p-gruppi risolubili con proprietà (q) sono modulari e speciali, non appena essi siano inferiormente speciali.*

La dimostrazione è immediata, poichè i p-gruppi localmente finiti e modulari sono speciali ([7], p. 22).

4. Sia ora G un p-gruppo, con p numero primo; definiamo induttivamente i sottogruppi G_α di G con le posizioni $G_0 = G$, $G_\alpha = \langle x^p \mid x \in G_{\alpha-1} \rangle$ se α ha un precedente e $G_\alpha = \bigcap_{\beta < \alpha} G_\beta$ se α è un limite; e sia $G_\infty = \bigcap_\alpha G_\alpha$.

Proposizione 4.1. *Se G è un p-gruppo risolubile con proprietà (q), esso è un'estensione di un p-gruppo abeliano divisibile mediante un p-gruppo speciale modulare.*

Con le notazioni sopra introdotte G/G_∞ è un gruppo speciale modulare; infatti G/G_1 è un t-gruppo risolubile di esponente p e quindi abeliano, e proviamo per induzione che G/G_α è speciale per ogni α. Supponiamo esista $\alpha - 1$ e $G/G_{\alpha-1}$ sia speciale: $G_{\alpha-1}/G_\alpha$ è abeliano elementare, come si è ora visto, e ogni suo sottogruppo di ordine p è quasi-normale in G/G_α; ricordando la dimostrazione della proposizione 1.1 e che i sottogruppi di ordine p sono contenuti nel centro del proprio normalizzante si verifica agevolmente che $G_{\alpha-1}/G_\alpha \subseteq Z_2(G/G_\alpha)$, e quindi G/G_α è speciale. Se α è un limite e G/G_β è speciale qualunque sia $\beta < \alpha$ risulta $\bigcap_1^\infty {}_k \Gamma_k(G/G_\alpha) \subseteq \bigcap_{\beta<\alpha}(G_\beta/G_\alpha) = G_\alpha$; pertanto G/G_α è inferiormente speciale, e dunque modulare e speciale per il corollario alla proposizione 3.2. Inoltre G_∞ è superiormente speciale per il teorema A, è completo (nel senso di Černikov) e quindi abeliano e divisibile ([4], II, p. 234).

Teorema C1. *Se p è un numero primo dispari e G è un p-gruppo risolubile con proprietà (q), G è un p-gruppo speciale modulare.*

Per quanto precede è sufficiente dimostrare che $G_\infty \subseteq Z_1(G)$. $G_\infty = \prod_{\alpha \in I} H_\alpha$, H_α è un p-gruppo quasi-ciclico per ogni α, e siano $A = H_\alpha$, $g \in G$, $\langle g \rangle \cap G_\infty = 1$. Per la quasi-normalità di A in G risulta $A = \langle g, A \rangle \cap G_\infty \lhd \langle g, A \rangle$; ma A non possiede automorfismi non identici di ordine p ([6], p. 29), dunque $[g, A] = 1$ e $[g, G_\infty] = 1$. Se invece $A_0 = \langle g \rangle \cap G_\infty \neq 1$, $A_0 \lhd \langle g, G_\infty \rangle$ che è un (q)-gruppo e le stesse considerazioni, applicate a $\langle g, G_\infty \rangle / A_0$, provano $[g, G_\infty] \subseteq$

$\subseteq A_0 \subseteq Z_1(\langle g, G_\infty \rangle) : \langle g, G_\infty \rangle$ è speciale di classe al più 2 e, se $p^n = |g|$, $a \in G_\infty$, $[a^{p^n}, g] = [a, g^{p^n}] = 1$ cioè $1 = [g, G_\infty^{p^n}] = [g, G_\infty]$, c. v. d.

Consideriamo ora il caso $p = 2$; se $G_\infty = 1$ G è modulare e speciale per la proposizione 4.1; supponiamo pertanto $G_\infty \neq 1$, e siano $g \in G$, tale che $\langle g \rangle \cap G_\infty = 1$ e $h \in G_\infty$ ed arbitrario. Da $\langle h \rangle \subseteq_q G$ segue come sopra $\langle h \rangle = \langle g, h \rangle \cap G_\infty \lhd \langle g, h \rangle : g$ normalizza ogni sottogruppo di G_∞ e quindi ([6], p. 29) induce su G_∞ l'identità o l'inversione. Se poi $A_0 = \langle g \rangle \cap G_\infty \neq 1$ la conclusione precedente è valida in $\langle g, G_\infty \rangle / A_0$ e se g induce in G_∞ / A_0 l'identità il ragionamento del teorema $C\,1$ prova che $[g, G_\infty] = 1$; supponiamo allora che g induca su G_∞ / A_0 l'inversione, e sia $h \in G_\infty$ e arbitrario; sarà $g^{-1} hg = h^{-1} g^m$ con $g^m \in A_0$, e poniamo $2^l = |g|$. Esiste $h_1 \in G_\infty$ tale che $h = h_1^{2^l}$; da $g^{-1} h_1 g = h_1^{-1} g^n$ $(g^n \in A_0)$ segue $g^{-1} hg = (h_1^{-1} g^n)^{2^l} = h^{-1}$ e dunque l'automorfismo indotto da g su G_∞ è l'inversione. Risulta quindi, posto $C = \mathcal{C}_G(G_\infty)$, $|G : C| \leq 2$; inoltre C è un 2-gruppo speciale modulare con elementi di periodo arbitrariamente elevato ed è quindi abeliano [7] e se $G = C$ non c'è niente da dimostrare. Rimane da considerare il caso seguente: $G_\infty \neq 1$, $G = \langle a, C \rangle$, $a^{-1} xa = x^{-1}$ per ogni $x \in G_\infty$; ogni sottogruppo di C è quasi-normale in G, $C = G_\infty \times B$ con B 2-gruppo abeliano e infine $a^2 \in Z_1(G)$. Osserviamo che i sottogruppi quasi-normali di G non contenuti in C contengono G_∞: sia infatti $Q \subseteq_q G$, $Q \not\subseteq C$; non è restrittivo supporre $a \in Q$, e sia $h \in G_\infty$, $h^2 \neq 1$ (e dunque $aha^{-1} = h^{-1}$, $(ah)^2 = a^2$, $h^{-1} ah = h^{-2} a$); per la quasi-normalità di Q $a(ah) = (ah)^r q$ con r numero naturale e $q \in Q$ convenienti, da cui $a^2 h = a^{2s}(ah) q$, $h^{-1} ah = a^2 (a^{2s} q)^{-1} \in Q$ e $h^2 \in Q$; pertanto $G_\infty = G_\infty^2 \subseteq Q$. Trattiamo successivamente i seguenti casi particolari:

I) $a^2 = 1$. Ogni sottogruppo di C è normale in G, a induce su C l'inversione [6]; per ogni $b \in B$ $\langle a, b \rangle \cap G_\infty = 1$, il 2-gruppo finito $\langle a, b \rangle \cong \langle a, b \rangle G_\infty / G_\infty$ è modulare; da $a^{-1} ba = b^{-1}$ segue allora $b^2 = 1$. In definitiva B risulta abeliano elementare, $[a, B] = 1$, G/G_∞ è abeliano e per l'osservazione precedente G è un t-gruppo.

II) $a^2 \neq 1$, $\langle a \rangle \cap G_\infty = 1$. Scegliendo B in modo opportuno $a^2 \in B$; per quanto visto sopra $B / \langle a^2 \rangle$ è elementare, e il gruppo abeliano limitato B è prodotto diretto di gruppi ciclici ([3], teor. 11.2). Se B stesso è elementare ogni suo elemento b normalizza $\langle a \rangle$, e anzi lo centralizza in quanto, essendo $a^4 = 1$, altrimenti si avrebbe $b^{-1} ab = a^{-1}$ e nel gruppo diedrale $\langle a, b \rangle$ il sottogruppo $\langle b \rangle$ non sarebbe quasi-normale; quindi ogni sottogruppo di C è normale in $G, [a, B] = 1$ e come sopra G è un t-gruppo. Se l'esponente di B è maggiore di 2 $B = H_0 \times H_1$ con H_0 abeliano elementare, H_1 prodotto diretto di gruppi ciclici di ordine maggiore o uguale a 4, e sia b_1 un arbitrario elemento di H_1 avente periodo 2: esiste $b_2 \in H_1$ tale che $b_1 = b_2^2$ ([3], cor. 24.2 e teor. 11.4), e poichè $b_2^2 \equiv 1 \pmod{\langle a^2 \rangle}$ $b_1 \in \langle a^2 \rangle$ è l'elemento (unico) di periodo 2 in $\langle a^2 \rangle$; ma allora $H_1 = \langle c \rangle$ è ciclico, e $a^2 \in \langle c \rangle$. Si osservi che, se inoltre $\langle a^2 \rangle \neq H_1$, per una scelta opportuna di c si ha $a^2 = c^2$ e, posto $2^t = |a| = |c|$, si ha $a^{-1} ca = ca^{2^{t-1}}$ oppure $a^{-1} ca = c$; sostituendo ad a nel primo caso $a^{2^{t-1}-1} c$ e nel secondo $ac^{2^{t-1}-1}$, poichè questi due elementi non appartengono a C ed hanno periodo 2, ci si riconduce a I).

In definitiva $B = H_0 \times \langle a^2 \rangle$ e per ogni $b \in H_0$ $\langle a, b \rangle$ è modulare, e cioè $a^{-1} ba = b$ oppure $a^{-1} ba = ba^{2^{t-1}}$ con $2^t = |a| > 4$.

III) $a^2 \neq 1, \langle a \rangle \cap G_\infty \neq 1$. Essendo ovviamente $B \cap \langle a \rangle = 1$ si ha da I) che B è abeliano elementare; in particolare $a^4 \in G_\infty$, $a^8 = 1$, $B \subseteq \mathcal{N}_G(\langle a \rangle)$. Inoltre per ogni $b \in B$ $a^{-1} ba \equiv b \pmod{\langle a^4 \rangle}$ perchè altrimenti, come in II), $\langle a^4, b \rangle$ non sarebbe quasi-normale; e quindi G/G_∞ è abeliano. Se addirittura $[a, B] = 1$ ogni sottogruppo di C è normale in G e G è un t-gruppo; se ciò non si verifica è $a^4 \neq 1$, $B = B_1 \times B_2$ con $B_1 = B \cap \mathcal{C}_G(a)$, $B_2 = \langle u \rangle$, $u^{-1} au = a^5$ e anzi, poichè $a^2 = cd$ ($c \in G_\infty$, $d \in B$) implica $cd = a^{-1}(cd)a = c^{-1} a^{-1} da$ e ancora $d^{-1} ad = a^5$, si può assumere $B_2 = \langle d \rangle$.

Abbiamo così provato la necessità del

Teorema $C2$. *Il 2-gruppo G è risolubile con proprietà (q) se e solo se esso appartiene ad una delle classi seguenti:*

1) *G è speciale e modulare;*

2) *G è un t-gruppo risolubile;*

3) *$G = \langle A \times B_1 \times B_2, z \rangle$ con A abeliano divisibile, B_1 elementare, $B_2 = \langle z^2 \rangle$, $z^{-1} xz = x^{-1}$ $\forall x \in A$, $\forall b \in B_1$ $z^{-1} bz = b$* oppure *$z^{-1} bz = bz^{2^{t-1}}$* (se *$2^t = |z| > 4$*);

4) *$G = \langle A \times B_1 \times B_2, z \rangle$ con A abeliano divisibile, B_1 elementare, $B_2 = \langle b_2 \rangle$ ciclico di ordine 2, $z^2 = ab_2$ ($a \in A$), $z^4 = a^2 \neq 1$, $z^8 = 1$, $z^{-1} xz = x^{-1}$ $\forall x \in A$, $z^{-1} bz = b$ $\forall b \in B_1$, $z^{-1} b_2 z = z^4 b_2$.*

La sufficienza è ovvia nel caso 1); nel caso 2) G è abeliano o hamiltoniano e quindi rientra sotto 1) oppure $G = \langle A \times B, z \rangle$ con A abeliano divisibile, B abeliano di esponente ≤ 4, G/A abeliano o hamiltoniano [6]; per cui, ponendo $C = A \times B$ in 2), $C = A \times B_1 \times B_2$ in 3) e in 4), si verifica immediatamente che ogni sottogruppo di C è quasi-normale in G (anzi addirittura normale in 2)). Dimostriamo ora che $H \subseteq_q K \subseteq_q G$ implica $H \subseteq_q G$. Se $H \subseteq C$ la cosa è vera, come è stato appena osservato; se $H \not\subseteq C$ anche $K \not\subseteq C$ e, applicando un ragionamento precedente, risulta $A \subseteq K$ che è dello stesso tipo di G; ma allora il medesimo ragionamento indica che $A \subseteq H$ e dunque, poichè G/A è in ogni caso abeliano o modulare, $H \subseteq_q G$.

COROLLARIO. *I p-gruppi risolubili con proprietà (q) sono metabeliani.*

5. Determiniamo ora i gruppi risolubili periodici con proprietà (q), esaminando dapprima un caso particolare; nel seguito, se M è un gruppo, si porrà $\Gamma_\infty(M) = \bigcap_\alpha \Gamma_\alpha(M)$.

PROPOSIZIONE 5.1. *Sia G un (q) gruppo risolubile periodico tale che $\pi(G)$ sia finito; allora*

1) *$\Gamma_\infty(G)$ è abeliano;*

2) *$\Gamma_\infty(G) = A \times B$, con A 2-gruppo divisibile, B di Hall in G e privo di elementi d'ordine 2;*

3) *$G/\Gamma_\infty(G)$ è modulare e speciale;*

4) *ogni sottogruppo di $\Gamma_\infty(G)$ è normale in G.*

$G/\Gamma_\infty(G)$ è periodico, inferiormente speciale, $\pi(G/\Gamma_\infty(G))$ è finito, e quindi il corollario alla proposizione 3.2 implica la 3). Poichè se G è un p-gruppo tutte le affermazioni dell'enunciato sono vere, procederemo per induzione sull'ordine di $\pi(G)$; e siano $\max\{p_i \in \pi(G)\} = p > 2$, S un p-sottogruppo di Sylow di G: G essendo supersolubile $S \trianglelefteq G$; S è allora un p-gruppo speciale e modulare, e supponiamo non sia un fattore diretto: risulta allora, come nel caso finito, $[S, G] = S$ ([8], 1.7). $\pi(G) = \{p_1, p_2, \dots, p_t\}$ con $p_1 > p_2 > \dots > p_t \geq 2$; G non sia prodotto diretto di sottogruppi di Sylow, e il sottogruppo di Sylow G_{p_i} $(p_i > 2)$ non sia un fattore diretto, a differenza di $G_{p_1}, \dots, G_{p_{i-1}}$; posto $T = \prod_{j<i} G_{p_j}$, T risulta di Hall in G e speciale $(2 \notin \pi(T)\,!)$, $G = T \times R$ e $R \supseteq \Gamma_\infty(G)$; inoltre $G_{p_i} \trianglelefteq G$,

G_{p_i} è speciale modulare e, come si prova facilmente ([8], 1.7), $G_{p_i} \subseteq \Gamma_\infty(G)$. G/G_{p_i} verifica le ipotesi e quindi soddisfa le condizioni dell'enunciato; in particolare $\Gamma_\infty(G/G_{p_i}) = \Gamma_\infty(G)/G_{p_i} = \bar{A} \times \bar{B}$ con $\bar{A}, \bar{B}$ come in 2); inoltre $\Gamma_\infty(G)$ è superiormente speciale e dunque $\Gamma_\infty(G) = G_{p_i} \times N$, $N \cong \Gamma_\infty(G/G_{p_i})$, $N = A_1 \times B_1$ con $A_1 \cong \bar{A}, B_1 \cong \bar{B}$: $\Gamma_\infty(G)$ è quindi modulare e speciale e tutti i suoi sottogruppi sono quasi-normali in G. Sia $h \in N$ ed arbitrario; per ogni $g \in G$ $g^{-1}hg \in$ $\in N \cap \langle h, G_{p_i} \rangle = \langle h \rangle$ e tutti i sottogruppi di N sono normali in G; dimostriamo ora che lo stesso avviene dei sottogruppi di G_{p_i}, e siano $k \in G_{p_i}$, $g \in G$, $(|g|, p_i) = 1$. Risulta $\langle k \rangle = \langle g, k \rangle \cap G_{p_i} \trianglelefteq \langle g, k \rangle$, e basterà dimostrare che $G_{p_i} \subseteq H = \langle g \in G \mid (p_i, |g|) = 1 \rangle \cdot G_{p_i}$ non è un fattore diretto e quindi esistono $a \in G_{p_i}$, $b \in G$, $(|b|, p_i) = 1$ tali che $ab \neq ba$; come in [8], 1.7 si prova che $\langle a \rangle = \langle [a, b] \rangle$ e $a \in \langle b, a^{-1} b^{-1} a \rangle \subseteq H$; se $c \in G_{p_i}$, $cb \neq bc$ implica come sopra $c \in H$; $cb = bc$ implica $(ac) b \neq b (ac)$, $ac \in H$ e infine $c \in H$, come si voleva. Da ciò segue che G_{p_i}, gruppo di Dedekind privo di elementi di ordine 2, è abeliano e tutti i suoi sottogruppi sono normali in G; e la dimostrazione è così completata.

Proposizione 5.2. *Sia G un (q)-gruppo risolubile periodico; allora*

1) *$\Gamma_\infty(G)$ è abeliano;*

2) *$\Gamma_\infty(G) = A \times B$ con A 2-gruppo divisibile, B di Hall in G senza elementi di periodo 2;*

3) *$G/\Gamma_\infty(G)$ è modulare e superiormente speciale;*

4) *ogni sottogruppo di $\Gamma_\infty(G)$ è normale in G.*

Siano p un numero primo, S un sottogruppo di Sylow di G relativo a p. Se $p = 2$ ed S è modulare $G/G(2)$ è speciale, $\Gamma_\infty(G) \subseteq$ $\subseteq G(2)$ e $\Gamma_\infty(G) \cap S = 1$; se S non è modulare, esso è un'estensione di un 2-gruppo abeliano divisibile A mediante un gruppo speciale di esponente finito, e ancora $[S, A] = A$ (teorema $C2$), da cui $S \cap \Gamma_\infty(G) = A$. Se $p \neq 2$ poniamo $\Gamma_\infty(G/G(p)) = N(p)/G(p)$; poichè $\dfrac{G/G(p)}{G(p)\Gamma_\infty(G)/G(p)} \cong \dfrac{G}{G(p)\Gamma_\infty(G)}$ è speciale, si ha $\dfrac{N(p)}{G(p)} \subseteq \dfrac{G(p)\Gamma_\infty(G)}{G(p)}$ da cui $N(p) \subseteq G(p)\,\Gamma_\infty(G)$ e anzi, poichè $\dfrac{G}{N(p)} \cong \dfrac{G/G(p)}{N(p)/G(p)}$ è speciale, addirittura $N(p) = G(p)\Gamma_\infty(G)$. $SG(p)/G(p)$ è contenuto nel

p-sottogruppo di Sylow di $G/G(p)$ e risulta

(1) $$\frac{SG(p)}{G(p)} \cap \frac{N(p)}{G(p)} = G(p)$$

oppure

(2) $$\frac{SG(p)}{G(p)} \subseteq \frac{N(p)}{G(p)}$$

a norma della proposizione precedente. (1) implica $S \cap N(p) \subseteq G(p)$ e quindi $S \cap \Gamma_\infty(G) \subseteq S \cap N(p) = 1$; da (2) segue $SG(p) \subseteq N(p) = G(p)\Gamma_\infty(G)$; se $s \in S$, $s = hk$ con $h \in G(p)$, $k \in \Gamma_\infty(G)$; risulta $s^n = h^n \bar{k} = \bar{k} \in \Gamma_\infty(G)$ dove $n = |h|$ è primo con p; ma allora $s \in \Gamma_\infty(G)$, $S \subseteq \Gamma_\infty(G)$. Poichè (1) e (2) non possono presentarsi per sottogruppi di Sylow relativi allo stesso numero primo ed essendo $\Gamma_\infty(G)$ superiormente speciale gli elementi di $\Gamma_\infty(G)$ aventi periodo dispari formano un sottogruppo B di Hall in G che è un fattore diretto in $\Gamma_\infty(G)$. Inoltre $G/\Gamma_\infty(G)$ è ovviamente inferiormente speciale, è modulare per la proposizione 3.2 e quindi anche superiormente speciale; poichè $\Gamma_\infty(G)$ non è un 2-gruppo di esponente finito, per completare la dimostrazione è sufficiente provare che ogni sottogruppo (ciclico) di $\Gamma_\infty(G)$ è normale in G. Sia infatti $k \in \Gamma_\infty(G)$, $|k| = p^m$ con p numero primo; per ogni numero primo $r > p$ $k\, G(r) \in \Gamma_\infty(G/G(r))$ e, qualunque sia $g \in G$, $(g^{-1}kg)\,G(r) = k^\alpha\, G(r)$ con α numero naturale, da cui $g^{-1}kg = k^\alpha h$ per un conveniente $h \in G(r)$. k e g individuano sia α che h: $k^\alpha h = k^\beta h'$ implica $k^{\alpha-\beta} \in G(r)$ e $k^\alpha = k^\beta$, $h = h'$. Segue allora $h \in \bigcap_r G(r)$ al variare di r nell'insieme dei numeri primi di $\pi(G)$ maggiori o uguali a p, da cui $h = 1$, $g^{-1}kg \in \langle k \rangle$ e la tesi.

Osservazione. Consideriamo il sottogruppo B di $\Gamma_\infty(G)$ generato dagli elementi di periodo dispari. Risulta

1) B abeliano, normale, privo di elementi di periodo 2 e di Hall in G;

2) G/B prodotto diretto dei suoi sottogruppi di Sylow, che sono p-gruppi risolubili con proprietà (q);

3) ogni sottogruppo di B è normale in G.

Solo 2) richiede un cenno di dimostrazione: $G/\Gamma_\infty(G)$ è un prodotto diretto di p-gruppi speciali modulari, $G/\Gamma_\infty(G) = \bar{S}_2 \times \prod_{p \neq 2} \bar{S}_p$. G/B

è estensione di A mediante $G/\Gamma_\infty(G)$ e se $\bar{g} \in \bar{S}_2$, $\bar{g}$ induce su A l'inversione; se $\bar{g} \in \prod_{p\neq 2} \bar{S}_p$, $\bar{g}$ permuta con ogni elemento di A: segue che G/B è superiormente speciale; le altre affermazioni sono ora evidenti.

TEOREMA *D. Sia G un gruppo periodico. G è un (q)-gruppo risolubile se e solo se possiede un sottogruppo normale N tale che*

1) N è di Hall e privo di elementi di periodo 2;

2) G/N è prodotto diretto dei sottogruppi di Sylow, che sono p-gruppi risolubili con proprietà (q);

3) ogni sottogruppo di N è normale in G.

La necessità della condizione è stata stabilita nella precedente osservazione; per la sufficienza notiamo intanto che 1) e 3) implicano che N è abeliano; per 2) G/N è metabeliano, da cui $G'''=1$. $\bar{G} = G/N$ è superiormente speciale, ed è un (q)-gruppo; infatti se $\bar{B} \subseteq_q \bar{G}$, è $\bar{B}_p = \bar{B} \cap \bar{G}_p$ per ogni p-sottogruppo di Sylow $\bar{B}_p$ di $\bar{B}$ e $\bar{G}_p$ di $\bar{G}$, da cui segue che $\bar{A} \subseteq_q \bar{B} \subseteq_q \bar{G}$ implica $\bar{A}_p \subseteq_q \bar{B}_p \subseteq_q \bar{G}_p$ e, poichè $\bar{G}_p$ è un (q)-gruppo, $\bar{A}_p \subseteq_q \bar{G}_p$; inoltre, qualunque sia $\bar{g} \in \bar{G}$, $\langle \bar{g} \rangle = \langle \bar{g}_1 \rangle \times \langle \bar{g}_2 \rangle$ con $\langle \bar{g}_1 \rangle \subseteq \bar{G}_p$, $\langle \bar{g}_2 \rangle \cap \bar{G}_p = 1$, e si ha $\bar{A}_p \langle \bar{g} \rangle = (\bar{A}_p \langle \bar{g}_1 \rangle) \langle \bar{g}_2 \rangle = \langle \bar{g}_1 \rangle (\bar{A}_p \langle \bar{g}_2 \rangle) = (\langle \bar{g}_1 \rangle \langle \bar{g}_2 \rangle) \bar{A}_p = \langle \bar{g} \rangle \bar{A}_p$, cioè $\bar{A}_p \subseteq_q \bar{G}$; ma allora $\bar{A} = \prod_p \bar{A}_p \subseteq_q \bar{G}$. Supponiamo ora $A \subseteq_q B \subseteq_q G$ e in più $A \cap N \subseteq B \cap N = 1$; qualunque sia $g \in G$, $\langle g \rangle = \langle h \rangle \times \langle k \rangle$ dove $\langle h \rangle \cap N = 1$, $k \in N$, e sia H un $\pi(G/N)$-sottogruppo di Sylow di G contenente $\langle h \rangle$. Proviamo ora che $HN/N \supseteq \Gamma_\infty(G/N)$, di modo che HN/N risulterà quasi-normale in G/N e quindi un (q)-gruppo. Infatti $\Gamma_\infty(G/N)$ è identico, nel qual caso G/N è modulare per la proposizione 3.2 e ogni sottogruppo vi è quasi-normale; oppure $\Gamma_\infty(G/N)$ è un 2-gruppo abeliano divisibile, e ogni elemento di G/N vi induce l'identità o l'inversione: in questo caso, sia $lN \in \Gamma_\infty(G/N)$ (senza introdurre restrizioni, si può supporre che $|l|$ sia una potenza di 2). Per ogni numero naturale α $lN = k_\alpha^{2^\alpha} N$ con k_α conveniente in G e $|k_\alpha|$ un potenza di 2, cioè $l = k_\alpha^{2^\alpha} t$, $t \in N$, e sia n un arbitrario elemento di N; ricordiamo che N è abeliano. Risulta $l^{-1} nl = (k_\alpha^{2^\alpha})^{-1} n k_\alpha^{2^\alpha}$ e, se 2^α è la massima potenza di 2 che divide $|Aut\langle n \rangle|$, $k_\alpha^{2^\alpha}$ induce su $\langle n \rangle$ l'identità, da cui $l^{-1} nl = n$. Per ogni $x \in H$ $(x^{-1} lx) N = lN$ oppure $(x^{-1} lx) N = l^{-1} N$ e cioè $x^{-1} lx = l^\varepsilon n$ con

$n \in N$ conveniente, $\varepsilon = \pm 1$, $[l^\varepsilon, n] = 1$; segue allora $1 = (l^\varepsilon n)^{|l|} = n^{|l|}$, da cui $n = 1$, $\langle l \rangle H = H \langle l \rangle$ è un $\pi(G/N)$-gruppo che coincide, per la massimalità di H, con H: $l \in H$ e infine $HN/N \supseteq \Gamma_\infty(G/N)$ come si voleva; ricordando che H e HN/N sono isomorfi, resta così provato che H è un (q)-gruppo. Da $A \subseteq_q B \subseteq_q H$ si trae allora $A \subseteq_q H$ e, poichè ogni sottogruppo di N è normale, $\langle g \rangle A = (\langle h \rangle \times \langle k \rangle) A = \langle h \rangle A \langle k \rangle = A (\langle h \rangle \times \langle k \rangle) = A \langle g \rangle$ e $A \subseteq_q G$. Supponiamo ora $1 = A \cap N \neq B \cap N$ e ancora $A \subseteq_q B \subseteq_q G$; per il ragionamento precedente $A(B \cap N) \subseteq_q G$ (si osservi che $A(B \cap N) = A \times (B \cap N)$), e sia di nuovo H un $\pi(G/N)$-sottogruppo di Sylow di $G \cdot \dfrac{A(B \cap N)}{B \cap N}$ e $\dfrac{H(B \cap N)}{B \cup N}$ sono $\pi(G/N)$-sottogruppi di $G/B \cap N$, il primo essendo per di più quasi-normale; per ogni sistema finito K di elementi di H, $\dfrac{\langle A, K, B \cap N \rangle}{B \cap N}$ è ancora un $\pi(G/N)$-sottogruppo. Segue che $B \cap N$ è (normale e) di Hall in $\langle A, K, B \cap N \rangle$; l'indice del suo centralizzante (che contiene A) è finito: esiste allora un complemento L di $B \cap N$ in $\langle A, K, B \cap N \rangle$ contenente $\langle K \rangle$, come segue subito da un teorema di Černikov [1], e sia a un arbitrario elemento di A. $a = ln$ per $l \in L$, $n \in B \cap N$ convenienti; $[a, n] = 1$ implica $[l, n] = 1$ e $1 = l^{|a|} n^{|a|}$ da cui, poichè $(|n|, |a|) = 1$, $n = 1$, e $\langle A, K \rangle \subseteq L$ è un $\pi(G/N)$-sottogruppo di G, e questo per ogni scelta di K. Ma allora $\langle A, H \rangle$ è un $\pi(G/N)$-sottogruppo di G, da cui $A \subseteq H$, e $A \subseteq_q B \cap H \subseteq_q H$ implica $A \subseteq_q H$ e, come sopra, $A \subseteq_q G$. Resta che sia $A \cap N \neq 1$; ma $A/A \cap N \subseteq_q G/A \cap N$ e infine anche in questo caso $A \subseteq_q G$, c. v. d.

BIBLIOGRAFIA

[1] Černikov S. N., *Sui complementi dei Π-sottogruppi di Sylow in alcune classi di gruppi infiniti,* Mat. Sb. N. S. 37 (79) (1955), 557-566.

[2] Deskins W. E., *On quasi-normal subgroups of finite groups,* Math. Z., 28 (1963), 140-152.

[3] Fuchs L., *Abelian groups.* Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences, 1958.

[4] Kurosh A. G., *The Theory of Groups,* Chelsea, 1956.

[5] Ore O., *Contribution to the theory of groups,* Duke Math. J., 5 (1939), 431-460.

[6] Robinson D. J. S., *Groups in which normality is a transitive relation,* Proc. Cambridge Phil. Soc. vol. 60, part 1 (1964).

[7] Suzuki M., *Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups,* Erg. der Math. und ihrer Grenzgebiete, Heft 10, Springer Verlag, Berlin (1956).

[8] Zacher G., *I gruppi risolubili finiti in cui i sottogruppi di composizione coincidono con i sottogruppi quasi-normali,* Rend. Accad. naz. dei Lincei, Cl. Scienze, s. VIII, vol. XXXVII, fasc. 3-4 (1964).

Manoscritto pervenuto in redazione il 10 dicembre 1968.