ANTONIO CHIFFI

Sulla continuità degli integrali curvilinei

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 29 (1959), p. 411-430

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1959__29__411_0>

SULLA CONTINUITÀ DEGLI INTEGRALI CURVILINEI

Memoria (*) *di* ANTONIO CHIFFI (*a Pisa*)

INTRODUZIONE

È noto che, se F e G sono due funzioni continue in un insieme chiuso e limitato H del piano (x, y), l'integrale curvilineo:

$$\mathfrak{J}_{F,\,G}(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} F dx + G dy$$

è una funzione continua in ogni classe $\mathfrak{F}$ di curve $\mathcal{C}$, continue e rettificabili, di lunghezza inferiore ad un numero fisso [1]).

Se invece le funzioni (limitate) F e G sono continue in H se si prescinde da insiemi aperti su H le cui proiezioni sugli assi coordinati abbiano misura esterna tanto piccola quanto si vuole, la funzione $\mathfrak{J}_{F,\,G}$ non è più, in generale, continua in $\mathfrak{F}$.

Il presente lavoro è orientato alla ricerca delle ulteriori condizioni da imporre alla classe $\mathfrak{F}$ affinchè tale continuità possa aver luogo.

Precisamente si dimostra (cfr. teorema 2,5) che, nelle suddette ipotesi più generali relative a F e G, la continuità di

---

(*) Pervenuta in Redazione il 22 luglio 1959.
Indirizzo dell'A.: Scuola Normale Superiore, Pisa.

[1]) Cfr. L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*. Bologna, 1921, vol. I, cap. VII, n. 108; a pag. 292.

$\mathfrak{J}_{F,G}$ ha luogo in ogni classe $\mathfrak{F}$ di curve continue e rettificabili per le quali gli integrali indefiniti delle funzioni di Banach ad esse associate (per la definizione cfr. § 2, N. 1) risultino equi-assolutamente continui.

Dal suddetto teorema viene poi anche dedotto un teorema di convergenza per $\mathfrak{J}_{F,G}$ (teorema 2,7) per successioni di curve continue e rettificabili, convergenti in lunghezza verso una data curva anche essa continua e rettificabile.

Per le dimostrazioni si è dovuto dapprima generalizzare un teorema di Banach sulle funzioni continue a variazione limitata (prop. 1,5 e 1,6) e poi stabilire una proprietà di convergenza in media della successione delle funzioni di Banach associate alle funzioni (per la definizione cfr. § 1), continue ed a variazione limitata, di una successione convergente in variazione verso una funzione assolutamente continua.

In un prossimo lavoro sarà data una applicazione dei suddetti teoremi per stabilire la validità della formula di Green:

$$\int\limits_{FA} F dx + G dy = \iint\limits_{A} \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right) dx dy$$

nelle ipotesi già precisate da F. Cafiero[2]) su F e G ed in larghe ipotesi sull'insieme A, che da Cafiero era supposto essere un rettangolo.

§ 1. - ALCUNI LEMMI

Data una funzione f reale definita in un insieme I di numeri reali e detto J un sottoinsieme di I, indicheremo sempre con f_J la restrizione di f a J. Denoteremo inoltre con $N(t, f_J)$ la funzione definita nell'insieme $\boldsymbol{R}$ dei numeri reali associando ad ogni $t \in \boldsymbol{R}$ lo zero, il numero dei punti del sottoinsieme $\{x : f^J(x) = t\}$ di J, oppure $+\infty$, a seconda che

---

[2]) F. CAFIERO: *Una estensione della formula di Green e sue conseguenze.* Ricerche di Mat., Napoli, vol. II (1953) pp. 91-102.

il sottoinsieme $\{x : f_J(x) = t\}$ sia vuoto, finito, oppure non finito. La funzione $N(t, f_J)$ sarà detta funzione di Banach [3]) associata a f_J.

È immediato verificare che:

1,1. *Se J_1 e J_2 sono due sottoinsiemi di I tali che $J_1 \subseteq J_2$ risulta:*

$$N(t, f_{J_1}) \leq N(t, f_{J_2}), \quad per \quad t \in \boldsymbol{R}.$$

1,2. *Se $(J_n)_{n \in N}$ è una successione (finita o no) di sottoinsiemi di I a due a due privi di punti in comune, posto $J = \bigcup_{n \in N} J_n$, risulta:*

$$N(t, f_J) = \sum_{n \in N} N(t, f_{J_n}), \quad per \quad t \in \boldsymbol{R}. \tag{1,1}$$

La prop. 1,1 è ovvia. In quanto alla prop. 1,2 basta osservare che è:

$$\{x : f_J(x) = t\} = \bigcup_{n \in N} \{x : f_{J_n}(x) = t\}, \quad per \quad t \in \boldsymbol{R}.$$

Naturalmente si conviene che: $a + (+\infty) = +\infty$, per $-\infty < a \leq +\infty$.

1,3. *Se J_1 e J_2 sono sottoinsiemi di I, tali che $J_1 \subseteq J_2$, risulta:*

$$N(t, f_{J_2 - J_1}) = N(t, f_{J_2}) - N(t, f_{J_1}),$$

per ogni $t \in \boldsymbol{R}$ tale che $N(t, f_{J_1}) < +\infty$.

La prop. 1,3 è una immediata conseguenza della precedente (naturalmente si conviene che: $(+\infty) - a = +\infty$ per $-\infty < a < +\infty$).

---

[3]) Cfr. S. BANACH: *Sur les lignes rectifiables, etc.*. Fundamenta Mathematicae, vol. VII (1925), pp. 225-236, a pag. 225.

1,4. *Se* $J = \overset{-1}{f}(Y)$, *Y essendo un arbitrario sottoinsieme di* $\boldsymbol{R}$ *risulta* [4]):

$$N_Y(t, f_J) = N_Y(t, f), \quad per \quad t \in Y.$$

Basta osservare che nelle ipotesi poste risulta:

$$\{x : f_J(x) = t\} = \{x : f(x) = t\}, \quad \text{per} \quad t \in Y.$$

1,5. *Se la funzione reale f definita nell'intervallo chiuso* $[a, b]$ *è ivi continua ed a variazione limitata, la funzione di Banach associata a f è sommabile e risulta:*

$$V_f(B) = \int_{-\infty}^{+\infty} N(t, f_B)dt, \tag{1,2}$$

per ogni insieme B di Borel [5]) *contenuto in* $[a, b]$.

La sommabilità della funzione di Banach associata a f_B consegue in modo ovvio da un noto teorema di S. Banach [6]).

---

[4]) Indichiamo con $\overset{-1}{f}(Y)$ l'immagine reciproca di Y secondo f.

[5]) La funzione di insieme V_f si intende definita nel seguente modo: indichiamo con φ la funzione che ad ogni intervallo semiaperto a destra $[\alpha, \beta)$ su $[a, b]$ associa il numero $\varphi[\alpha, \beta) = f(\beta) - f(\alpha)$. La funzione φ, che risulta sotto le nostre ipotesi numerabilmente additiva ed a variazione limitata, può essere prolungata in modo unico nella famiglia degli insiemi di Borel di $[a, b]$ in modo da ottenere una funzione di insieme $\bar{\varphi}$ anch'essa numerabilmente additiva. Orbene la funzione V_f è la variazione totale di $\bar{\varphi}$. Com'è noto, la V_f è l'unica funzione numerabilmente additiva definita nella famiglia degli insiemi di Borel di $[a, b]$ che in ogni intervallo $[\alpha, \beta]$ di $[a, b]$ assume valore uguale alla variazione totale di f su $[\alpha, \beta]$; per tale ragione la V_f sarà da noi chiamata *variazione totale di f*.

[6]) Si ha precisamente: « *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione continua f sia a variazione limitata è che la funzione di Banach ad essa associata sia integrabile nel senso di Lebesgue. Se f è a variazione limitata la variazione totale di f è uguale a* $\int_{-\infty}^{+\infty} N(t, f)dt$ ». Cfr. S. BANACH, loc. cit. [3]), a pag. 228.

Allo scopo di dimostrare la relazione di uguaglianza (1,2), indichiamo con $\mathfrak{B}$ la famiglia degli insiemi di Borel contenuti in $[a, b]$ per i quali la relazione di eguaglianza (1,2) è vera. In virtù del citato teorema di Banach, a $\mathfrak{B}$ appartengono gli intervalli chiusi contenuti in $[a, b]$. La famiglia $\mathfrak{B}$ gode inoltre, in virtù delle proposizioni 1,2 e 1,3, delle proprietà seguenti:

I) Se $(B_n)_{n \in N}$ è una successione (finita o no) di insiemi disgiunti di $\mathfrak{B}$, l'insieme $\bigcup_{n \in N} B_n$ appartiene a $\mathfrak{B}$.

II) Se B_1 e B_2 sono insiemi di $\mathfrak{B}$ tali che $B_1 \subseteq B_2$, allora $B_2 - B_1$ appartiene a $\mathfrak{B}$.

Ne consegue che $\mathfrak{B}$ è la famiglia degli insiemi di Borel contenuti in $[a, b]$, in quanto quest'ultima è la più piccola famiglia di sottoinsiemi di $[a, b]$ contenente la famiglia degli intervalli chiusi contenuti in $[a, b]$ e godente delle proprietà I) e II) [7].

Dalla proposizione 1,5 consegue:

1,6. *Se la funzione reale f definita nell'intervallo chiuso $I = [a, b]$ è ivi continua ed a variazione limitata, risulta:*

$$V_f[\overset{-1}{f}(B)] = \int_B N(t, f)dt,$$

per ogni sottoinsieme B di Borel contenuto in $\boldsymbol{R}$.

Invero, posto $J = \overset{-1}{f}(B)$, J è un insieme di Borel contenuto in I e, a norma della proposizione 1,5, risulta:

$$V_f(J) = \int_{-\infty}^{+\infty} N(t, f_J)dt = \int_B N(t, f_J)dt.$$

---

[7]) Cfr. F. CAFIERO: *Misura ed integrazione.* Monografie Matematiche del CNR, ed. Cremonese, cap. III, § 1, N. 7, propos. 23, a pag. 145.

Pertanto, essendo in virtù della proposizione 1,4:

$$N_B(t,\ f_J) = N_B(t,\ f),$$

l'asserto è dimostrato.

1,7. *Se f è assolutamente continua in $I = [a,\ b]$, per quasi tutti i t di $\boldsymbol{R}$ risulta $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in \{x : f(x) = t\}$.*

Detto E_0 il sottoinsieme di $[a,\ b]$ costituito dai punti di $[a,\ b]$ in cui f non è derivabile, indichiamo con B un insieme di Borel contenente $E_0 \cup \{x : f'(x) = 0\}$ ed avente la stessa misura di quest'ultimo. A norma della proposizione 1,5 risulta:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} N(t,\ f_B)dt = V_f(B) = \int_B |\, f'(x) \,|\, dx = 0$$

e ciò implica $N(t,\ f_B) = 0$ quasi ovunque in $\boldsymbol{R}$ o, ciò che è lo stesso, che l'insieme $\{x : f_B(x) = t\}$ è vuoto per quasi tutti i t di $\boldsymbol{R}$. Conseguentemente l'appartenenza di un punto x di I all'insieme $\{x : f(x) = t\}$ implica, per quasi tutti i t di $\boldsymbol{R}$, che x appartiene a $I - B$.

Si osservi che è $I - B = \emptyset$ se e solo se è $f'(x) = 0$ quasi ovunque in I o, ciò che è lo stesso, se f è costante in I.

1,8. *Se $(f_n)_{n \in N}$ è una successione di funzioni continue in $I = [a,\ b]$, ivi convergente verso la funzione assolutamente continua f, per quasi tutti i t di $\boldsymbol{R}$ si lascia determinare un indice n_t in guisa tale che risulti:*

$$N(t,\ f_n) \geq N(t,\ f) \quad \textit{per} \quad n \geq n_t. \tag{1,3}$$

Si osservi dapprima che la (1,3) è ovvia se f è costante in I.

Sia t un punto di $\boldsymbol{R}$ diverso da $f(a)$ e da $f(b)$, per il quale l'insieme $\{x : f(x) = t\}$ sia finito, non vuoto e tale che per ogni x che vi appartenga risulti $f'(x) \neq 0$. I punti di $\{x : f(x) = t\}$, diciamoli $x_1, \dots, x_k$, sono tutti interni a $[a,\ b]$ ed in ognuno di essi la f è crescente o decrescente; si possono quindi determinare k intevalli disgiunti $I_1, \ldots, I_k$, contenuti in $[a, b]$ ed aventi il centro rispettivamente in $x_1, \ldots, x_k$, in guisa tale che in uno degli estremi di ognuno di essi la f assuma valore maggiore di t e nell'altro valore minore. A causa della convergenza in $[a, b]$ di (f_n) verso f si può determinare un indice n_t in guisa tale che per $n \geq n_t$ la funzione f_n assuma in uno degli estremi di ognuno degli intervalli suddetti valore maggiore di t e nell'altro valore minore. Conseguentemente, per $n \geq n_t$, f_n assume in ognuno degli intervalli $I_1, \ldots, I_k$ almeno una volta il valore t e però risulta $N(t, f_n) \geq N(t, f)$ per $n \geq n_t$. Poichè la relazione (1,3) è ovvia per ogni t per cui l'insieme $\{x : f(x) = t\}$ è vuoto e poichè per quasi tutti i t di $\boldsymbol{R}$ questo insieme è finito e tale che per ogni x che vi appartenga risulta $f'(x) \neq 0$, l'asserto è dimostrato.

1,9. *Se $(f_n)_{n \in N}$ è una successione di funzioni continue ed a variazione limitata in $I = [a, b]$, ivi convergente in variazione* [8]) *verso la funzione assolutamente continua f, la successione $(N(t, f_n))_{n \in N}$ delle funzioni di Banach ad esse associate converge in media del primo ordine verso $N(t, f)$. Conseguentemente gli integrali indefiniti della successione:*

$$\left(\int N(t, f_n) dt \right)_{n \in N}$$

sono equi-assolutamente continui e la successione $(N(t, f_n))_{n \in N}$ converge in misura in $\boldsymbol{R}$ verso $N(t, f)$.

---

[8]) Si dice che una successione di funzioni $(f_n)_{n \in N}$ continue ed a variazione limitata in $I = [a, b]$ *converge in variazione* alla funzione continua ed a variazione limitata f se è $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$ ed inoltre la variazione totale di f_n in $[a, b]$ tende alla variazione totale della f nello stesso intervallo. La convergenza in variazione è stata considerata per la prima volta da BUCHANAN e HILDEBRANDT: *Note on the convergence of a sequence of functions of a certain type.* Annals of Math., (2), vol. 9 (1908); pp. 123-126.

All'uopo cominciamo con l'osservare che:

a) *Risulta*: $\lim\limits_{n} \int\limits_{T} N(t, f_n)dt = \int\limits_{T} N(t, f)dt$

per ogni sottoinsieme misurabile T di $\boldsymbol{R}$.

Invero, poichè in virtù della proposizione 1,8 risulta:

$$N(t, f) \leq \lim_{n}{}' N(t, f_n)$$

quasi-ovunque in $\boldsymbol{R}$, si ha:

$$\int\limits_{T} N(t, f)dt \leq \int\limits_{T} \lim_{n}{}' N(t, f_n)dt$$

$$\int\limits_{R-T} N(t, f)dt \leq \int\limits_{R-T} \lim_{n}{}' N(t, f_n)dt$$

e però, a norma del lemma di Fatou, anche:

$$(1,4) \qquad \begin{aligned} &\int\limits_{T} N(t, f)dt \leq \lim_{n}{}' \int\limits_{T} N(t, f_n)dt \\ &\int\limits_{R-T} N(t, f)dt \leq \lim_{n}{}' \int\limits_{R-T} N(t, f_n)dt . \end{aligned}$$

Pertanto, per dimostrare la proposizione a), basta far vedere che è:

$$(1,5) \qquad \lim_{n}{}'' \int\limits_{T} N(t, f_n)dt = \int\limits_{T} N(t, f)dt .$$

A tale scopo supponiamo per assurdo che la soprascritta relazione non sia vera. Allora, poichè è:

$$\lim_{n}{}'' \int\limits_{-\infty}^{+\infty} N(t, f_n)dt \geq \lim_{n}{}'' \int\limits_{T} N(t, f_n)dt + \lim_{n}{}' \int\limits_{R-T} N(t, f_n)dt ,$$

in virtù della (1,4) risulta:

$$\lim_n{}'' \int_{-\infty}^{+\infty} N(t, f_n)dt > \int_{-\infty}^{+\infty} N(t, f)dt$$

relazione, quest'ultima, assurda in quanto la supposta convergenza in variazione della successione $(f_n)_{n\epsilon N}$ verso f implica:

$$\lim_n \int_{-\infty}^{+\infty} N(t, f_n)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} N(t, f)dt.$$

Dalla proposizione a) ora dimostrata consegue che gli integrali indefiniti della successione:

$$\left(\int N(t, f_n)dt\right)_{n\epsilon N}$$

sono equi-assolutamente continui [9]. Tali sono quindi pure quelli della successione:

$$\left(\int | N(t, f_n) - N(t, f) | dt\right)_{n\epsilon N}.$$

Pertanto, fissato un numero $\varepsilon > 0$, è possibile determinare un intervallo T_0 e un numero $\eta > 0$ in guisa tale che risulti:

$$\int_T | N(t, f_n) - N(t, f) | dt < \frac{\varepsilon}{3}$$

per ogni n ed ogni sottoinsieme misurabile T la cui intersezione con T_0 sia di misura minore di η.

Posto:

$$T_k = \{t: N(t, f_n) \geq N(t, f) \text{ per } n \geq k\},$$

---

[9]) Cfr. ad es. F. CAFIERO, loc. cit. [7]), cap. V, § 3; N. 5, propos. 11 (a pag. 270).

a norma della proposizione 1,8 risulta:

$$\lim_k mis(T_0 \cap T_k) = mis\, T_0$$

e però è possibile determinare un $\bar{k}$ in guisa tale che risulti:

$$mis(T_0 - T_k) = mis\, T_0 - mis(T_0 \cap T_k) < \eta \quad \text{per } k \geq \bar{k}.$$

Conseguentemente risulta:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} | N(t, f_n) - N(t, f) | \, dt = \int_{R-T_0} | N(t, f_n) - N(t, f) | \, dt +$$
$$+ \int_{T_0 \cap T_{\bar{k}}} | N(t, f_n) - N(t, f) | \, dt + \int_{T_0 - T_{\bar{k}}} | N(t, f_n) - N(t, f) | \, dt <$$
$$< \frac{2}{3}\varepsilon + \int_{T_0 \cap T_{\bar{k}}} [N(t, f_n) - N(t, f)] dt$$

per $n \geq \bar{k}$. L'asserto è così dimostrato in quanto, in virtù della proposizione a), si può determinare un $\bar{n} \geq \bar{k}$ in guisa tale che risulti:

$$\int_{T_0 \cap T_{\bar{k}}} [N(t, f_n) - N(t, f)] dt < \frac{\varepsilon}{3}$$

per $n \geq \bar{n}$.

§ 2. - TEOREMI DI CONTINUITA' PER $\mathfrak{J}_{F, G}$.

N. 1. - Data una curva $\mathcal{C}$ continua e rettificabile di equazioni parametriche:

$$(2,1) \qquad x = f(u) \quad y = g(u) \quad a \leq u \leq b,$$

le funzioni di Banach associate a f e g (cfr. § 1) saranno per semplicità dette *funzioni di Banach associate a* $\mathcal{C}$ oppure, quando occorra fare riferimento alla particolare rappresentazione (2,1) di $\mathcal{C}$, *funzioni di Banach associate a* $\mathcal{C}$ *mediante la rappresentazione* (2,1) *di* $\mathcal{C}$.

Si osservi che se la curva $\mathcal{C}$ è semplice, le funzioni di Banach ad essa associate sono uguali al numero dei punti (finito o infinito) che la curva $\mathcal{C}$ ha in comune con la retta $x = t$ o con la retta $y = t$ rispettivamente.

È immediato verificare che:

2,1. *Sia $\mathfrak{F}$ una famiglia di curve continue e rettificabili; allora condizione necessaria e sufficiente affinchè gli integrali indefiniti delle funzioni di Banach associate alle curve di $\mathfrak{F}$ siano equi-assolutamente continui è che tali siano gli integrali indefiniti delle funzioni di Banach associate alle curve di $\mathfrak{F}$ mediante la rappresentazione in funzione dell'ascissa curvilinea.*

Infatti, indicata, per ogni $\mathcal{C} \in \mathfrak{F}$, con $l_{\mathcal{C}}$ la lunghezza della curva $\mathcal{C}$ e denotate con

$$(2,2) \qquad x = f_{\mathcal{C}}(s) \qquad y = g_{\mathcal{C}}(s) \qquad 0 \leq s \leq l_{\mathcal{C}}$$

le equazioni parametriche di $\mathcal{C}$ in funzione dell'ascissa curvilinea s, si ha: $f(u) = f_{\mathcal{C}}\,[s(u)]$. Allora, fissato $t \in \boldsymbol{R}$, le funzioni di Banach $N(t, f)$ e $N(t, f_{\mathcal{C}})$ associate a $\mathcal{C}$ mediante le rappresentazioni di $\mathcal{C}$ (2,1) e (2,2) rispettivamente o assumono lo stesso valore, ovvero la seconda assume un valore finito e la prima è infinita. In questo secondo caso nel piano (x, u) la retta $x = t$ incontra la curva di equazione $x = f(u)$ in almeno un arco. Poichè l'insieme di tali valori di t è, per la rettificabilità della curva, un insieme numerabile, gli integrali indefiniti delle due funzioni $N(t, f)$ e $N(t, f_{\mathcal{C}})$ sono uguali.

2,2. *Sia $\mathfrak{F}$ una famiglia di curve continue e rettificabili tali che gli integrali indefiniti delle funzioni di Banach ad esse associate mediante una qualunque rappresentazione* (2,1) *siano equi-assolutamente continui; allora le curve di $\mathfrak{F}$ hanno lunghezza equilimitata.*

Infatti, con gli stessi simboli usati nella precedente proposizione, si ha:

$$l_{\mathfrak{C}} \leq V_{f_{\mathfrak{C}}}([0,\ l_{\mathfrak{C}}]) + V_{g_{\mathfrak{C}}}([0,\ l_{\mathfrak{C}}]) = \int_{-\infty}^{+\infty} N(t,\ f_{\mathfrak{C}})dt +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} N(t,\ g_{\mathfrak{C}})dt, \qquad \text{per } \mathfrak{C} \in \mathfrak{F}.$$

Ne consegue l'asserto in quanto, in virtù della prop. 2,1, gli integrali indefiniti delle funzioni di Banach associate alle curve di $\mathfrak{F}$ mediante la rappresentazione (2,2) sono equi-assolutamente continui e però equilimitati.

N. 2. - Detta $\mathfrak{T}$ la famiglia degli insiemi limitati dello spazio euclideo a due dimensioni, indicheremo sempre con μ_e la funzione reale definita in $\mathfrak{T}$ associando ad ogni insieme $I \in \mathfrak{T}$ il numero

$$\mu_e(I) = mis_e\,(pr_1 I) + mis_e\,(pr_2 I),$$

dove con mis_e abbiamo indicato la misura esterna ordinaria e con $pr_1 I$ e $pr_2 I$ le proiezioni di I sugli assi coordinati. La funzione μ_e è una misura esterna in $\mathfrak{T}$.

Data una curva $\mathfrak{C}$ continua e rettificabile, assegnata mediante le equazioni (2,2), indicheremo sempre con $T_{\mathfrak{C}}$ l'applicazione continua di $[0,\ l_{\mathfrak{C}}]$ nello spazio euclideo a due dimensioni che ad ogni $s \in [0,\ l_{\mathfrak{C}}]$ associa il punto $P_s \equiv (f_{\mathfrak{C}}(s),\ g_{\mathfrak{C}}(s))$.

Ciò posto, andiamo a dimostrare il lemma seguente:

2,3. *Sia $\mathfrak{F}$ una famiglia di curve continue e rettificabili tali che gli integrali indefiniti delle funzioni di Banach ad esse associate siano equi-assolutamente continui. Allora per ogni numero $\sigma > 0$ è possibile determinare un numero $\varepsilon > 0$ in guisa tale che risulti:*

$$V_{f_{\mathfrak{C}}}[\overset{-1}{T}_{\mathfrak{C}}(B)] + V_{g_{\mathfrak{C}}}[\overset{-1}{T}_{\mathfrak{C}}(B)] < \sigma,$$

per ogni curva $\mathcal{C} \in \mathfrak{F}$ *e per ogni insieme limitato* B *di Borel di misura esterna* μ_e *minore di* ε.

A tale scopo, adottata per le curve di $\mathfrak{F}$ la rappresentazione (2,2), fissato $\sigma > 0$, determiniamo l'intervallo chiuso I e il numero positivo ε in guisa tale che risulti:

$$(2,3) \qquad \int_E N(t,\ f_{\mathcal{C}})dt < \frac{\sigma}{2}, \qquad \int_E N(t,\ g_{\mathcal{C}})dt < \frac{\sigma}{2}$$

per ogni $\mathcal{C} \in \mathfrak{F}$ e per ogni insieme misurabile E la cui intersezione con I abbia misura minore di ε.

Detto B un insieme di Borel di misura esterna μ_e minore di ε, siano A_1 e A_2 due insiemi aperti lineari tali che:

$$A_1 \supseteq pr_1 B \qquad A_2 \supseteq pr_2 B$$
$$mis\,(A_1) + mis\,(A_2) < \varepsilon.$$

Dalle ovvie relazioni di inclusione:

$$(2,4) \qquad \begin{aligned} &\overset{-1}{T}_{\mathcal{C}}(B) \subseteq \overset{-1}{T}_{\mathcal{C}}(A_1 \times A_2) \subseteq \overset{-1}{f}_{\mathcal{C}}(A_1), \qquad \text{per } \mathcal{C} \in \mathfrak{F} \\ &\overset{-1}{T}_{\mathcal{C}}(B) \subseteq \overset{-1}{T}_{\mathcal{C}}(A_1 \times A_2) \subseteq \overset{-1}{g}_{\mathcal{C}}(A_2), \qquad \text{per } \mathcal{C} \in \mathfrak{F} \end{aligned}$$

consegue:

$$V_{f_{\mathcal{C}}}(\overset{-1}{T}_{\mathcal{C}}(B)) + V_{g_{\mathcal{C}}}(\overset{-1}{T}_{\mathcal{C}}(B)) \leq$$
$$\leq V_{f_{\mathcal{C}}}[(\overset{-1}{f}_{\mathcal{C}}(A_1)] + V_{g_{\mathcal{C}}}[\overset{-1}{g}_{\mathcal{C}}(A_2)], \quad \text{per} \quad \mathcal{C} \in \mathfrak{F}$$

e pertanto, in virtù della prop. 1,6 e delle (2,3), risulta:

$$V_{f_{\mathcal{C}}}[\overset{-1}{T}_{\mathcal{C}}(B)] + V_{g_{\mathcal{C}}}[\overset{-1}{T}_{\mathcal{C}}(B)] \leq \int_{A_1} N(t,\ f_{\mathcal{C}})dt + \int_{A_2} N(t,\ g_{\mathcal{C}})dt < \sigma,$$

per ogni curva $\mathcal{C}$ di $\mathfrak{F}$.

N. 3. - Una funzione F reale, definita in un insieme H chiuso e limitato del piano $(x,\ y)$ si dice μ_e-*quasi continua* in H o *quasi continua rispetto a* μ_e in H quando per ogni numero $\varepsilon > 0$ esiste un insieme A aperto su H di misura esterna μ_e minore di ε e tale che la restrizione di F a $H - A$ sia continua [10]).

È nota [11]) l'osservazione seguente:

2,4. *Siano F e G μ_e-quasi continue e limitate nell'insieme chiuso e limitato H e sia $\mathcal{C}$ una curva continua e rettificabile contenuta in H di equazioni* (2,2) *in funzione dell'ascissa curvilinea s. Allora le funzioni:*

$$\Phi(s) = F[f_{\mathcal{C}}(s),\ g_{\mathcal{C}}(s)] \qquad \Psi(s) = G[f_{\mathcal{C}}(s),\ g_{\mathcal{C}}(s)]$$

sono quasi continue in $[0,\ l_{\mathcal{C}}]$ *e limitate e conseguentemente*

---

[10]) Una funzione F reale definita nell'insieme H chiuso e limitato del piano $(x,\ y)$ si dice *continua rispetto alle variabili separatamente in H* se F risulta, per quasi tutti gli $x \in pr_1 H$, una funzione continua della sola y nella sezione di H di piede x e, per quasi tutti gli $y \in pr_2 H$, una funzione continua della sola x nella sezione di H di piede y.

È nota la proposizione seguente sostanzialmente dovuta a G. SCORZA DRAGONI (*Un teorema sulle funzioni continue rispetto a una e misurabili rispetto ad un'altra variabile.* Rend. Sem. Mat. Padova, vol. 17 (1948); pp. 102-106):

Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione F definita in un rettangolo Δ a lati paralleli agli assi sia ivi continua rispetto alle variabili separatamente è che sia μ_e-quasi continua in Δ.

Cfr. anche:

L. TIBALDO: *Un teorema sulle funzioni misurabili rispetto a una e continue rispetto ad un'altra variabile. Applicazioni.* Atti Accad. Naz. Lincei, Rendiconti cl. Sc. Fis. Mat. Nat. (8), vol. 2 (1947), pp. 146-152.

E. BAIADA: *Sulle funzioni continue rispetto alle variabili separatamente e gli integrali curvilinei.* Rend. Sem. Mat. Padova, vol. 17 (1948), pp. 201-218; a pag. 211.

A. SCORZA TOSO: *Un'osservazione sulle funzioni di due variabili continue separatamente rispetto a queste.* Rend. Sem. Mat. Padova, vol. 20 (1951), pp. 468-469.

G. STAMPACCHIA: *Sopra una classe di funzioni in n variabili.* Ricerche di Mat., Napoli, vol. I (1952), pp. 27-54; a pag. 33.

[11]) E. BAIADA, loc. cit. [10]), a pag. 211.

ha senso l'integrale:

$$\int_0^{l_{\mathfrak{C}}} \{ F[f_{\mathfrak{C}}(s),\ g_{\mathfrak{C}}(s)]f'_{\mathfrak{C}}(s) + G[f_{\mathfrak{C}}(s),\ g_{\mathfrak{C}}(s)]g'_{\mathfrak{C}}(s) \}\, ds.$$

Date le due funzioni F e G μ_e-quasi continue e limitate nell'insieme chiuso e limitato H e detta $\mathfrak{F}$ una famiglia di curve continue e rettificabili contenute in H, indicheremo sempre con $\mathfrak{J}_{F,G}$ la funzione reale definita in $\mathfrak{F}$ che ad ogni curva $\mathfrak{C} \in \mathfrak{F}$ di equazioni (2,2) associa il numero

$$\mathfrak{J}_{F,G}(\mathfrak{C}) = \int_{\mathfrak{C}} F dx + G dy =$$

$$= \int_0^{l_{\mathfrak{C}}} \{ F[f_{\mathfrak{C}}(s),\ g_{\mathfrak{C}}(s)]f'_{\mathfrak{C}}(s) + G[f_{\mathfrak{C}}(s),\ g_{\mathfrak{C}}(s)]g'_{\mathfrak{C}}(s) \}\, ds.$$

Diremo poi che la funzione $\mathfrak{J}_{F,G}$ è *continua* in $\mathfrak{F}$ quando per ogni curva $\mathfrak{C}_0 \in \mathfrak{F}$, comunque fissato un numero $\varepsilon > 0$, è possibile determinare un numero $\rho_0 > 0$ in guisa tale che per ogni curva $\mathfrak{C}$ di $\mathfrak{F}$, appartenente ordinatamente all'intorno (ρ_0) di $\mathfrak{C}_0$ [12]), risulti:

$$| \mathfrak{J}_{F,G}(\mathfrak{C}) - \mathfrak{J}_{F,G}(\mathfrak{C}_0) | < \varepsilon.$$

---

[12]) Si dice che $\mathfrak{C} \in \mathfrak{F}$ *appartiene ordinatamente* all'intorno (ρ_0) di $\mathfrak{C}_0$ se è possibile porre almeno una corrispondenza tra i punti delle due curve tale che:

1°) ad ogni punto di ciascuna curva corrisponda sempre almeno un punto dell'altra;

2°) qualora ad un punto di una delle due curve corrispondano più punti nell'altra, tali punti, se non si riducono ai due estremi della curva, siano infiniti e costituiscano un arco (ed esso solo) di quest'altra curva;

3°) esistano due rappresentazioni del tipo (2,1) per $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{C}_0$ rispettivamente, per le quali, se P e Q sono due punti di $\mathfrak{C}$ tali che P preceda Q (secondo l'ordinamento indotto su $\mathfrak{C}$ dal parametro) e se a

Sussiste il teorema:

TEOREMA 2,5. *Siano F e G funzioni μ_e-quasi continue e limitate nell'insieme chiuso e limitato H e sia $\mathfrak{F}$ una famiglia di curve continue, rettificabili e contenute in H, per le quali siano equi-assolutamente continui gli integrali indefiniti delle funzioni di Banach ad esse associate. Allora la funzione $\mathfrak{J}_{F,G}$ è continua in $\mathfrak{F}$* [13]).

Sarà sufficiente dimostrare che la funzione

$$\mathfrak{J}_F(\mathfrak{C}) = \int_{\mathfrak{C}} F dx = \int_0^{l_{\mathfrak{C}}} F[f_{\mathfrak{C}}(s),\ g_{\mathfrak{C}}(s)] f'_{\mathfrak{C}}(s) ds$$

è continua in $\mathfrak{F}$.

P e Q corrispondono rispettivamente i punti distinti P_0 e Q_0, anche il punto P_0 preceda Q_0;

4°) i punti di $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{C}_0$ associati secondo questa corrispondenza distino tra loro non più di ρ_0.

Naturalmente, data la curva $\mathfrak{C}$ di equazioni (2,2) i punti di $\mathfrak{C}$ $(f(u_1),\ g(u_1))$ e $(f(u_2),\ g(u_2))$ sono considerati distinti se è $u_1 \neq u_2$ (ad eccezione dei valori estremi di u nella ipotesi che $\mathfrak{C}$ sia chiusa).

Cfr. L. TONELLI, loc. cit. [1]), cap. I, n. 18, a pag. 72.

[13]) Osserviamo che dalla dimostrazione del presente teorema 2,5 seguirà pure che: *l'integrale $\mathfrak{J}_{F,G}$ è una funzione continua in ogni classe $\mathfrak{F}$ di curve continue, rettificabili e contenute in H, aventi lunghezza egualmente limitata e tali che, fissato $\sigma > 0$ ad arbitrio, si può determinare un $\varepsilon > 0$ ed un insieme A_ε aperto su H, di misura esterna μ_e minore di ε, tale che la restrizione di F ad $H - A_\varepsilon$ sia continua e tale che si abbia per ogni curva $\mathfrak{C}$ di $\mathfrak{F}$:*

$$\int_{A_1} N(t,\ f)dt + \int_{A_2} N(t,\ g)dt < \sigma,$$

dove A_1 e A_2 sono due insiemi aperti di misura minore di ε, contenenti le proiezioni di A_ε sull'asse x e sull'asse y rispettivamente.

Seguirà pure dalla dimostrazione del presente teorema 2,5 che: *la funzione $\mathfrak{J}_F(\mathfrak{C}) = \int_{\mathfrak{C}} F dx$ è una funzione continua in ogni famiglia $\mathfrak{F}$ di curve continue, rettificabili e contenute in H, aventi lunghezza egualmente limitata e per le quali siano equi-assolutamente continui solamente gli integrali indefiniti delle funzioni di Banach $N(t,\ f)$ ad esse associate.*

Consideriamo, al solito, per ogni $\mathfrak{C} \in \mathfrak{F}$ l'equazione (2,2) di $\mathfrak{C}$ in funzione dell'ascissa curvilinea s e indichiamo con M un numero positivo tale che $|F(x, y)| < M$ per $(x, y) \in H$.

Fissato il numero $\sigma > 0$, determiniamo il numero $\varepsilon > 0$ in guisa tale che risulti:

$$(2,5) \qquad V_{f_{\mathfrak{C}}}(T_{\mathfrak{C}}(A)) < \frac{\sigma}{8M}$$

per ogni $\mathfrak{C} \in \mathfrak{F}$ e per ogni insieme A aperto su H di misura esterna μ_e minore di ε (cfr. prop. 2,3). Determinato ε, sia A un insieme aperto su H di misura μ_e minore di ε e tale che la funzione F sia continua in $H - A$. Sia inoltre $\bar{F}$ una funzione continua in H tale che sia $|\bar{F}(x, y)| < M$ per $(x, y) \in H$ e avente restrizione ad $H - A$ uguale alla restrizione di F ad $H - A$ [14]).

Poichè in virtù della prop. 2,2 le curve di $\mathfrak{F}$ hanno lunghezza equilimitata, la funzione $\mathfrak{J}_{\bar{F}}$ è, a norma di un teorema di Tonelli [15]), continua in $\mathfrak{F}$. Pertanto, fissato $\sigma > 0$, per ogni curva $\mathfrak{C}_0 \in \mathfrak{F}$ si può determinare un numero $\rho_0 > 0$ in guisa tale che risulti:

$$(2,6) \qquad |\mathfrak{J}_{\bar{F}}(\mathfrak{C}) - \mathfrak{J}_{\bar{F}}(\mathfrak{C}_0)| < \frac{\sigma}{2},$$

per ogni curva $\mathfrak{C}$ di $\mathfrak{F}$ appartenente ordinatamente all'intorno (ρ_0) di $\mathfrak{C}_0$.

Si ha intanto:

$$|\mathfrak{J}_F(\mathfrak{C}) - \mathfrak{J}_F(\mathfrak{C}_0)| \leq$$
$$\leq |\mathfrak{J}_F(\mathfrak{C}) - \mathfrak{J}_{\bar{F}}(\mathfrak{C})| + |\mathfrak{J}_{\bar{F}}(\mathfrak{C}) - \mathfrak{J}_{\bar{F}}(\mathfrak{C}_0)| + |\mathfrak{J}_{\bar{F}}(\mathfrak{C}_0) - \mathfrak{J}_F(\mathfrak{C}_0)|.$$

Poichè le funzioni $F[f_{\mathfrak{C}}(s), g_{\mathfrak{C}}(s)]$ e $\bar{F}[f_{\mathfrak{C}}(s), g_{\mathfrak{C}}(s)]$, per $\mathfrak{C} \in \mathfrak{F}$, assumono gli stessi valori sul complemento di $\overset{-1}{T}_{\mathfrak{C}}(A)$

---

14) H. LEBESGUE: *Sur le problème de Dirichlet*. Rend. Circ. Mat. Palermo, vol. 24 (1907), pp. 371-402, a pag. 379 e 380.

15) L. TONELLI, loc. cit. 1), vol. I, cap. VII, n. 108, a pag. 293.

rispetto a $[0, l_{\mathfrak{C}}]$, si ha pure:

$$|\mathfrak{I}_F(\mathfrak{C})-\mathfrak{I}_F(\mathfrak{C}_0)|\leq\Big|\int\limits_{\overset{-1}{T}_{\mathfrak{C}}(A)}\{F[f_{\mathfrak{C}}(s),\,g_{\mathfrak{C}}(s)]-\bar{F}[f_{\mathfrak{C}}(s),\,g_{\mathfrak{C}}(s)]\}f'_{\mathfrak{C}}(s)ds\Big|+$$

$$+|\mathfrak{I}_{\bar{F}}(\mathfrak{C})-\mathfrak{I}_{\bar{F}}(\mathfrak{C}_0)|+$$

$$+\Big|\int\limits_{\overset{-1}{T}_{\mathfrak{C}_0}(A)}\{\bar{F}[f_{\mathfrak{C}_0}(s),\,g_{\mathfrak{C}_0}(s)]-F[f_{\mathfrak{C}_0}(s),\,g_{\mathfrak{C}_0}(s)]\}f'_{\mathfrak{C}_0}(s)ds\Big|\leq$$

$$\leq 2M\int\limits_{\overset{-1}{T}_{\mathfrak{C}}(A)}|f'_{\mathfrak{C}}(s)|\,ds+2M\int\limits_{\overset{-1}{T}_{\mathfrak{C}_0}(A)}|f'_{\mathfrak{C}_0}(s)|\,ds+|\mathfrak{I}_{\bar{F}}(\mathfrak{C})-\mathfrak{I}_{\bar{F}}(\mathfrak{C}_0)|=$$

$$=2M\{V_{f_{\mathfrak{C}}}[\overset{-1}{T}_{\mathfrak{C}}(A)]+V_{f_{\mathfrak{C}_0}}[\overset{-1}{T}_{\mathfrak{C}_0}(A)]\}+|\mathfrak{I}_{\bar{F}}(\mathfrak{C})-\mathfrak{I}_{\bar{F}}(\mathfrak{C}_0)|.$$

Conseguentemente, in virtù delle (2,5) e (2,6), risulta:

$$|\mathfrak{I}_F(\mathfrak{C})-\mathfrak{I}_F(\mathfrak{C}_0)|<\sigma,$$

per ogni curva $\mathfrak{C}$ di $\mathfrak{J}$ appartenente ordinatamente all'intorno (ρ_0) di $\mathfrak{C}_0$.

È un caso particolare del teorema 2,5 il seguente:

TEOREMA 2,6. *Siano F e G funzioni μ_e-quasi continue e limitate nell'insieme chiuso e limitato H. L'integrale $\mathfrak{I}_{F,G}$ è una funzione continua in ogni classe $\mathfrak{J}$ di curve $\mathfrak{C}$ continue, rettificabili e contenute in H, tali che per ciascuna di esse le curve del piano (x, s) di equazione $x=f_{\mathfrak{C}}(s)$ e le curve del piano (y, s) di equazione $y=g_{\mathfrak{C}}(s)$ siano incontrate dalle parallele all'asse delle s, oltre che in eventuali archi, solo in punti isolati, in numero sempre minore di un numero fisso.*

Infatti l'insieme dei valori di t per i quali la retta $x=t$ incontra la curva $x=f_{\mathfrak{C}}(s)$ lungo un intero arco costituiscono, per la rettificabilità della curva e per un teorema di Cantor, un insieme numerabile. Le funzioni di Banach associate alle curve in questione risultano allora, se si prescinde dai punti di un insieme numerabile, equilimitate e le loro funzioni integrali equi-assolutamente continue.

N. 4. - Sia $(\mathcal{C}_n)_{n\in N}$ una successione di curve continue e rettificabili contenute nell'insieme chiuso e limitato H del piano (x, y) di equazioni parametriche date in funzione della ascissa curvilinea $x = f_n(s)$ $y = g_n(s)$ $0 \leq s_n \leq l_n$ ed una curva $\mathcal{C}$ soddisfacente alle stesse ipotesi, di equazioni parametriche $x = f_{\mathcal{C}}(s)$ $y = g_{\mathcal{C}}(s)$ $0 \leq s \leq l_{\mathcal{C}}$. Diremo che la successione di curve $(\mathcal{C}_n)_{n\in N}$ converge in lunghezza a $\mathcal{C}$ se converge uniformemente [16] a $\mathcal{C}$ e se è $\lim_n l_n = l_{\mathcal{C}}$.

Sussiste il:

TEOREMA 2,7. *Siano F e G funzioni μ_e-quasi continue e limitate in H. Se la successione di curve $(\mathcal{C}_n)_{n\in N}$ converge in lunghezza alla curva $\mathcal{C}$ si ha:*

$$\lim_n \mathfrak{J}_{F,G}(\mathcal{C}_n) = \mathfrak{J}_{F,G}(\mathcal{C}).$$

Supponiamo dapprima che sia $l_{\mathcal{C}} > 0$. Operiamo nelle funzioni f_n e g_n il cambiamento di variabile $s_n = \frac{l_n}{l_{\mathcal{C}}} s$, $0 \leq s \leq l_{\mathcal{C}}$, e poniamo $f_n\left(\frac{l_n}{l_{\mathcal{C}}} s\right) = x_n(s)$, $g_n\left(\frac{l_n}{l_{\mathcal{C}}} s\right) = y_n(s)$.

Le successioni $(x_n)_{n\in N}$ e $(y_n)_{n\in N}$ convergono uniformemente nell'intervallo $[0, l_{\mathcal{C}}]$ verso le funzioni $f_{\mathcal{C}}(s)$ e $g_{\mathcal{C}}(s)$ rispettivamente [17] ed inoltre convergono in variazione [18] nello stesso

---

[16] Una successione di curve continue e rettificabili $(\mathcal{C}_n)_{n\in N}$ si dice che *converge uniformemente* alla curva continua e rettificabile $\mathcal{C}$ se esiste almeno una legge che ponga una corrispondenza (come quella descritta nella nota a piè di pagina [12]), fra ciascuna curva $\mathcal{C}_n$ e la $\mathcal{C}$, in modo che fissato $\rho > 0$ si possa determinare un $\bar{n}$ tale che per ogni $n > \bar{n}$ le curve $\mathcal{C}_n$ appartengano ordinatamente all'intorno (ρ) di $\mathcal{C}$. Cfr. L. TONELLI, loc. cit. [1]), vol. I, cap. II, n. 20, pag. 76.

[17] Cfr. L. TONELLI, loc. cit. [1]), vol. I, cap. II, n. 29 a pag. 101.

[18] Cfr. T. RADÒ and P. REICHELDERFER: *Convergence in lenght and area.* Duke Math. J., vol. 9 (1942), pp. 527-565, cap. I, teorema (8,2).

intervallo verso le medesime funzioni. Per le proposizioni 1,9 e 2,1 gli integrali indefiniti delle funzioni di Banach associate alle curve $\mathcal{C}_n$ risultano equi-assolutamente continui e, per la proposizione 2,5, si ha che la successione $(\mathfrak{J}_{F,G}(\mathcal{C}_n))_{n \in N}$ converge a $\mathfrak{J}_{F,G}(\mathcal{C})$.

Se poi è $l_{\mathcal{C}} = 0$, la curva $\mathcal{C}$ si riduce ad un sol punto P. Fissati ad arbitrio i numeri $\sigma > 0$ e $\varepsilon > 0$ esisterà un $\bar{n}$ tale che per ogni $n > \bar{n}$ la curva $\mathcal{C}_n$ abbia lunghezza minore di $\frac{\sigma}{2}$ e sia tutta interna al quadrato di centro P e lati di lunghezza ε paralleli agli assi. Dalla relazione

$$\sigma > 2l_n > V_{f_n} + V_{g_n} = \int_{-\infty}^{+\infty} \{N(t, f_n) + N(t, g_n)\}\, dt$$

e per il teorema 2,5 si ha:

$$\lim_n \mathfrak{J}_{F,G}(\mathcal{C}_n) = \mathfrak{J}_{F,G}(\mathcal{C}) = 0.$$