

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE COLOMBO

Teoria del regolatore di Bouasse e Sarda

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 28 (1958), p. 338-347

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1958__28__338_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

TEORIA DEL REGOLATORE DI BOUASSE E SARDA

Nota (*) di GIUSEPPE COLOMBO (a Modena)

In questa nota si studia un sistema non-lineare in due gradi di libertà noto sotto il nome di regolatore di Bouasse e Sarda. Questo sistema dinamico è portato come esempio dal Rocard¹⁾, nel suo trattato « *Dynamique générale des vibrations* » di concreto oscillatore armonico forzato sinusoidalmente, senza dover introdurre una forza esterna sinusoidale come un « *deus ex machina* » matematico. Il Rocard pensa giustamente che occorra sempre fare delle riserve sulla possibilità di introdurre una tale forza in un sistema lineare, senza accoppiarlo ad altri elementi meccanici che ne possono modificare la struttura. A me sembra, che questo aspetto sia comune a tutti i fenomeni vibratorii della meccanica non-lineare di cui giustificano e spiegano l'introduzione ormai sistematica, come capitolo a se, nei trattati di meccanica, con la necessità di affinare la schematizzazione tutte le volte che dalla teoria si vogliono ottenere informazioni più precise sul fenomeno. Ogni tipo di schematizzazione può rivelarsi più o meno buona, più o meno conveniente, qualche volta quella lineare più di quella non-lineare, a seconda del fenomeno e proprio, a posteriori, dal confronto tra i risultati teorici ottenuti e quelli sperimentali. È ovvio che se per voler restare più vicini al concreto problema fisico dobbiamo af-

(*) Pervenuta in Redazione il 7 ottobre 1958.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Modena.

1) Y. ROCARD, *Dynamique générale des vibrations*, Masson e Cie, Éditeurs, Paris, 1949, pag. 312-315.

frontare un problema non-lineare sul quale poi non riusciamo a dire che ben poco, conviene rifarsi alla schematizzazione lineare ed accontentarci di quanto questa ci fornisce.

Affrontando lo studio rigoroso del sistema di Bouasse e Sarda ho potuto mettere in evidenza alcune proprietà del movimento che non risultano dalla teoria del Rocard: oltre all'esistenza di una banda di frequenze impossibili sulla curva di risonanza, l'esistenza di un fenomeno di isteresi e di jump caratteristici dei sistemi non-lineari. Lo studio è pressochè elementare ma i risultati, sono, ciò non di meno, di particolare interesse: li esporremo qui di seguito dopo aver descritto il meccanismo.

1. - Consideriamo un albero a gomito di raggio di manovella a , mosso dalla caduta di un peso mg , come è rappresentato in figura 1; alla manovella è collegata, attraverso la biella AB , lunga l e di massa ed inerzia trascurabili, l'estremità superiore B di una molla, all'altra estremità B' della quale è sospesa una massa M . I punti B, B' sono obbligati a scorrere su una retta verticale, passante per A' , proie-

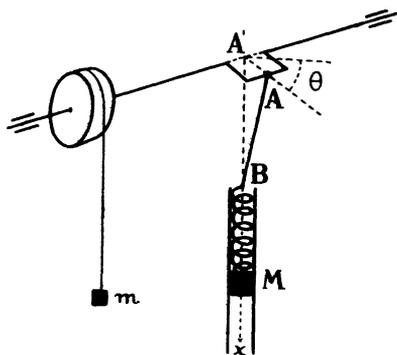


Fig. 1

zione di A sull'albero. Siano: θ l'angolo di $A'A$ con l' orizzontale per A' normale all'asse dell'albero, x l'ascissa di B' contata a partire da A' , k il coefficiente di elasticità della molla, l_0 la sua lunghezza naturale, J il momento d'inerzia

della puleggia di raggio ρ su cui è avvolto il filo che regge la massa m .

La forza viva del sistema si calcola rapidamente, essa vale

$$(1) \quad \mathcal{C} = \frac{1}{2}(\mathcal{J} + m\rho^2)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2,$$

mentre il potenziale della forza attiva, che, con rigore, risulta

$$(2) \quad \mathcal{U} = mg\rho\theta + Mgx - \frac{k}{2}(x - l_0 - a \sin \theta - \sqrt{l^2 - a^2 \cos^2 \theta})^2,$$

si può ridurre, supponendo l sufficientemente grande rispetto ad a , e senza tema di trascurare alcunché di essenziale, alla semplice forma

$$(3) \quad \mathcal{U} = mg\rho\theta + Mgx - \frac{k}{2}(x - a \sin \theta)^2,$$

usufruendo di un opportuno cambiamento di origine per le x . Cosicchè, ove si tenga conto di una dissipazione derivante da una funzione di Rayleigh del tipo

$$(4) \quad \mathcal{F} = \frac{1}{2}[D\dot{\theta}^2 + f\dot{x}^2],$$

le equazioni dinamiche diventano le seguenti

$$(5) \quad \begin{cases} (\mathcal{J} + m\rho^2)\ddot{\theta} = mg\rho + k(x - a \sin \theta)a \cos \theta - D\dot{\theta}, \\ M\ddot{x} - f\dot{x} + kx = ka \sin \theta + gM, \end{cases}$$

che introducendo un parametro $\varepsilon > 0$, scriveremo nella forma

$$(6) \quad \begin{cases} \ddot{\theta} = \varepsilon[\alpha + k(x - a \sin \theta)a \cos \theta - D\dot{\theta}], \\ \ddot{x} + 2\lambda\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = \omega_0^2a \sin \theta + g. \end{cases}$$

Ed ecco quello che presenta di caratteristico il sistema dinamico descritto.

Sotto l'azione del peso mg l'albero si muove di moto rotatorio, accelerato, in una prima fase, per raggiungere poi, più o meno rapidamente un moto di regime uniforme. La

velocità angolare ω^* di regime coincide naturalmente con la pulsazione del moto vibratorio di M . Per ogni valore di m si ha una frequenza di regime $\omega^*(m)$.

Se sono soddisfatte opportune condizioni strutturali si verifica il seguente fenomeno: se m cresce da valori sufficientemente piccoli, anche ω^* cresce, finchè m ha raggiunto il valore m_1 ed ω^* il valore ω_1 ; a questo punto se m aumenta ω^* salta bruscamente al valore ω_1' , per riprendere poi a crescere, con continuità, indefinitamente; si faccia ora diminuire m con continuità, lo stesso succede di ω^* finchè m raggiunge il valore m_2 ed ω^* il valore ω_2 minore di ω_1' , dopo di che, se m continua a decrescere, ω^* salta bruscamente al valore ω_2' , minore di ω_1 . Siccome risulta ω_1 minore certamente di ω_2 , la banda di frequenze (ω_1, ω_2) è impossibile per l'oscillatore armonico M ; è inoltre chiaro il fenomeno di jump ed il fenomeno di isteresi.

L'ampiezza del moto vibratorio di M varia in funzione della frequenza di regime secondo una curva di risonanza del tipo solito, le frequenze impossibili si presentano in corrispondenza del ramo discendente della curva di risonanza.

Il risultato ottenuto precisa ed affina quello ottenuto dal Rocard; l'unica differenza che presenta la nostra impostazione, rispetto a quella di Rocard è dovuta all'aggiunzione di un termine di dissipazione, $\frac{1}{2}D\dot{\theta}^2$, nella funzione di Rayleigh, termine in cui si pensa esplicitata l'azione della resistenza di mezzo che incontra m nella caduta.

2. - Per risolvere il sistema differenziale (6) poniamo al solito

$$(7) \quad x = x_0 + \varepsilon x_1 \quad , \quad \theta = \omega t + \varepsilon \theta_1 ;$$

sostituendo in (6) otteniamo così

$$(8) \quad \begin{cases} \ddot{x}_0 + 2\lambda\omega_0\dot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = \omega_0^2 a \sin \omega t + g, \\ \ddot{\theta}_1 = \alpha + k(x_0 - a \sin \omega t) \cos \omega t - D\omega + \varepsilon f_1(x_1, \dot{x}_1, \theta_1, \dot{\theta}_1, t), \\ \ddot{x}_1 + 2\lambda\omega_0\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = \omega_0^2 a \theta_1 \cos \omega t + \varepsilon f_2(x_1, \dot{x}_1, \theta_1, \dot{\theta}_1, t). \end{cases}$$

Si osservi ora che la x e la \dot{x} sono limitate superiormente in modulo per $0 < t < \infty$ come le soluzioni della generica equazione

$$(9) \quad \ddot{x} + 2\lambda\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = \varphi(t)$$

con $|\varphi(t)| < \omega_0a + g$. Così θ si mantiene superiormente limitata in modulo come la generica soluzione dell'equazione

$$(9') \quad \ddot{\theta} + \varepsilon D\dot{\theta} = \varepsilon[\alpha + k(|\bar{x}| + a)a]$$

ove si è indicato con $|\bar{x}|$ il massimo di $|x|$ che è finito per quanto sopra. Si noti che queste limitazioni sono tutte indipendenti da ε e possono essere fissate a priori per tutte le soluzioni relative ad un opportuno insieme di condizioni

Risolvendo la (8)₁ si ottiene

$$(10) \quad x_0 = \frac{g}{\omega_0^2} + \frac{a \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)}{\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\lambda^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right]^{\frac{1}{2}}} + e^{-\lambda\omega_0 t} (A \cos \sigma t + B \operatorname{sen} \sigma t),$$

e la (8)₂, tenuto conto di quanto detto qui sopra, si può scrivere, in corrispondenza

$$(11) \quad \dot{\theta}_1 = \alpha + \frac{k\alpha^2 \operatorname{sen} \varphi}{2 \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\lambda^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right]^{\frac{1}{2}}} - D\omega + P_0(t) + O(\varepsilon) + O(e^{-\lambda\omega_0 t}),$$

ove $P_0(t)$ è una funzione periodica di periodo $2\pi/\omega$, ed $O(e^{-\lambda\omega_0 t})$ è un infinitesimo come $e^{-\lambda\omega_0 t}$ per t tendente a $+\infty$; inoltre si è posto

$$(12) \quad \operatorname{sen} \varphi = \frac{-2\lambda \frac{\omega}{\omega_0}}{\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\lambda^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Integriamo ora la (11), che scriveremo così

$$(13) \quad \dot{\theta}_1 = f(\omega)t + P(t) + O(\varepsilon) + O(e^{-\lambda t})$$

ponendo

$$(14) \quad f(\omega) = \alpha - D\omega - \frac{\lambda k \frac{\omega}{\omega_0} a^2}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\lambda^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}.$$

La generica soluzione $\theta(t)$ soddisfacente alle condizioni iniziali $\theta(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = \omega$, per arbitrari valori iniziali di $x(0)$ e di $\dot{x}(0)$, si può rappresentare, con la sua derivata mediante le seguenti espressioni

$$(15) \quad \begin{cases} \theta(t) = \omega t + \varepsilon \left\{ f(\omega) \frac{t^2}{2} + P_1(t) \right\} + \varepsilon 0(\varepsilon) + \varepsilon 0(e^{-\lambda\omega_0 t}), \\ \dot{\theta}(t) = \omega + \varepsilon \left\{ f(\omega) t + \dot{P}_1(t) \right\} + \varepsilon 0(\varepsilon) + \varepsilon 0(e^{-\lambda\omega_0 t}), \end{cases}$$

con $P_1(t)$ funzione periodica di periodo $2\pi/\omega$, come $P_0(t)$ e $P(t)$, a valore medio nullo in un periodo.

Sia ω^* il valore di ω per cui risultano verificate le relazioni

$$(16) \quad f(\omega^*) = 0 \quad f'(\omega^*) \neq 0$$

e si consideri la generica soluzione corrispondente alle condizioni iniziali $\theta(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = \omega^* + \mu$ ed $x(0)$ ed $\dot{x}(0)$ arbitrari, ed in corrispondenza ad essa l'istante T in cui si annulla $\theta - 2n\pi$. Se si pone

$$(17) \quad T = \frac{2n\pi}{\omega^*} + \varepsilon\tau_1 + \mu\tau_2,$$

dovrà risultare

$$(18) \quad \begin{aligned} 2n\pi = (\omega^* + \mu) \frac{2n\pi}{\omega^*} + \varepsilon\omega^*\tau_1 + \mu\omega^*\tau_2 + \\ + \varepsilon P_1\left(\frac{2n\pi}{\omega^*}\right) + 0(\varepsilon^2) + \varepsilon 0(e^{-\lambda\omega_0 \frac{2n\pi}{\omega^*}}) + \varepsilon 0(\mu), \end{aligned}$$

e da queste si ottiene

$$(19) \quad \tau_1 = -\frac{P_1\left(\frac{2n\pi}{\omega^*}\right)}{\omega^*}, \quad \tau_2 = -\frac{2n\pi}{\omega^{*2}}.$$

Si giunge così alla espressione seguente che fornisce $\theta(T)$

$$(20) \quad \dot{\theta}(T) = \omega^* + \mu + \varepsilon \left\{ f'(\omega^*)\mu T + F(\omega^* + \mu) \right\} + \\ + O(\varepsilon, \mu^2) + O(\varepsilon^2) + \varepsilon O(e^{-\gamma\omega^*t});$$

in questa compare la funzione F di cui possiamo dire che, almeno per $|\mu| < |\bar{\mu}|$, è

$$(21) \quad |F(\omega^* + \mu)| < M.$$

Poniamo ora $\mu = \mu_0/n$ ed $\varepsilon = \varepsilon_0/n$; da (21) otteniamo

$$(22) \quad \dot{\theta}(T) = \omega^* + \frac{\mu_0}{n} + \frac{\varepsilon_0}{n} \left\{ f'(\omega^*) \frac{2\pi\mu_0}{\omega^*} + F(\omega^* + \mu) \right\} + \\ + O\left(\frac{1}{n^2}\right) + O(e^{-\gamma n}),$$

essendo γ un numero positivo. Si scelgano ora μ_0 ed ε_0 in modo che risultino soddisfatte le relazioni

$$(23) \quad \left| f'(\omega^*) \frac{2\pi\mu_0}{\omega^*} \right| > M \quad . \quad \left| \frac{4\varepsilon_0 f'(\omega^*) \pi \mu_0}{\omega^*} \right| < \frac{1}{2} \mu_0,$$

ed n così grande che si abbia, oltre a $\mu_0/n < |\bar{\mu}|$, anche

$$(24) \quad \left| O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right| + |O(e^{-\gamma n})| < \frac{\varepsilon_0}{n} \left\{ f'(\omega^*) \frac{2\pi\mu_0}{\omega^*} + F\left(\omega^* + \frac{\mu_0}{n}\right) \right\},$$

allora, se $f'(\omega^*) < 0$, sarà di conseguenza

$$(25) \quad \omega^* - \frac{\mu_0}{n} \leq \dot{\theta}(T) \leq \omega^* + \frac{\mu_0}{n},$$

mentre se $f'(\omega^*) > 0$, $\mu_0 > 0$, sarà

$$(26) \quad \dot{\theta}(T) > \omega^* + \frac{\mu_0}{n},$$

ed infine si avrà

$$(27) \quad \dot{\theta}(T) < \omega^* + \frac{\mu_0}{n},$$

se $f'(\omega^*) > 0$, $\mu_0 < 0$.

Considerando quindi le condizioni di moto della massa cadente m , rappresentate dai valori delle variabili θ , $\dot{\theta}$, si avrà allora che nel passaggio dall'istante 0 all'istante T , indipendentemente dal valore istantaneo delle variabili x , \dot{x} , mentre θ riprende il valore iniziale, diminuisce il divario della velocità angolare $\dot{\theta}$ dal valore di regime ω^* se $f(\omega') < 0$, aumenta tale divario se $f(\omega^*) > 0$. Ciò è sufficiente per concludere che ω^* è la velocità angolare corrispondente ad un effettivo moto di regime se e solo se in corrispondenza ad esso risulta $f(\omega^*) = 0$, $f'(\omega^*) < 0$, ciò valendo naturalmente per ε sufficientemente piccolo.

3. - Consideriamo, dunque in base a quanto detto qui sopra, l'equazione $f(\omega) = 0$, che scriveremo

$$(28) \quad \alpha - Dz = \frac{\lambda k z a^2}{(1 - y^2)^2 + 4\lambda^2 z^2}.$$

Essa definisce, con le sue radici z^* , le frequenze $\omega^* = z^* \omega_0$ del moto di regime realizzabile per ogni valore dei parametri, α , k , D , λ , se risulta in corrispondenza ad esso $f'(\omega^*) < 0$. L'ampiezza del corrispondente moto vibratorio della massa M è data poi da

$$(29) \quad \mathcal{A}^2 = \frac{a^2}{(1 - z^2)^2 + 4\lambda^2 z^2}$$

come risulta da 9).

Per una discussione dei risultati è conveniente ritornare ai parametri effettivi. Faremo variare il solo peso m che con la sua caduta alimenta il sistema, supponendo che rimangono fissi gli altri parametri. Al variare di m varia anche J , ma poichè non variano in corrispondenza, ne a , ne λ , ne ω_0^2 , non variano quindi i rapporti $\frac{\alpha}{k}$, $\frac{\alpha}{D}$; si può dunque ritenere che agli effetti della determinazione del moto di regime, vari, al variare di m , il solo parametro α . Si osservi inoltre che alla condizione che ε sia sufficientemente piccolo si può sempre soddisfare assumendo J sufficientemente grande.

Sopra un sistema ortogonale di riferimento riportiamo in ascisse i rapporti $z = \omega/\omega_0$ ed in ordinate i valori corrispon-

denti del primo e del secondo membro di (28). Rappresenteremo così la retta r di equazione $y_1 = z - \omega_0 D z$ e la quartica C_4 di equazione

$$(30) \quad y_2 = \frac{\lambda k a^2 z}{(1 - z^2)^2 + 4\lambda^2 z^2}.$$

Le ascisse z^* delle eventuali intersezioni di r con C_4 rappresentano le frequenze $\omega^* = r^* \omega_0$ di moti di regime, se in corrispondenza a dette intersezioni risulta

$$(31) \quad f'(z^*) = y_1'(z^*) - y_2'(z^*) < 0,$$

cioè se si ha

$$(32) \quad y_1'(z^*) < y_2'(z^*).$$

Si ottiene così che i moti di regime effettivi si avranno solo in corrispondenza alle intersezioni appartenenti all'arco $\Omega\Omega_1$ e

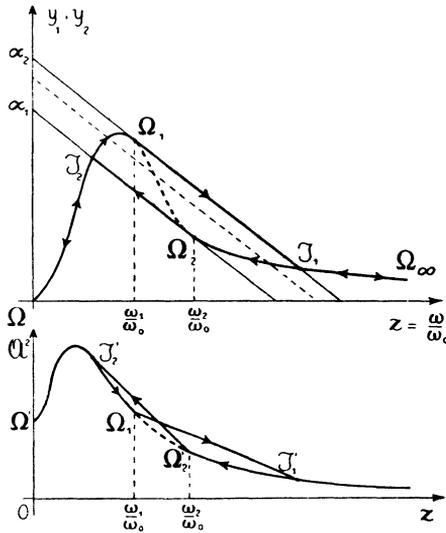


Fig. 2-3

$\Omega_2\Omega$ (vedi fig. 2) di C_4 , mentre le intersezioni appartenenti all'arco $\Omega_1\Omega_2$ della stessa C_4 non danno possibili moti di regime perchè in corrispondenza ad essi non è soddisfatta la (32). Sulla curva C_4' di fig. 3 sono riportate le ampiezze

di oscillazione del moto vibratorio di M sempre in funzione della frequenza relativa ω^*/ω_0 .

Risulta ormai evidente che siamo in presenza di un fenomeno di isteresi accompagnato come al solito da un fenomeno di jump. Infatti supposto sufficientemente piccolo il coefficiente angolare della retta r (cioè sufficientemente piccolo il valore del parametro D , che caratterizza la resistenza dinamica incontrata da m nella caduta) si faccia crescere α a partire dal valore zero, aumentando m , fino al valore α_2 si vede allora che il valore della frequenza aumenta fino al valore ω_1 , ascissa del punto Ω_1 ; se si aumenta ancora m , la frequenza salta bruscamente al valore ω_1' , valore che corrisponde al punto \mathcal{J}_1 ; se ora si cerca di invertire il fenomeno diminuendo il peso m , cioè diminuendo il valore di α fino al valore α_1 minore di α_2 , diminuisce in corrispondenza anche la frequenza con continuità fino al valore ω_2 corrispondente al punto Ω_2 di C_1 , dopo di che la frequenza cade, per una ulteriore diminuzione di m , bruscamente al valore ω_2' corrispondente al punto \mathcal{J}_2 .

La condizione necessaria e sufficiente perchè si verifichi il fenomeno di jump e di isteresi si esprime imponendo che il minimo della funzione $y'(z)$ sia minore di $-\omega_0 D$. La condizione è certamente soddisfatta se D è sufficientemente piccolo. Se è per esempio $\lambda^2 = \frac{1}{2}$ la condizione in discorso si determina molto facilmente.

Si noti che il massimo di \mathcal{A}^2 si ha per il valore della frequenza corrispondente al seguente valore di z^2

$$z^2 = 1 - 2\lambda^2,$$

mentre il massimo di $y_2(z)$ si ha per

$$z^2 = 1 - 2\lambda^2 + \sqrt{(1 - 2\lambda^2)^2 + 3}.$$

cio prova che il fenomeno di jump avviene certamente in corrispondenza al tratto discendente della curva di risonanza.

Risulta infine chiaro ormai come le frequenze corrispondenti all'arco $\Omega_1\Omega_2$ siano interdette per il sistema in esame.