ADALBERTO ORSATTI

Equivalenze regolari a destra dentro un ipergruppo. Sottoipergruppi f-reversibili

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 33 (1963), p. 278-284

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1963__33__278_0>

EQUIVALENZE REGOLARI A DESTRA DENTRO UN IPERGRUPPO. SOTTOIPERGRUPPI F-REVERSIBILI

Nota *) *di* ADALBERTO ORSATTI (*a Padova*) **)

Come è noto [2], condizione necessaria e sufficiente affinchè una equivalenza definita in un gruppo G sia regolare a destra (a sinistra) è che la partizione da essa indotta in G coincida con la decomposizione di G in classi laterali destre (sinistre) rispetto ad un sottogruppo S.

Questo lavoro è un tentativo di estendere quella definizione ad una equivalenza $\mathfrak{R}$ definita in un ipergruppo $\mathfrak{M}$ (dotato di una unità sinistra e' e di una unità destra e'') e di trovare una condizione analoga con riferimento a certi sottoipergruppi di $\mathfrak{M}$. Precisamente una equivalenza $\mathfrak{R}$ viene detta regolare a destra in $\mathfrak{M}$ se ogni congruenza modulo $\mathfrak{R}$ fra due elementi di $\mathfrak{M}$ permane, moltiplicandone a destra ambo i membri per un arbitrario elemento di $\mathfrak{M}$, in quanto congruenza di complessi. Si trova che condizione necessaria e sufficiente affinchè $\mathfrak{R}$ sia regolare a destra in $\mathfrak{M}$ è che la partizione da essa indotta coincida con la decomposizione in classi laterali destre rispetto ad un sottoipergruppo $\mathfrak{U}$ f-reversibile (reversibile in senso forte) a sinistra in $\mathfrak{M}$, cioè reversibile a sinistra [1] e tale che ogni complesso prodotto di un numero finito di elementi sia contenuto in una sola di quel-

---

*) Pervenuto in redazione il 18 gennaio 1963.

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

**) Lavoro fatto nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca del C. N. R.

le classi. Si prova che ogni sottoipergruppo f-reversibile a sinistra è anche f-reversibile a destra (e viceversa) e che perciò ad esso è associata anche una equivalenza regolare a sinistra; condizione necessaria e sufficiente affinchè un sottoipergruppo di $\mathfrak{M}$ sia f-reversibile in $\mathfrak{M}$ è che contenga il più piccolo sottoipergruppo f-normale (normale in senso forte, [1]) di $\mathfrak{M}$. Si noti che, pertanto, la sufficienza della condizione che caratterizza le equivalenze regolari a destra in $\mathfrak{M}$ risulta banale.

1. - Sia $\mathfrak{M}$ un ipergruppo dotato, almeno, di una unità sinistra e' e di una unità destra e''. Per ogni $a \in \mathfrak{M}$ chiameremo inverso sinistro a', o inverso destro a'', ogni elemento soddisfacente alla relazione $a'a \ni e'$ o alla $aa'' \ni e''$. Sia poi $\mathfrak{R}$ una relazione di equivalenza definita in $\mathfrak{M}$ ed ivi regolare a destra, tale cioè che

$$a \equiv b(\mathfrak{R}) \Rightarrow ax \equiv bx(\mathfrak{R}) \quad \text{per ogni} \quad x \in \mathfrak{M} ,$$

dove la equivalenza dei complessi a secondo membro indica che ogni elemento dell'uno è in relazione $\mathfrak{R}$ con ogni elemento dell'altro.

Segue che ogni complesso prodotto di due elementi è indivisibile (cioè è contenuto in una sola classe, [2]) modulo $\mathfrak{R}$. Nel seguito se X è un complesso di $\mathfrak{M}$ indicheremo con $\overline{X}$ la sua saturazione modulo $\mathfrak{R}$ (cioè la riunione minimale di classi di $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{M}$ che lo contiene, [2]). Dimostriamo ora che:

P. 1.: *Se A è un complesso indivisibile modulo $\mathfrak{R}$ tale è anche il complesso Am, dove m è un elemento qualunque di $\mathfrak{M}$.*

Si ha infatti:

$$Am = \bigcup_{a \in A} \{am\} \subseteq \bigcup_{a \in A} \{\overline{am}\} = \overline{Am} .$$

Siano x ed y elementi di A; abbiamo:

$$x \equiv y(\mathfrak{R}) \Rightarrow xm \equiv ym(\mathfrak{R}) \Rightarrow \overline{xm} = \overline{ym} .$$

Il complesso $\overline{Am}$ è dunque costituito da una sola classe di $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{M}$. Per induzione si dimostra quindi la seguente:

P. 2.: *Ogni complesso prodotto di un numero finito di elementi è indivisibile modulo $\mathfrak{R}$.*

L'esistenza di una unità a destra permette poi di affermare che:

P. 3.: *Se l'equivalenza* $\mathfrak{R}$ *è regolare a destra essa è semplificabile a destra*, cioè:

$$am \equiv bm(\mathfrak{R}) \Rightarrow a \equiv b(\mathfrak{R}) .$$

Sia infatti m'' un inverso destro di m. Abbiamo, per la P. 2.,

$$am \equiv bm(\mathfrak{R}) \Rightarrow amm'' \equiv bmm''(\mathfrak{R}), \text{ mentre } a \in amm'' \text{ e } b \in bmm''.$$

Quindi $a \equiv b(\mathfrak{R})$.

Possiamo ora dimostrare la seguente:

P. 4.: *Se* A *è una classe modulo* $\mathfrak{R}$, *allora anche* Am *è una classe modulo* $\mathfrak{R}$, *qualunque sia* $m \in \mathfrak{M}$.

Si ha intanto che $Am \subseteq \overline{Am}$, e che $\overline{Am}$, in virtù della P. 1., è una classe modulo $\mathfrak{R}$. Viceversa se $x \in \overline{Am}$ sarà $x \equiv am(\mathfrak{R})$ con $a \in A$. Sia $y \in \mathfrak{M}$ tale che $x \in ym$. Si ha $am \equiv ym(\mathfrak{R})$, e quindi, per la P. 3., $a \equiv y(\mathfrak{R})$. Segue che $y \in A$, perciò $x \in Am$.

2. - Dalla proposizione precedente si deduce che se A e B sono due classi modulo $\mathfrak{R}$ (rappresentate rispettivamente dagli elementi a, b di $\mathfrak{M}$) il loro prodotto è una riunione di tali classi. Pertanto, [3], l'insieme quoziente $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{M}/\mathfrak{R}$ è un ipergruppo. La corrispondenza $\omega : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}^*$ che ad ogni elemento a di $\mathfrak{M}$ associa la classe A che lo contiene, pensata come elemento dell'ipergruppo $\mathfrak{M}^*$, è un omomorfismo di $\mathfrak{M}$ su $\mathfrak{M}^*$, poichè, ovviamente:

$$c \in ab \Rightarrow \bar{c} = \overline{ab} \subseteq \bar{a}\bar{b} \; ; \qquad \text{da cui} \qquad C \in A \cdot B .$$

Consideriamo la classe $\mathfrak{U}$ formata da tutti gli elementi di $\mathfrak{M}$ equivalenti in $\mathfrak{R}$ alla unità sinistra e', e sia A una arbitraria classe modulo $\mathfrak{R}$. Risulta allora $\mathfrak{U}A = A$. Infatti $\mathfrak{U}A = \bigcup_{a \in A} \{\mathfrak{U}a\}$ e se x ed $y \in A$, segue, per la P. 4., $\mathfrak{U}x = \mathfrak{U}y = A$. In quanto elemento di $\mathfrak{M}^*$, $\mathfrak{U}$ è una unità sinistra scalare a sinistra. Pertanto ([1], teorema 12, pag. 720) $\mathfrak{U}$ è un sottoipergruppo destro di $\mathfrak{M}$ chiuso a destra. Inoltre:

(1) $$A = \mathfrak{U}A \Rightarrow y \in px$$

dove x ed y sono elementi arbitrari di A e p è un elemento opportuno di $\mathfrak{U}$. Infatti:

$$x \in A = \mathfrak{U}A = \mathfrak{U}y \Rightarrow \exists\, p \in \mathfrak{U}: \quad x \in py .$$

A norma del teorema 13, pag. 721, della memoria [1] di Dresher-Ore, abbiamo allora che $\mathfrak{U}$ è un sottoipergruppo reversibile a sinistra di $\mathfrak{M}$ e che le classi modulo $\mathfrak{R}$ coincidono con le classi laterali destre, cioè con i complessi del tipo $\mathfrak{U}m$ $(m \in \mathfrak{M})$ di $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{M}$.

Osservazione. Il citato teorema di Dresher-Ore è enunciato nel caso di un omomorfismo φ: $\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}^*$ forte a sinistra, questo significando che se $c^* \in a^*b^*$ $(a^*, b^*, c^* \in \mathfrak{M}^*)$, scelti ad arbitrio due elementi c_0 e b_0 di $\mathfrak{M}$ tali che $\varphi(c_0) = c^*$ e $\varphi(b_0) = b^*$, esiste almeno un elemento $a \in \mathfrak{M}$ tale che $\varphi(a) = a^*$ e $c_0 \in ab_0$. Tuttavia la dimostrazione degli Autori sfrutta questa circostanza solo nel caso che a^* sia una unità sinistra scalare a sinistra di $\mathfrak{M}^*$. Nel nostro caso il teorema dunque sussiste in virtù della (1); mentre se l'omomorfismo ω fosse forte a sinistra $\mathfrak{M}^*$ sarebbe un gruppo; infatti se $C \subseteq AB$ si avrebbe, tenuto conto anche della P. 4., $C = Ay$, con y elemento arbitrario di B. Il nostro $\mathfrak{M}^*$ invece, come apparirà chiaramente in seguito, non è necessariamente un gruppo.

3. - Data dunque la equivalenza $\mathfrak{R}$ regolare a destra in $\mathfrak{M}$, ad essa è associato il sottoipergruppo $\mathfrak{U}$ di $\mathfrak{M}$ reversibile a sinistra e tale che ogni complesso somma di un numero finito di elementi sia contenuto in una sola classe laterale destra di $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{M}$. Queste due proprietà di $\mathfrak{U}$ possono riassumersi così:

$$a \in \mathfrak{U}bc \Rightarrow bc \in \mathfrak{U}a \qquad (a,\ b,\ c \in \mathfrak{M})$$

Diremo che $\mathfrak{U}$ è f-reversibile (reversibile in senso forte) a sinistra in $\mathfrak{M}$. Possiamo quindi enunciare il seguente:

T. 1.: *Ad ogni equivalenza $\mathfrak{R}$ regolare a destra in $\mathfrak{M}$, è associato un sottoipergruppo $\mathfrak{U}$ f-reversibile a sinistra in $\mathfrak{M}$ tale che*:

$$(\mathfrak{M}/\mathfrak{U})_d = \mathfrak{M}/\mathfrak{R}$$

dove $(\mathfrak{M}/\mathfrak{U})_d$ indica l'ipergruppo delle classi laterali destre di $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{M}$.

Viceversa se $\mathfrak{U}$ è un sottoipergruppo f-reversibile a sinistra la relazione $\mathfrak{R}$ così definita in $\mathfrak{M}$

$$a\mathfrak{R}b \rightleftarrows \mathfrak{U}a = \mathfrak{U}b$$

è una equivalenza che risulta regolare a destra. Quindi il teorema precedente si inverte:

T. 2.: *Ad ogni sottoipergruppo $\mathfrak{U}$ f-reversibile a sinistra di $\mathfrak{M}$ corrisponde una equivalenza $\mathfrak{R}$ regolare a destra in $\mathfrak{M}$ tale che*

$$\mathfrak{M}/\mathfrak{R} = (\mathfrak{M}/\mathfrak{U})_d$$

Si ha, analogamente, la definizione di equivalenza regolare a sinistra con la nozione di sottoipergruppo f-reversibile a destra e, con proposizioni analoghe al T. 1. e al T. 2., una corrispondenza biunivoca tra quelle equivalenze e questi sottoipergruppi.

4. - I sottoipergruppi f-reversibili a sinistra di $\mathfrak{M}$ possono anche caratterizzarsi nel modo seguente. Consideriamo la riunione in $\mathfrak{M}$ di tutti i complessi prodotto di un numero finito di elementi i quali contengono, nel senso della teoria degli insiemi, l'unità sinistra e' o l'unità destra e''. Ovviamente ogni complesso di questo tipo è contenuto in un complesso prodotto di un numero finito di elementi che contenga sia e' che e''. Chiamiamo $\mathfrak{N}$ detta riunione. Orbene, $\mathfrak{N}$ è un sottoipergruppo di $\mathfrak{M}$. Intanto $\mathfrak{N}$, e la cosa è evidente, è moltiplicativamente chiuso. Inoltre

$$a \in \mathfrak{N} \Rightarrow a'' \;,\; a' \in \mathfrak{N}$$

con a'' ed a' inversi (rispettivamente destro e sinistro) di a.

Infatti se $a \in \mathfrak{N}$ esiste un complesso prodotto di un numero finito di elementi, chiamiamolo P, che contiene a, e' ed e''. Si ha allora:

$$\left.\begin{array}{l} e' \in P \;\Rightarrow\; a'' \in Pa'' \\ a \in P \;\Rightarrow\; aa'' \subseteq Pa'' \;\Rightarrow\; e'' \in Pa'' \end{array}\right\} \Rightarrow a'' \in \mathfrak{N}$$

Analogamente si ragiona per a'.

Dimostriamo ora che $\mathfrak{N}$ è un sottoipergruppo f-normale di $\mathfrak{M}$. Basta provare, [1], che per ogni $m \in \mathfrak{M}$ esiste almeno un inverso sinistro m' ed almeno un inverso destro m'' tali che:

$$m\mathfrak{N}m' \subseteq \mathfrak{N} \qquad \& \qquad m''\mathfrak{N}m \subseteq \mathfrak{N}$$

Sia infatti m' un inverso sinistro di m e sia $x \in m\mathfrak{N}m'$.

Esiste allora un complesso Q prodotto di un numero finito di elementi e contenente e' ed e'' tale che $x \in mQm'$.

Si ha:

$$x \in mQm' \subseteq mQm'e'' \subseteq mQm'mm'' \supseteq mQe'm'' \supseteq mQm'' \ni e'' .$$

Quindi $x \in \mathfrak{N}$. In modo analogo si dimostra la seconda inclusione. È poi chiaro che $\mathfrak{N}$ è il più piccolo sottoipergruppo di $\mathfrak{M}$ f-normale in $\mathfrak{M}$. Ciò premesso possiamo dimostrare che:

P. 5.: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un sottoipergruppo* $\mathfrak{U}$ *di* $\mathfrak{M}$ *sia f-reversibile a sinistra è che* $\mathfrak{U}$ *contenga* $\mathfrak{N}$.

La condizione è manifestamente necessaria. Quanto alla sufficienza basta pensare che $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ è un gruppo che risulta, in modo naturale, immagine omomorfa di $\mathfrak{M}$.

La stessa proprietà caratterizza, evidentemente, i sottoipergruppi f-reversibili a destra e perciò:

P. 6.: *Un sottoipergruppo f-reversibile a sinistra è anche f-reversibile a destra e viceversa.*

5. - Le due equivalenze $\mathfrak{R}''$ e $\mathfrak{R}'$ regolari, rispettivamente a destra e a sinistra, associate allo stesso sottoipergruppo f-reversibile $\mathfrak{U}$ coincidono se e solo se $\mathfrak{U}$ è normale in $\mathfrak{M}$.

Diremo allora che $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}' = \mathfrak{R}''$ è regolare. In tal caso possono moltiplicarsi membro a membro le congruenze modulo $\mathfrak{R}$ e $\mathfrak{M}/\mathfrak{U}$ risulta un gruppo, come si verifica facilmente. Pertanto:

T. 3.: *Se* $\mathfrak{U}$ *è normale ed f-reversibile,* $\mathfrak{U}$ *è f-normale.*

I sottoipergruppi f-normali di $\mathfrak{M}$ sono in corrispondenza biunivoca con le equivalenze regolari in $\mathfrak{M}$.

Siano $\mathfrak{U}'$ e $\mathfrak{U}$ sottoipergruppi di $\mathfrak{M}$ tali che $\mathfrak{U}' \supseteq \mathfrak{U}$. Allora: $\mathfrak{U}$ è f-reversibile $\Rightarrow$ $\mathfrak{U}'$ è f-reversibile.

$\mathfrak{U}$ è f-reversibile e $\mathfrak{U}'$ è normale $\Rightarrow$ $\mathfrak{U}'$ è f-normale.

Possiamo enunciare la seguente proposizione:

P. 8.: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un ipergruppo $\mathfrak{M}$ del tipo considerato contenga un sottoipergruppo proprio f-normale, è che in $\mathfrak{M}$ esista una equivalenza regolare a destra (a sinistra) distinta dalla relazione universale.*

Infine è ovvio che il reticolo dei sottoipergruppi f-reversibili di $\mathfrak{M}$ è isomorfo al reticolo dei sottogruppi del gruppo $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] Dresher-Ore: *Theory of Multigroups*. American Journal of Mathematics. Vol. LX n. 3. Luglio 1938.

[2] Dubreil Paul: *Algebre*. Seconda Edizione. Gauthier & Villars. Parigi 1954.

[3] Krasner, Marc: *La loi de Jordan-Hölder dans le hypergroupes et le suites....* Duke Math. J. 6, 120-140. (1940).