RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ADALBERTO ORSATTI

Su di un problema di T. Szele e J. Szendrei

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 35, nº 1 (1965), p. 171-175
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1965__35_1_171_0>

SU DI UN PROBLEMA DI T. SZELE E J. SZENDREI

Nota (*) *di* Adalberto Orsatti (*a Padova*) (**)

T. Szele e J. Szendrei hanno osservato che condizione necessaria affinchè l'anello degli endomorfismi di un gruppo abeliano G sia commutativo è che ogni immagine endomorfa di G risulti pienamente invariante, cioè invariante per ogni endomorfismo. Dopo averne provato la sufficienza in casi particolari notevoli, gli Autori hanno proposto il problema se questa condizione sia in generale sufficiente [5]. Lo stesso problema figura tra gli 86 proposti da L. Fuchs nel suo libro *Abelian Groups* ([3], problema 47).

Nel presente lavoro si dà a questo interrogativo una risposta negativa, dimostrando che esiste un gruppo abeliano ogni immagine endomorfa del quale è pienamente invariante ed il cui anello degli endomorfismi non è commutativo. Questo risultato si raggiunge per mezzo soprattutto di un teorema di A.L.S. Corner, [1].

1. Indichiamo con Z l'anello degli interi, con Q il corpo dei razionali, con Q^* il corpo non commutativo dei quaternioni a coefficienti razionali, costituito dagli elementi

$$a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \ ; \quad a_0, a_1, a_2, a_3 \in Q$$

---

*) Pervenuta in redazione il 2 gennaio 1965.

Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

**) Lavoro fatto nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca matematici del C.N.R.

insieme con le usuali regole di calcolo. Valgono le inclusioni $Z \subset Q \subset Q^*$, definite in modo ovvio. Denoteremo con $N(a)$ la norma di a: $N(a) = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \in Q$. Risulta, se $a, b \in Q^*$, $N(ab) = N(a)N(b)$; se inoltre $a \neq 0$, $N(a^{-1}) = 1/N(a)$.

Consideriamo in Q^* il sottoanello R dei *quaternioni interi* ([4], pag. 346), formato dagli elementi

$$a = \frac{1}{2}(a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k) \; ;$$

$$a_0, a_1, a_2, a_3 \in Z \; ; \quad a_0 \equiv a_1 \equiv a_2 \equiv a_3 \quad (\mathrm{mod.}\ 2) \, .$$

R contiene il sottoanello di Q^* formato dai quaternioni i cui coefficienti appartengono a Z. Inoltre se $a \in R$, $N(a) \in Z$. R è un anello non commutativo euclideo, assumendo la norma come funzione euclidea, [4]. Se $a, b \in R$ ed è $b \neq 0$, allora esistono in R degli elementi q_1, r_1, q_2, r_2 tali che

$$a = bq_1 + r_1 \; ; \quad a = q_2 b + r_2$$
$$\text{con } N(r_1) < N(b) \quad \text{ed} \quad N(r_2) < N(b)$$

Pertanto in R ogni ideale destro (sinistro) è un ideale principale destro (sinistro). Un elemento $a \in R$ dicesi pari se 2 divide $N(a)$ in Z e gli elementi pari di R sono caratterizzati dall'essere divisibili in R *a destra ed a sinistra* per $\lambda = 1 + i$ ([4], pag. 451). Cioè, se a $\in R$,

$$\lambda \mid a \text{ in } R \Leftrightarrow 2 \mid N(a) \text{ in } Z. \tag{1}$$

Pertanto l'ideale λR di R coincide con l'ideale $R\lambda$ ed è formato dai quaternioni interi pari, e se λ divide in R un prodotto di due elementi divide almeno uno dei fattori. Il sottoinsieme S di R costituito dagli elementi di R che non appartengono a λR è moltiplicativamente chiuso; un elemento di R è in S se e solo se la sua norma è un intero dispari.

Dimostriamo ora la seguente proposizione:

P. 1. *Ogni elemento non nullo r di R può scriversi nella forma $r = \lambda^m s_1 = s_2 \lambda^m$, con m intero non negativo ed $s_1, s_2 \in S$.*

Infatti se $r \neq 0$, $N(r) \neq 0$. Allora $N(r) = 2^m q$ con m intero non negativo e q intero dispari. La conclusione segue dalla (1).

2. Verifichiamo che il sottoinsieme S di R soddisfa le seguenti condizioni (cfr. [2], pag. 279).

I. *S è moltiplicativamente chiuso*, come si è già osservato.

II. *Ogni elemento di S è semplificabile in R a sinistra ed a destra*: infatti R è privo di divisori dello zero.

III. *Se b, $b' \in S$ esistono almeno due elementi s, $s' \in S$ tali che $bs = b's'$*. Infatti, poichè R è con unità, privo di divisori dello zero ed a ideali destri principali, R è *regolare a destra* ([2], pag. 323): due elementi non nulli di R hanno in R almeno un multiplo comune a destra non nullo. Esistono quindi due elementi r, $r' \in R$ tali che $br = b'r' \neq 0$. Questo comporta $r \neq 0$, $r' \neq 0$. Per la P. 1 è allora $r = s\lambda^m$, $r' = s'\lambda^{m'}$ con s, $s' \in S$ ed m, m' interi non negativi. Abbiamo $bs\lambda^m = b's'\lambda^{m'}$. Supponiamo $m > m'$. Allora $bs\lambda^{m-m'} = b's'$; ma questo è assurdo poichè λ non può dividere $b's' \in S$. Analogamente si dimostra che non può essere $m < m'$. Pertanto $m = m'$ e $bs = b's'$.

IV. *Se $s \in S$ e $t \in R$ esistono almeno due elementi $c \in R$ e $d \in S$ tali che $sc = td$.*

Se $t = 0$ la cosa è ovvia: $c = 0$, $d = 1$. Se $t \neq 0$ esistono due elementi non nulli $r_1, r_2 \in R$ tali che $sr_1 = tr_2$, poichè R è regolare a destra. Poniamo $r_1 = s_1\lambda^{m_1}$, $r_2 = s_2\lambda^{m_2}$ con $s_1, s_2 \in S$ ed m_1, m_2 interi non negativi. Abbiamo $ss_1\lambda^{m_1} = ts_2\lambda^{m_2}$. Non può essere $m_1 < m_2$ poichè $ss_1 \in S$; quindi è $m_1 \geqslant m_2$ Consegue: $ss_1\lambda^{m_1-m_2} = ts_2$. Allora $c = s_1\lambda^{m_1-m_2}$, $d = s$ e $sc = td$ con $c \in R$ e $d \in S$.

Ciò premesso possiamo affermare che esiste un anello A' estensione di R, dentro il quale ogni elemento di S è unitario. Ogni elemento di A' è della forma rs^{-1} con $r \in R$ ed $s \in S$. A' si chiama l'*anello dei quozienti a destra* di R rispetto ad S, ed è unico a meno di isomorfismi che subordinano l'identità sopra R, ([2], pag. 279 e segg).

Possiamo enunciare le condizioni III′ e IV′ simmetriche rispettivamente della III e della IV (parlando di multipli a sinistra invece che a destra) e verificare che S soddisfa anche queste condizioni. Esiste pertanto l'anello A'' dei quozienti a sinistra di R rispetto ad S, con proprietà analoghe a quelle di A'. Ogni elemento di A'' è della forma $s_1^{-1}r_1$ con $r_1 \in R$ ed $s_1 \in S$.

Indichiamo ora con S^{-1} il complesso degli inversi in Q^* degli elementi che appartengono ad S e con A il sottoanello di Q^* generato da R e da S^{-1}. È chiaro, in base alle asservazioni precedenti, che A' ed A'' sono entrambi isomorfi ad A. Ogni elemento $a \in A$ può scriversi nella forma $a = rs^{-1}$ e nella forma $a = s_1^{-1}r_1$ con $s, s_1 \in S$ ed $r, r_1 \in R$.

3. Consideriamo l'ideale principale destro λA di A. Si verifica immediatamente che:

P. 2. *Un elemento* $\alpha \in A$ *appartiene a* λA *se e solo se* $\alpha = as^{-1}$ *con* $a \in \lambda R$ *ed* $s \in S$.

Pertanto λA è propriamente contenuto in A e tutti gli elementi di A che non appartengono a λA sono unitari in A. Lo stesso può dirsi, con ragionamenti analoghi, per l'ideale sinistro $A\lambda$. Risulta così $A\lambda = \lambda A$ ed A è un anello locale (non commutativo) poichè gli elementi non unitari formano in ideale (bilatero). Il gruppo degli elementi unitari di A è formato da tutti e soli gli elementi del tipo $s_1s_2^{-1}$ con $s_1, s_2 \in S$.

Osserviamo che dalla P. 1 e dalla P. 2 discende la seguente

P. 3. *Ogni elemento* $\alpha \in A$, $\alpha \neq 0$, *può scriversi nella forma* $\alpha = \lambda^m\varepsilon$ *con* m *intero non negativo ed* ε *unitario in* A.

4. Ricordiamo che un gruppo abeliano dicesi ridotto se è privo di sottogruppi divisibili non banali, e dimostriamo che:

P. 4. *Il gruppo additivo di* A *è numerabile, libero da torsione e ridotto.*

Le prime due proprietà sono ovvie. Quanto alla terza, sia α un elemento non nullo di A. Sarà, per la P. 3, $\alpha = \lambda^m s_1 s_2^{-1}$ con m intero non negativo ed $s_1, s_2 \in S$. Poichè $N(\lambda) = 2$ risulta $N(\alpha) = 2^m \; N(s_1)/N(s_2)$ ed $N(s_1)$ e $N(s_2)$ sono interi dispari. Pertanto la norma di un elemento non nullo di A è un numero razionale che, nella forma ridotta, ha il denominatore dispari. L'equazione $2^{m+1}x = \alpha$ non ammette soluzioni in A. Infatti se se fosse $2^{m+1}\beta = \alpha$ con $\beta \in A$ si avrebbe

$$2^{2(m+1)}N(\beta) = N(\alpha) = 2^m N(s_1)/N(s_2) \, .$$

Perciò $N(\beta) = N(s_1)/2^{m+2}N(s_2)$; ma questo è assurdo poichè la norma di β è un numero razionale che, nella forma ridotta, ha il denominatore pari.

La proposizione precedente, insieme con un teorema di Corner, [1], tenuto conto del fatto che A è un anello con unità, garantisce l'esistenza di un gruppo abeliano G, numerabile ridotto e libero da torsione, il cui anello degli endomorfismi è proprio A. Se $\beta \in A$ indicheremo con βG la corrispondente immagine endomorfa di G. Sia $\alpha \in A$, $\alpha \neq 0$. Posto $\alpha = \lambda^m \varepsilon$ con m intero non negativo ed ε unitario in A, abbiamo $\alpha G = \lambda^m \varepsilon G = \lambda^m G$, poichè ε è un automorfismo di G. Pertanto le immagini endomorfe di G sono il sottogruppo nullo ed i sottogruppi del tipo $\lambda^m G$. Proviamo ora che i sottogruppi $\lambda^m G$ sono pienamente invarianti. Sia $\beta \in A$, $\beta \neq 0$. Sarà $\beta = \lambda^n \varepsilon_1$ con n intero non negativo ed ε_1 unitario in A. Abbiamo $\beta \lambda^m G = \lambda^n \varepsilon_1 \lambda^m G$. Poichè $A\lambda = \lambda A$, risulta $\varepsilon_1 \lambda^m = \lambda^m \eta$ dove η è un conveniente elemento di A. Perciò:

$$\beta \lambda^m G = \lambda^n \lambda^m \eta G \subseteq \lambda^n \lambda^m G = \lambda^m \lambda^n G \subseteq \lambda^m G .$$

L'endomorfismo nullo è permutabile con ogni altro ed il sottogruppo nullo è pienamente invariante. È così provato il seguente

TEOREMA. *Esiste un gruppo abeliano, numerabile ridotto e libero da torsione, ogni immagine endomorfa del quale è pienamente invariante ed il cui anello degli endomorfismi non è commutativo.*

Si potrebbe inoltre dimostrare che ogni endomorfismo non nullo di G è iniettivo.

BIBLIOGRAFIA

[1] CORNER A.L.S.: *Every countable reduced torsion-free ring is an endomorphism ring.* Proc. London Math. Soc. (3) 13 (1963). 687-710.

[2] DUBREIL P.: *Algèbre.* Gauthier-Villars. Paris. 1954.

[3] FUCHS. L.: *Abelian Groups.* Pergamon Press. 1960.

[4] REDEI L.: *Algebra.* Akademische Verlagsgesellschaft. Leipzig. 1959.

[5] SZELE T., SZENDREI J.: *On abelian groups with commutative endophism ring.* Acta Math. Acad. Sci. Hung. 2 (1951). 309-324.