

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIORGIO TREVISAN

Sull'equazione di Riccati generalizzata

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 30 (1960), p. 76-81

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1960__30__76_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SULL' EQUAZIONE DI RICCATI GENERALIZZATA

Nota (*) di GIORGIO TREVISAN (a Padova)

1. - In questa Nota si considera l'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, che nel seguito verrà chiamata *equazione di Riccati generalizzata*,

$$(A) \quad y' = a_0(x)y^n + a_1(x)y^{n-1} + \dots + a_{n-1}(x)y + a_n(x)$$

dove n è un numero naturale.

Si osservi che se $n=1$ dalla (A) si ottiene l'equazione lineare non omogenea del primo ordine se $n=2$, l'equazione di Riccati, e se, invece, $n=3$ l'equazione di Abel¹⁾. È ben noto che, se $n=1$, il rapporto semplice di tre integrali particolari della (A) e se $n=2$, il birapporto di quattro, risultano costanti rispetto alla x .

Se si pone la domanda se valgano (in generale) analoghe proprietà nel caso $n > 2$, si trova che la risposta è negativa.

Il significato di un simile risultato è che, se è $n > 2$, la conoscenza di un qualunque numero di integrali particolari non permette (in generale) la costruzione dell'integrale generale della (A).

Il procedimento seguito nella Nota oltre a portare per $n > 2$ alle conclusioni dette, ridà per $n=1$ ed $n=2$ i risultati classici.

(*) Pervenuta in Redazione il 22 febbraio 1960.

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

¹⁾ Per le proprietà note sulle equazioni di Riccati e di Abel, compresi i casi conosciuti di integrabilità, si può vedere: E. КАМКЕ, *Differenzialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen*, Chelsea, Publishing Company, 1948, pagg. 21-26.

2. - Si considerino le $n + 1$ equazioni differenziali di Riccati generalizzate:

$$(1) \quad y' = \sum_0^n a_{r,s}(x)y^{n-r}, \quad s = 1, 2, \dots, n + 1,$$

dove $a_{r,s}(x)$ siano funzioni continue nell'intervallo I .

In tali ipotesi la validità, in piccolo, del teorema di esistenza ed unicità di Cauchy è assicurata.

Si supponga inoltre che, in un punto α di I , sia

$$(2) \quad |a_{r,s}(\alpha)| \neq 0, \quad (r = 0, \dots, n; s = 1, \dots, n + 1).$$

Si tenga presente per il seguito che, fissati, comunque, i numeri reali β_i ($i = 1, 2, \dots, m$), si può determinare un intorno C di α , contenuto in I dove siano univocamente determinate le funzioni $y_{s,i}(x)$ tali che, per $x \in C$, risulti

$$(3) \quad y'_{s,i}(x) = \sum_0^n a_{r,s}(x)y_{s,i}^{n-r}(x), \quad (s = 1, 2, \dots, n + 1, i = 1, 2, \dots, m)$$

e:

$$(4) \quad y_{s,i}(\alpha) = \beta_i \quad (i = 1, 2, \dots, m, s = 1, 2, \dots, n + 1).$$

Si denoti con Σ_s l'insieme delle m -ple di funzioni $y_{s,1}(x), \dots, y_{s,m}(x)$, definite in un medesimo intorno α , soluzioni della equazione s -esima delle (1) e si ponga $\Sigma = \bigcup_1^{n+1} \Sigma_s$ (si noti che non è detto si possa trovare uno stesso intorno di α in cui siano definite tutte le m -ple di Σ_s e perciò di Σ).

Si può allora stabilire il seguente

TEOREMA: *Se è $n > 2$, ogni funzione $\Phi(u_1, u_2, \dots, u_m)$ ($-\infty < u_i < +\infty, i = 1, \dots, m$) che calcolata in ogni punto di Σ risulti una costante è essa stessa una costante²⁾.*

²⁾ È facilmente verificabile come l'ipotesi $|u_i| < +\infty$, possa essere sostituita dalla $|u_i| \leq b$ con b costante ed indipendente da i . Inoltre è ovvio dal seguito del contesto quali siano le ipotesi qualificative che si desiderano fatte sulla Φ , e cioè che essa sia dotata di derivate parziali seconde continue.

DIMOSTRAZIONE: Se $\Phi(u_1, \dots, u_m)$ è una funzione verificante le ipotesi del teorema, si avrà

$$\Phi(y_{s,1}(x), y_{s,2}(x), \dots, y_{s,m}(x)) \equiv K,$$

per ogni x di un certo intorno di α , dove risulti definita la m -pla $y_{s,i}(x)$ di Σ_s . Derivando si ottiene

$$(5) \quad \sum_1^m \Phi'_{u_i}(y_{s,1}(x), \dots, y_{s,m}(x)) y'_{s,i}(x) \equiv 0,$$

ed in questa sostituendo alle $y'_{s,i}(x)$ le loro espressioni ottenute dalle (3) si ottiene con semplice calcolo:

$$(6) \quad \sum_0^n b_{r,s}(x) \sum_1^m \Phi'_{u_i}(y_{s,1}(x), \dots, y_{s,m}(x)) y_{s,i}^{n-r} \equiv 0.$$

Supposto, il che è lecito, che le $y_{s,i}(x)$ verifichino le (4), sostituito nella (6) ad x il valore α si ha

$$\sum_0^n a_{r,s}(\alpha) \sum_1^m \Phi'_{u_i}(\beta_1, \dots, \beta_m) \beta_i^{n-r} = 0,$$

e fatta adesso variare s attraverso i valori $1, 2, \dots, n+1$, si ottiene un sistema di identità che per l'ipotesi (2) comporta

$$\sum_1^n \Phi'_{u_i}(\beta_1, \dots, \beta_m) \beta_i^{n-r} = 0 \quad (r = 0, 1, \dots, n)$$

e per l'arbitrarietà delle β_i quindi si potranno stabilire le identità

$$(7) \quad L_{n-r}(u_1, u_2, \dots, u_m) \equiv \sum_1^n \Phi'_{u_i}(u_1, u_2, \dots, u_m) u_i^{n-r} \equiv 0 \quad (r = 0, 1, \dots, n)$$

qualunque siano i valori reali delle u_i .

Ora se $m = n + 1$ dalle (7) si trae

$$(8) \quad \Phi'_{u_i}(u_1, \dots, u_m) \equiv 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n + 1 = m)$$

ogni volta che $u_p \neq u_q$ ($p \neq q$, $p, q, i = 1, \dots, m$) e per continuità, la validità della stessa in ogni caso.

E si conclude che necessariamente Φ è una costante.

Lo stesso accade se $m < n + 1$ perchè ci si ri conduce subito al caso precedente.

Si tratta ora di considerare il sistema di equazioni lineari (7) alle derivate parziali, che è del tipo di Jacobi e quindi, prima di tutto, bisogna studiare la completezza del sistema.

Il procedimento è classico: scelte due qualunque delle (7) per esempio la $L_p = 0$ e la $L_q = 0$ ($p \neq q$), si ha

$$(9) \quad \sum_1^m u_r^q \frac{\partial}{\partial u_r} L_p = 0, \quad \sum_1^m u_r^p \frac{\partial}{\partial u_r} L_q = 0,$$

Sottraendo membro a membro le (9) dopo facili semplificazioni di calcolo si ricava:

$$(10) \quad \sum_r \Phi'_{u_r} u_r^{p+q-1} = 0$$

Ora nella (10) p e q sono o lo zero o interi positivi non superiori ad n ed è inoltre $p \neq q$.

Se è $p + q - 1 \leq n$ la (10) ridà una equazione delle (7) da cui si è partiti.

In ogni caso $p + q - 1$, al variare di p e q nel modo poc' anzi detto, descrive l'insieme dei numeri $0, 1, 2, \dots, n' = 2n - 2$, e quindi dalla (10) si ricava un sistema, analogo al sistema (7), in cui il numero n del sistema (7) viene sostituito con n' .

Ora se $n' = 2n - 2 > n$, cioè $n > 2$, risulta anche $n' > 2$ ed allora quanto detto per il sistema (7) si potrà ripetere per il nuovo sistema da esso dedotto.

Così iterando un numero finito di volte il procedimento si perverrà, ad un certo punto, ad un sistema del tipo (7), dove n è stato sostituito da un nuovo naturale n^* con $m \leq n^* + 1$, da cui per quanto già sopra detto $\Phi(u_1, \dots, u_m) \equiv$ costante, c.d.d.

3. - I sistemi del tipo (7) che restano da considerare sono solo i due che si ottengono ponendo $n = 1$ ed $n = 2$ e che si è già osservato indirettamente essere dei sistemi di Jacobi completi.

Anche lo studio di tali sistemi è classico, qui per comodità del lettore si svilupperà il caso (solo formalmente più complicato) relativo ad $n=2$, ma si potrebbe ritenersi esenti dal dover farlo.

È evidente che interessa determinare la Φ richiesta dal Teorema del § 2, con il numero minore possibile di variabili indipendenti, ed a priori poichè se $n=2$ le equazioni (7) si riducono a tre, perchè risulti, come dovuto affinchè Φ non sia costante, $m > n + 1 = 3$ deve essere almeno $m=4$.

Scritto dunque il sistema (7) nel caso $n=2$, $m=4$ ricaviamo applicando la regola di Cramer le Φ'_{u_i} ($i=1, 2, 3$); si ottiene:

$$\varphi'_{u_i} + \varphi'_{u_4} \frac{(u_4 - \lambda)(u_4 - \mu)}{(u_i - \lambda)(u_i - \mu)} = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

dove $\lambda = u_j$, $\mu = u_k$ ($j, k = 1, 2, 3$), con $j \neq k$, $j \neq i$, $k \neq i$.

Si consideri il sistema differenziale ordinario

$$\frac{du_1}{dx_1} = 1, \quad \frac{du_2}{dx_2} = 0, \quad \frac{du_3}{dx_3} = 0, \quad \frac{du_4}{dx_1} = \frac{(u_4 - u_2)(u_4 - u_3)}{(u_1 - u_2)(u_1 - u_3)},$$

al variare di C_2, C_3, C_4 , costanti arbitrarie, sono sue soluzioni le $u_1 = x_1, u_2 = C_2, u_3 = C_3, \frac{u_4 - C_3}{u_4 - C_2} : \frac{x_1 - C_3}{x_1 - C_2} = C_4$.

Sia $\Phi(u_1, u_2, u_3, u_4)$ una funzione come cercata dal teorema del § 2 e $\psi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ un'altra funzione delle 4 variabili indipendenti x_i ($i=1, 2, 3, 4$), determinata come segue:

La Φ e la ψ si trasformano l'una nell'altra mediante le formule di cambiamento di variabili

$$(11) \quad u_i = x_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad \frac{u_4 - u_3}{u_4 - u_2} : \frac{x_1 - u_3}{x_1 - u_2} = x_4,$$

e le loro inverse.

Si calcolino le Φ'_{u_i} pensata Φ funzione della ψ e delle (11) e si sostituiscano le espressioni delle Φ'_{u_i} , così ottenute nel

sistema in considerazione (cioè, (7), $n=2$ $m=4$), si ottiene

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \equiv 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

dove al posto delle x_i si pongano le (11) e quindi per l'arbitrarietà delle u_i valida qualunque siano le x_i .

In conclusione la ψ dipende solo da x_4 e risalendo dalla ψ alla Φ , sempre per le (11), si riconosce che la Φ è una funzione del solo birapporto $\frac{u_4 - u_3}{u_4 - u_2} : \frac{u_1 - u_3}{u_1 - u_2}$.