RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

CLAUDIO MARGAGLIO

Una dimostrazione elementare della proprietà di estensione per il fascio degli anelli locali di uno spazio affine ed alcune applicazioni di tale proprietà

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 33 (1963), p. 173-185

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1963__33__173_0>

UNA DIMOSTRAZIONE ELEMENTARE DELLA PROPRIETÀ DI ESTENSIONE PER IL FASCIO DEGLI ANELLI LOCALI DI UNO SPAZIO AFFINE ED ALCUNE APPLICAZIONI DI TALE PROPRIETÀ

Nota *) *di* CLAUDIO MARGAGLIO (*a Padova*) **)

SOMMARIO

Nel n. 1 si dà una dimostrazione elementare della cosidetta « proprietà di estensione » ([1], pag. 53) per il fascio degli anelli locali $\mathscr{A}$ di uno spazio affine K^r. Nel n. 2 si dimostra che ad ogni fascio algebrico coerente e liscio si può associare in modo canonico un soprafascio (anch'esso algebrico coerente e liscio) soddisfacente alla proprietà di estensione; fra i corollari di questo teorema si ottiene che affinchè un fascio algebrico coerente e liscio $\mathscr{F}$ sopra lo spazio affine K^r sia isomorfo ad un suo sottofascio proprio $\mathscr{G}$ è necessario che si abbia $Dim\ (Supp\ (\mathscr{F}/\mathscr{G})) = r - 1$. Nel n. 3 sono messe in evidenza alcune proprietà relative agli endomorfismi di fasci di ideali e nel n. 4 si dà una caratterizzazione dell'isomorfismo fra due fasci di ideali (di tipo finito) usando poi tale caratterizzazione per dimostrare che due sottofasci di tipo finito $\mathscr{I}$, $\mathscr{J}$ di $\mathscr{A}$ che danno luogo a quozienti $\mathscr{A}/\mathscr{I}$, $\mathscr{A}/\mathscr{J}$ isomorfi sono isomorfi.

1. - Sia K un corpo commutativo e algebricamente chiuso, qualsiasi. Sia r un intero positivo e K^r lo spazio affine r-dimensio-

---

*) Pervenuta in redazione il 21 settembre 1962.

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R.

nale (dotato della topologia di Zariski) sopra K. Si considereranno (salvo contrario avviso) solo fasci algebrici coerenti sopra K^r.

Se Q è un polinomio, si indicherà con $V(Q)$ il chiuso degli zeri di Q e con $D(Q)$ la porzione aperta complementare di $V(Q)$.

LEMMA: *Se, dati n polinomi $Q_1, \ldots, Q_n$, si ha $Dim\,(V(Q_1) \cap \ldots \cap V(Q_n)) < (r-1)$ allora la chiusura della porzione $F = V(Q_1) \cap (D(Q_2) \cup \ldots \cup D(Q_n))$ è $V(Q_1)$.*

Dimostrazione.

Se W è una porzione aperta di $V(Q_1)$, disgiunta da F, si ha: $W \subseteq V(Q_1) - F = V(Q_1) \cap \ldots \cap V(Q_n) = G$ e la porzione chiusa G contiene la chiusura di W. Quindi se fosse $W \neq \varnothing$ G conterrebbe anche almeno una componente irriducibile T di $V(Q_1)$ e si avrebbe: $Dim\,(T) = r - 1 \leqslant Dim\,(G) < (r-1)$ il che è assurdo. Dunque ogni porzione aperta e non vuota di $V(Q_1)$ interseca F e quindi la chiusura di F è $V(Q_1)$.

TEOREMA 1 (*): *Sia f una sezione del fascio $\mathscr{A}$ degli anelli locali di K^r, $(r > 1)$, definita sopra un aperto U di K^r tale che si abbia $Dim\,(K^r - U) < (r-1)$. La sezione f è allora restrizione di una sezione globale di $\mathscr{A}$. (Cioè, indicato con $\Gamma(V, \mathscr{A})$ l'anello delle sezioni di $\mathscr{A}$ sopra la porzione V di K^r, l'applicazione naturale $\Gamma(K^r, \mathscr{A}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathscr{A})$, ottenuta associando ad ogni sezione globale la sua restrizione ad U, è per gli aperti del tipo detto non solo iniettiva ma anche suriettiva).*

Dimostrazione.

Gli aperti del tipo $D(Q)$ costituiscono una base per la topologia (di Zariski) di K^r. K^r è uno spazio noetheriano e quindi ogni suo sottospazio è pure noetheriano e di conseguenza quasi-compatto. Pertanto ogni aperto di K^r si può ottenere come riunione di un numero finito di aperti $D(Q)$ e si può porre:

$$U = D(Q_1) \cup \ldots \cup D(Q_n)\ .$$

Si può inoltre supporre che nessuno dei polinomi Q_i, $(i = 1, \ldots, n)$, sia costante e che inoltre se un polinomio non costante Q è fattore di un polinomio Q_i allora Q^2 non divida Q_i.

(*) Questo teorema, di cui si dà qui una dimostrazione elementare è un caso particolare del cosidetto « teorema di estensione » ([1]).

La f ammette sui vari $D(Q_i)$ rappresentazioni del tipo $P_i/Q_i^{n_i}$; infatti è noto ([2], pag. 235) che se Q è un polinomio ed f è una sezione del fascio $\mathscr{A}$ degli anelli locali di K^r definita sopra $D(Q)$ allora esiste una frazione del tipo P/Q^n, essendo anche P un polinomio ed essendo n un intero non negativo, tale che la sezione f sia rappresentata in tutto $D(Q)$ dalla frazione P/Q^n. Supposto che non esistano in alcun $D(Q_i)$ rappresentazioni di f del tipo detto, $P_i/Q_i^{m_i}$, con $m_i < n_i$, segue per ogni i necessariamente $n_i = 0$. Se ad esempio fosse $n_1 > 0$, si consideri la porzione $F = V(Q_1) \cap (D(Q_2) \cup \ldots \cup D(Q_n))$; in base al lemma precedente (e tenuto conto che dalle ipotesi fatte segue che $Dim\,(V(Q_1) \cap \ldots \cap V(Q_n)) < (r-1)$), la chiusura di F è $V(Q_1)$. Si ha: $x \in F \Rightarrow Q_1(x) = 0$ e per un certo $i \neq 1$, $Q_i(x) \neq 0$ e quindi $P_1(x)Q_i^{n_i}(x) = 0$ e pertanto $P_1(x) = 0$. Il polinomio P_1 è dunque nullo in tutta la porzione F e quindi anche nella chiusura $V(Q_1)$ di F (poichè K dotato della topologia di Zariski è uno spazio topologico nel quale ogni sottospazio puntiforme è chiuso). Per un certo intero positivo m si ha allora $P_1^m = BQ_1$, B essendo un polinomio. Sia Q un fattore irriducibile di Q_1; Q divide P_1^m e pertanto anche P_1 e ne segue, per l'ipotesi fatta sui polinomi Q_i, che anche Q_1 divide P_1 ovvero esiste un polinomio B_1 tale che $P_1 = B_1Q_1$ e anche $P_1/Q_1^{n_1} = B_1/Q_1^{(n_1-1)}$.

2. - Seguendo la terminologia introdotta in [1], un fascio algebrico coerente si dirà « *liscio* » se il suo sottofascio di torsione è banale, un chiuso V di K^r verrà chiamato « *ammissibile* » se $Cdm\,(V) > 1$ (cioè se $Dim\,(V) < (r-1)$), un aperto U di K^r si dirà « *ammissibile* » se il suo chiuso complementare è ammissibile, una sezione di un fascio si dirà « *ammissibile* » se è definita sopra un aperto ammissibile ed infine un sottofascio $\mathscr{F}$ di un fascio $\mathscr{G}$ si dirà « *ammissibile* » se al più sopra un chiuso ammissibile esso risulta sottofascio proprio (cioè se si ha $\mathscr{F}_x = \mathscr{G}_x$ per ogni x di un certo aperto ammissibile). Si dirà che un fascio algebrico coerente e liscio $\mathscr{F}$ « *soddisfa alla proprietà di estensione* » e si scriverà $\mathscr{F} \in P.E.$, se in $\mathscr{F}$ ogni sezione ammissibile si ottiene per restrizione da una sezione globale. Pertanto il teorema 1 si può enunciare ([1]): « $\mathscr{A} \in P.E.$ ».

Si osservi ancora ([1]) che $\mathscr{A} \in P.E.$ implica $\mathscr{A}^p \in P.E.$ e, per ogni fascio $\mathscr{F}$ localmente libero si ha pure $\mathscr{F} \in P.E.$; infine $\mathscr{F}, \mathscr{G} \in P.E.$ implica $\mathscr{H}om\,(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \in P.E.$

(Quest'ultimo fatto si può verificare ad esempio facendo uso di una iniezione $\mathscr{G} \xrightarrow{j} \mathscr{A}^p$ e ricordando ([1]) che $\mathscr{F} \in P.E.$ implica $\mathscr{H}om\,(\mathscr{F}, \mathscr{A}^p) \in P.E.$; se U è aperto ammissibile di K^r, un omomorfismo $\mathscr{F} \mid U \longrightarrow \mathscr{G} \mid U$ si identifica canonicamente con una sezione ammissibile $r \in \Gamma(U, \mathscr{H}om\,(\mathscr{F}, \mathscr{G}))$ ed induce (per composizione con j) una sezione ammissibile di $\mathscr{H}om\,(\mathscr{F}, \mathscr{A}^p)$ e quindi una (ben determinata, essendo $\mathscr{H}om\,(\mathscr{F}, \mathscr{A}^p)$ liscio) sezione globale $s \in \Gamma(K^r, \mathscr{H}om\,(\mathscr{F}, \mathscr{A}^p))$.

Poichè $\mathscr{G} \in P.E.$ ed s è una iniezione, risulta $s(\mathscr{F}) \subseteq j(\mathscr{G})$ e quindi r è restrizione di $j^{-1} \cdot s$).

TEOREMA 2: *Per ogni sottofascio di tipo finito $\mathscr{F}$ di $\mathscr{A}^p$ esiste un sottofascio di tipo finito $\overline{\mathscr{F}}$ di $\mathscr{A}^p$ soddisfacente alla P.E. e tale che $\mathscr{F}$ sia suo sottofascio ammissibile.*

COROLLARIO 2.1: *Ogni fascio algebrico coerente e liscio $\mathscr{F}$ su K^r determina (a meno di isomorfismi) un fascio algebrico coerente e liscio $\overline{\mathscr{F}} \in P.E.$ ed una iniezione $\mathscr{F} \xrightarrow{j} \overline{\mathscr{F}}$ tali che ogni omomorfismo $\mathscr{F} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{G}$ di $\mathscr{F}$ in un fascio algebrico coerente e liscio $\mathscr{G} \in P.E.$ si fattorizzi in uno ed un sol modo con l'iniezione j: $\mathscr{F} \longrightarrow \overline{\mathscr{F}}$.*

COROLLARIO 2.2: *Dato un fascio algebrico coerente $\mathscr{T}$ su K^r, il suo sottofascio $\mathscr{T}'$, generato da tutti quei germi di $\mathscr{T}$ che appartengono a qualche sezione nulla fuori da un chiuso di $Cdm > 1$, risulta esso pure coerente.*

COROLLARIO 2.3: *Un fascio algebrico coerente e liscio $\mathscr{F}$ non può essere isomorfo ad un suo sottofascio proprio ed ammissibile.*

Dimostrazione del teorema 2.

Sia dato $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{A}^p$ e sia $j: \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{A}^p$ l'inclusione di $\mathscr{F}$ in $\mathscr{A}^p$; sia V il chiuso di K^r ove la fibra $\mathscr{F}_x$ non è libera (È noto, ([1] teor. 1), che $Cdm\,(V) > 1$). Si ricopra l'aperto $K^r - V$ con un numero finito di aperti affini $D(Q_1), \ldots, D(Q_n)$, (essendo $Q_1, \ldots, Q_n$ polinomi non nulli), tali che su ciascuno di essi $\mathscr{F}$ risulti libero. Sopra l'aperto $D(Q_s)$, $(s = 1, \ldots, n)$ si ha dunque un isomorfismo $\mathscr{F} \mid D(Q_s) \xrightarrow{\alpha'_s} \mathscr{A}^p \mid D(Q_s)$; poichè α'_s si identifica canonicamente con un elemento di $\Gamma(D(Q_s), \mathscr{H}om\,(\mathscr{F}, \mathscr{A}^p))$ se ne ottiene ([2], pag. 235) un omomorfismo $\mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{A}^p$ definito con $\alpha_s = Q_s^n \cdot \alpha'_s$, essendo $n = n(s)$ un opportuno intero non negativo. Tale omomorfismo è iniettivo, come segue dal fatto che α'_s è iniettivo, che Q_s non è il polinomio nullo ed i fasci considerati sono lisci, la sua restrizione a $D(Q_s)$ è suriettiva poichè α'_s è suriettivo e per ogni $x \in D(Q_s)$ esiste il germe $(1/Q_s)_x$. Si ha pertanto il seguente diagramma esatto:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{F} \arrow[r, "\alpha_s"] \arrow[d, dashed, "i"'] & \mathscr{A}^p \\
0 \arrow[r] & \mathscr{F} \arrow[r, "j"] & \mathscr{A}^p
\end{tikzcd} \quad (i = \text{identità in } \mathscr{F}).$$

Sopra l'aperto $D(Q_s)$ resta definita una iniezione

$$\mathscr{A}^p \mid D(Q_s) \xrightarrow{\gamma'_s} \mathscr{A}^p \mid D(Q_s)$$

con $\gamma'_s = j \cdot i \cdot \alpha_s^{-1}$ e quindi per un opportuno intero non negativo $m = m(s)$ se ne ricava una iniezione $\gamma_s : \mathscr{A}^p \longrightarrow \mathscr{A}^p$ definita con $\gamma_s = Q_s^m \cdot \gamma'_s$ e si ha $j(\mathscr{F}) \mid D(Q_s) = \gamma'_s(\mathscr{A}^p \mid D(Q_s))$.

Siano $m_1, \dots, m_n$ gli interi m che compaiono nelle formule $\gamma_s = Q_s^m \cdot \gamma'_s$. Si ha allora in corrispondenza ad ogni s ($= 1, \dots, n$) un diagramma commutativo ed esatto:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathscr{F} \arrow[r, "\alpha_s"] \arrow[d, "i"'] & \mathscr{A}^p \arrow[d, "\psi_s"] \\
0 \arrow[r] & \mathscr{F} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & \mathscr{A}^p \\
 & 0 &
\end{tikzcd}$$

essendo: $Q = Q_1^{m_1} \dots Q_n^{m_n}$; $\varphi = Q \cdot j$; $\psi_s = Q \cdot \gamma'_s$.

I sottofasci $\psi_s(\mathscr{A}^p)$ di $\mathscr{A}^p$ sono isomorfi ad $\mathscr{A}^p$ e la loro intersezione $\mathscr{G}$ soddisfa alla $P.E.$ Infatti: se U è aperto ammissibile di K^r e se $\sigma \in \Gamma(U, \mathscr{G})$ allora vi sono sezioni globali $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ rispettivamente in $\psi_1(\mathscr{A}^p), \ldots, \psi_n(\mathscr{A}^p)$ che ristrette ad U coincidono con σ e poichè il fascio $\mathscr{A}^p$ di cui i fasci $\psi_s(\mathscr{A}^p)$ sono sottofasci è liscio si ha $\sigma_1 = \ldots = \sigma_n \in \Gamma(K^r, \mathscr{G})$.

Il fascio $\mathscr{G}$, in quanto intersezione di un numero finito di sottofasci coerenti di $\mathscr{A}^p$ è coerente. Si osservi pure che si ha

$$\varphi(\mathscr{F}) \mid D(Q_s) = \psi_s(\mathscr{A}^p) \mid D(Q_s) \qquad \text{e} \qquad \psi_s(\mathscr{A}^p) \supseteq \varphi(\mathscr{F})$$

(poichè $\varphi = \psi_s \cdot \alpha_s$).

Le fibre dei fasci $\varphi(\mathscr{F})$, $\mathscr{G}$ coincidono dunque sopra la riunione degli aperti $D(Q_s)$ e poichè $Cdm\ (V) > 1$ segue che $\varphi(\mathscr{F})$ è sottofascio ammissibile di $\mathscr{G}$. L'iniezione $\mathscr{G} \mid U \longrightarrow \mathscr{A}^p \mid U$, definita sopra l'aperto ammissibile $U = K^r - V$ con $j \cdot \varphi^{-1}$, si estende, poichè $\mathscr{H}om\ (\mathscr{G}, \mathscr{A}^p) \in P.E.$, ad una iniezione $\mathscr{G} \xrightarrow{\omega} \mathscr{A}^p$ definita su tutto K^r ed è di immediata verifica che il fascio $\omega(\mathscr{G})$ è il fascio $\overline{\mathscr{F}}$ cercato.

Dimostrazione dei corollari del teorema 2.

(Corollario 2.1)

Se $\mathscr{G}$ è fascio algebrico coerente e liscio $\in P.E.$, dato $\mathscr{F} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{G}$, resta determinata una sezione ammissibile di $\mathscr{H}om\ (\overline{\mathscr{F}}, \mathscr{G})$ e quindi una (ed una sola, poichè $\mathscr{H}om\ (\overline{\mathscr{F}}, \mathscr{G})$ è liscio) sua sezione globale. Dunque ogni omomorfismo $\mathscr{F} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{G}$ si fattorizza in uno ed un sol modo con l'inclusione $\mathscr{F} \xrightarrow{j} \overline{\mathscr{F}}$. Se ciò avviene anche per un'altra coppia $\{\mathscr{F}', \varrho : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F}'\}$ si può costruire un diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F} \arrow[r, "\varrho"] \arrow[d, dashed, "i"'] & \mathscr{F}' \arrow[d, dashed, "\alpha"] \\
\mathscr{F} \arrow[r, "j"] & \overline{\overline{\mathscr{F}}}
\end{tikzcd}$$

essendo i l'identità in $\mathscr{F}$ ed α un isomorfismo.

(Corollario 2.2.)

Sia $\mathscr{T}$ un fascio algebrico coerente su K^r e si consideri ([2], pag. 238, Cor. 1) una sequenza esatta

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{A}^p \xrightarrow{\psi} \mathscr{T} \longrightarrow 0$$

(con $\mathscr{F} = \mathscr{N}c(\psi)$. Si consideri il sottofascio $\overline{\mathscr{F}}$ di $\mathscr{A}^p$; indicato con $\mathscr{T}^*$ il quoziente $\overline{\mathscr{F}}/\mathscr{F}$ si ottiene il diagramma commutativo ed esatto:

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \mathscr{N}c(p) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathscr{F} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & \mathscr{A}^p \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & \mathscr{T} \arrow[r] \arrow[d, "p"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \overline{\mathscr{F}} \arrow[r, "\overline{\varphi}"] \arrow[d] & \mathscr{A}^p \arrow[r, "\overline{\psi}"] \arrow[d] & (\mathscr{A}^p/\overline{\mathscr{F}}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \mathscr{T}^* \arrow[d] & 0 & 0 & \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

(φ, $\overline{\varphi}$ inclusioni) e si verifica che $\mathscr{N}c(p)$ è isomorfo a $\mathscr{T}^*$.

Sia t_x un germe di $\mathscr{T}$ e sia $p(t_x) = g_x \neq 0$: allora esiste una sezione σ di $\mathscr{A}^p$, sopra un intorno U di x tale che $\overline{\psi}(\sigma_x) = g_x$. $\sigma_x \notin \overline{\mathscr{F}}$. Ne segue, poichè $\overline{\mathscr{F}} \in P.E.$, che vi è tutto un chiuso V con $Cdm\,(V) = 1$ tale che $x \in V$ e $[y \in V \cap U] \Rightarrow [\overline{\mathscr{F}} \not\ni \sigma_y] \Rightarrow [\overline{\psi}(\sigma_y) \neq 0]$. Pertanto se t_x è un germe di $\mathscr{T}$ appartenente a qualche sezione nulla fuori da un chiuso di $Cdm > 1$ si ha $p(t_x) = 0$. Viceversa sia $p(t_x) = 0$ e sia σ una sezione di $\mathscr{A}^p$ sopra un intorno U di x tale che $\psi(\sigma_x) = t_x$. Si ha allora $\sigma_x \in \overline{\mathscr{F}}$ e si può supporre di avere scelto U in guisa che per ogni $y \in U$ sia ancora $\sigma_y \in \overline{\mathscr{F}}$. Allora $\psi(\sigma)$ è una sezione (sopra U) di $\mathscr{T}$ passante per t_x e nulla fuori da un chiuso di $Cdm > 1$. Dunque il fascio $\mathscr{N}c(p)$ è proprio il fascio $\mathscr{T}'$, sottofascio di $\mathscr{T}$ generato dai germi appartenenti a qualche sezione di $\mathscr{T}$ nulla fuori da un chiuso di $Cdm > 1$ e quindi $\mathscr{T}'$, risultando isomorfo al quoziente $\overline{\mathscr{F}}/\mathscr{F}$ di due fasci coerenti è esso pure coerente.

(Corollario 2.3)

Sia $\mathscr{G}$ sottofascio ammissibile del fascio algebrico coerente e liscio $\mathscr{F}$ su K^r e sia $\alpha : \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{F}$ un isomorfismo di $\mathscr{G}$ su $\mathscr{F}$. Sia $\overline{\mathscr{F}}$ il soprafascio di $\mathscr{F}$ ottenuto iniettando $\mathscr{F}$ in un fascio $\mathscr{A}^p$ ed applicando il teor. 2. Siano $\mathscr{G} \xrightarrow{\varphi} \overline{\mathscr{F}}$, $\mathscr{F} \xrightarrow{\psi} \overline{\mathscr{F}}$ le inclusioni. α determina una sezione ammissibile di $\mathscr{H}om\,(\overline{\mathscr{F}}, \overline{\mathscr{F}})$ e quindi un endomorfismo $\overline{\alpha}$ di $\overline{\mathscr{F}}$ che risulta un automorfismo. Si ha perciò il diagramma commutativo ed esatto:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d, dashed] & \\
0 \arrow[r, dashed] & \mathscr{G} \arrow[r, dashed, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathscr{F} \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed, "\psi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \overline{\mathscr{F}} \arrow[r, dashed, "\overline{\alpha}"] & \overline{\mathscr{F}} \arrow[r] & 0 .
\end{tikzcd}$$

Se $\mathscr{G}$ fosse sottofascio proprio di $\mathscr{F}$ si avrebbe $\varphi(\mathscr{G}) \subsetneqq \psi(\mathscr{F})$ e, posto $\mathscr{F}_1 = \varphi(\mathscr{G})$, $\mathscr{F}_2 = \overline{\alpha}(\mathscr{F}_1) = \psi(\mathscr{F}), \ldots, \mathscr{F}_n = \overline{\alpha}(\mathscr{F}_{n-1}), \ldots$ si otterrebbe una successione strettamente crescente di sottofasci coerenti di $\overline{\mathscr{F}}$ il che non è possibile giacchè l'anello $\Gamma(K^r, \mathscr{A})$ è noetheriano ed il fascio $\overline{\mathscr{F}}$ è sottofascio di $\mathscr{A}^p$.

Osservazione.

Dal corollario 2.2. discende in particolare il fatto che

$$Cdm\,(Supp\,(\mathscr{T}')) > 1\,,$$

cosa che si poteva dedurre direttamente dal fatto che il fascio $\mathscr{F}$

che compare nella sequenza $0 \longrightarrow \mathscr{F} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{A}^{\nu} \xrightarrow{\psi} \mathscr{T} \longrightarrow 0$ è localmente libero fuori da un chiuso di *Cdm* > 1.

Caso dei fasci algebrici coerenti e lisci di rango 1.

3. - Osservazioni preliminari.

(*a*) Ogni endomorfismo di $\mathscr{A}$ si ottiene tramite moltiplicazione per una sezione globale di $\mathscr{A}$ ed in particolare ogni automorfismo, tramite moltiplicazione per una sezione costante di $\mathscr{A}$.

Infatti: dato l'endomorfismo $\mathscr{A} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{A}$ si ha $\varphi(f) = f \cdot \varphi(1)$ e se inoltre esiste $\varphi^{-1} : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}$ si ha $\varphi^{-1}(1) \cdot \varphi(1) = 1$ e la $\varphi(1)$ è pertanto rappresentata da un polinomio privo di zeri e quindi costante.

(*b*) Se $\mathscr{I}$ è sottofascio ammissibile di $\mathscr{A}$ allora ogni endomorfismo di $\mathscr{A}$ induce un endomorfismo di $\mathscr{I}$ e viceversa; inoltre ogni automorfismo di $\mathscr{A}$ induce un automorfismo di $\mathscr{I}$ e viceversa.

Infatti: si ha $\mathscr{I} \cdot \varphi(1) = \varphi(\mathscr{I}) \subseteq \mathscr{I}$ e, viceversa, tenuto conto del teor. 1 e del fatto che $\mathscr{H}om\,(\mathscr{A}, \mathscr{A})$ soddisfa alla *P.E.*, ogni endomorfismo $\mathscr{I} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{I}$ determina una sezione ammissibile di $\mathscr{H}om\,(\mathscr{A}, \mathscr{A})$ e quindi una sua sezione globale. Che un automorfismo di $\mathscr{I}$ induca un automorfismo di $\mathscr{A}$ segue infine dal fatto che un endomorfismo di $\mathscr{A}$ è necessariamente suriettivo oppure propriamente iniettivo sopra un chiuso di *Cdm* $= 1$ (fatto quest'ultimo che nel nostro caso non può presentarsi essendo per ipotesi $\mathscr{I}$ sottofascio ammissibile di $\mathscr{A}$).

(*c*) Se $\mathscr{I}$, $\mathscr{J}$ sono sottofasci ammissibili di $\mathscr{A}$, fra loro isomorfi, allora un isomorfismo $\varphi : \mathscr{I} \longrightarrow \mathscr{J}$ induce un automorfismo di $\mathscr{A}$ e ne segue $\mathscr{I} = \mathscr{J}$.

Infatti: φ determina (come sopra) una sezione globale di $\mathscr{H}om\,(\mathscr{A}, \mathscr{A})$ e, poichè $\mathscr{J}$ è ammissibile, il corrispondente endomorfismo di $\mathscr{A}$ è, fuori da un chiuso di *Cdm* > 1, suriettivo. Ciò implica che $\varphi(1)$ sia sezione costante poichè il chiuso degli zeri di un polinomio ha *Cdm* $= 1$ oppure è vuoto. Ne segue $\mathscr{J} = \mathscr{I} \cdot \varphi(1) = \mathscr{I}$.

(*d*) Ogni fascio di ideali $\mathscr{I}$ su K^r è isomorfo ad un sottofascio ammissibile di $\mathscr{A}$ che, per quanto precede, è univocamente determinato e verrà indicato con $\mathscr{I}^*$.

Infatti: se $\mathscr{I}$ è fascio di ideali, sottofascio di $\mathscr{A}$ ed è sottofascio proprio sopra un chiuso di $Cdm = 1$ allora ogni germe di $\mathscr{I}$ è rappresentabile mediante una frazione di polinomi regolare irriducibile R/S nella quale il numeratore, essendo nullo sul chiuso di un certo polinomio fisso non costante, P, risulta divisibile per P. (Infatti il chiuso di $Cdm = 1$ contiene il chiuso degli zeri di qualche polinomio non costante, essendo in K^r ogni forma intersezione completa). Ne segue che tramite divisione per P si ottiene un isomorfismo di $\mathscr{I}$ su un sottofascio di $\mathscr{A}$ contenente propriamente $\mathscr{I}$. Poichè in $\mathscr{A}$ ogni catena strettamente crescente di sottofasci coerenti è finita, esiste un sottofascio $\mathscr{I}^*$ di $\mathscr{A}$ ammissibile ed isomorfo ad $\mathscr{I}$.

Con $\varphi^* : \mathscr{I} \longrightarrow \mathscr{A}$, si indicherà una delle iniezioni di $\mathscr{I}$ in $\mathscr{A}$ tali che $\varphi^*(\mathscr{I}) = \mathscr{I}^*$.

4. - Tenuto conto del teor. 2 si possono dividere i fasci algebrici coerenti e lisci su K^r in classi di equivalenza mettendo in una medesima classe due fasci $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ se e solo se sono isomorfi i fasci associati $\overline{\mathscr{F}}$, $\overline{\mathscr{G}}$. Con tale convenzione, quanto visto in (d) si può enunciare affermando che tutti i fasci di ideali su K^r distinti dal fascio banale appartengono ad una medesima classe di equivalenza.

Definizione: Si dirà che un fascio G ha « *torsione ammissibile* » se fra le sue sezioni globali ve n'è almeno una nulla sopra un aperto ammissibile ma non ovunque nulla.

Osservazione.

Siano $\mathscr{I}$, $\mathscr{J}$ fasci di ideali ed $\mathscr{I}$ non sia isomorfo ad $\mathscr{A}$. Ogni qualvolta per una sequenza esatta:

$$0 \longrightarrow \mathscr{I} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{J} \longrightarrow \mathscr{T} \longrightarrow 0$$

l'omomorfismo α si fattorizza con un omomorfismo $\varphi^* : \mathscr{I} \longrightarrow \mathscr{A}$ (cioè tale che $\varphi^*(\mathscr{I})$ sia sottofascio ammissibile di $\mathscr{A}$) il fascio $\mathscr{T}$ ha torsione ammissibile.

Infatti: considerato il diagramma commutativo ed esatto:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{I} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi^*"'] & \mathscr{J} \arrow[r] & \mathscr{T} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{A} \arrow[r, "\overline{\alpha}"] & \mathscr{J} \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

si vede che la sezione globale $\bar{\alpha}(1)$ di $\mathscr{J}$ ha per controimmagine tramite α una sezione ammissibile di $\mathscr{I}$ che però in $\mathscr{I}$ non si può estendere ad una sezione globale.

TEOREMA 3: *Condizione sufficiente affinchè sia $\mathscr{I}^* \supseteq \mathscr{J}^*$ è che esista una sequenza esatta $0 \longrightarrow \mathscr{I} \longrightarrow \mathscr{J} \longrightarrow \mathscr{T} \longrightarrow 0$ nella quale $\mathscr{T}$ non abbia torsione ammissibile.*

COROLLARIO 3.1: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè $\mathscr{I}$, $\mathscr{J}$ siano isomorfi è che esistano due sequenze esatte: $0 \longrightarrow \mathscr{I} \longrightarrow \mathscr{J} \longrightarrow \mathscr{T} \longrightarrow 0$, $0 \longrightarrow \mathscr{J} \longrightarrow \mathscr{I} \longrightarrow \mathscr{S} \longrightarrow 0$ tali che i fasci $\mathscr{T}$,, $\mathscr{S}$ risultino privi di torsione ammissibile.*

COROLLARIO 3.2: *Se due sottofasci ammissibili $\mathscr{I}$, $\mathscr{J}$, di $\mathscr{A}$ determinano quozienti $\mathscr{A}/\mathscr{I}$, $\mathscr{A}/\mathscr{J}$ isomorfi allora $\mathscr{I}$, $\mathscr{J}$ sono isomorfi. Pertanto i fasci $\mathscr{I}$ di ideali sono determinati entro la loro classe di equivalenza dal quoziente $\bar{\mathscr{I}}/\mathscr{I}$ (che è fascio avente supporto di $Cdm > 1$).*

Dimostrazione del teor. 3.

Si proverà che $\mathscr{I}^* \not\supseteq \mathscr{J}^*$ implica che in ogni sequenza esatta del tipo $0 \longrightarrow \mathscr{I} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{J} \longrightarrow \mathscr{T} \longrightarrow 0$, $\mathscr{T}$ abbia torsione ammissibile. Si ha: $\mathscr{I}^* \not\supseteq \mathscr{J}^*$ implica l'esistenza di un germe $a_x \in \mathscr{J}^*_x \dot{-} \mathscr{I}^*_x$ e questo germe appartiene ad una certa sezione a di $\mathscr{J}^*$ definita almeno sopra un certo intorno affine U di x, del tipo $D(Q)$, essendo Q un polinomio. È di conseguenza possibile ([2]) trovare un intero non negativo m tale che $Q^m a_x = b_x$ appartenga ad una sezione globale b di $\mathscr{J}^*$.

Inoltre, giacchè $Q(x) \neq 0$, tale sezione globale determina sopra x un germe b_x appartenente a $\mathscr{J}^*_x \dot{-} \mathscr{I}^*_x$. Sia data la sequenza $0 \longrightarrow \mathscr{I} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{J} \longrightarrow \mathscr{T} \longrightarrow 0$; in base al teorema 1 l'omomorfismo $\psi^* \cdot \alpha : \mathscr{I} \longrightarrow \mathscr{A}$ determina un omomorfismo $\mathscr{A} \xrightarrow{\bar{\alpha}} \mathscr{A}$ in guisa che si abbia il diagramma commutativo ed esatto:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{I} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi^*"'] & \mathscr{J} \arrow[r] \arrow[d, "\psi^*"] & \mathscr{T} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{A} \arrow[r, "\bar{\alpha}"] & \mathscr{A} & &
\end{tikzcd}$$

La sezione globale $b \subset \mathscr{J}^* \subseteq \mathscr{A}$ non sta per intero in $\mathscr{I}^*$ e d'altra parte si ha $\bar{\alpha}(b) = b \cdot \bar{\alpha}(1) \subset \mathscr{I}^*$. Dunque la sezione $(\psi^*)^{-1}(b)$ induce torsione ammissibile in $\mathscr{T}$.

Dimostrazione dei corollari del teor. 3.

(Corollario 3.1.)

$\mathscr{I}$, $\mathscr{J}$ determinano le loro immagini ammissibili in $\mathscr{A}$ ed applicando quindi il teor. 3 a tali immagini segue $\mathscr{I}^* = \mathscr{J}^*$ cioè l'isomorfismo fra $\mathscr{I}$ e $\mathscr{J}$.

(Corollario 3.2.)

Considerato il diagramma commutativo ed esatto:

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathscr{I} \arrow[r] & \mathscr{A} \arrow[r] & \mathscr{T} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{J} \arrow[r] & \mathscr{A} \arrow[r] & \mathscr{S} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & & 0 &
\end{tikzcd}$$

e tenuto conto che $\mathscr{A}$ è $\mathscr{A}$-modulo libero e inoltre del fatto che ogni omomorfismo $\mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}$ non banale risulta necessariamente iniettivo, si ottiene il diagramma commutativo ed esatto:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathscr{I} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{A} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{T} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{J} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{A} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{S} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{M} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{N} \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Poichè $\mathscr{A} \in P.E.$, $\mathscr{N}$ è privo di torsione ammissibile e altrettanto accade quindi per $\mathscr{M}$, cioè si ha in base al corollario 3.1. (ed osservato che analogamente si ottiene una sequenza esatta $0 \longrightarrow \mathscr{J} \longrightarrow \mathscr{I} \longrightarrow \mathscr{N}' \longrightarrow 0$ con $\mathscr{N}'$ privo di torsione ammissibile) che $\mathscr{I}$, $\mathscr{J}$ sono isomorfi.

BIBLIOGRAFIA

[1] BALDASSARRI M.: *Osservazioni sulla struttura dei fasci lisci.* Atti del convegno internazionale di geometria algebrica tenuto a Torino nel maggio 1961.

[2] SERRE J. P.: *Faisceaux algébriques cohérents.* Ann. of. Math. 61 (1955).