RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIOVANNI ZACHER

Sottogruppi normali negli omomorfismi strutturali tra gruppi finiti

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 28 (1958), p. 221-224

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1958__28__221_0>

SOTTOGRUPPI NORMALI NEGLI OMOMORFISMI STRUTTURALI TRA GRUPPI FINITI

Nota (*) *di* GIOVANNI ZACHER (*a Cambridge, Mass. U.S.A.*)

Nella presente Nota si considera la seguente questione: Dato un omomorfismo strutturale φ tra due gruppi finiti G e $\bar{G}$, sotto quali condizioni l'immagine $\bar{T} = \varphi(T)$ di un sottogruppo normale T di G nell'omomorfismo strutturale φ è un sottogruppo normale di $\bar{G}$? e viceversa: assegnato un sottogruppo normale $\bar{T}$ di $\bar{G}$, quando esiste un sottogruppo normale T di G per cui $\varphi(T) = \bar{T}$?

In quanto segue si farà vedere che il problema enunciato si può ricondurre al caso, già studiato da Suzuki [1]), in cui φ è un isomorfismo strutturale tra due gruppi finiti.

Sia G un gruppo finito e φ un omomorfismo strutturale tra G ed un gruppo (finito) $\bar{G}$; allora sono noti i seguenti fatti [2]):

a) Il gruppo G è unione di due sottogruppi N ed H, $G = N \cup H$, ove N è sottogruppo normale di G, con ordine primo con quello di H, e $\varphi(N)$ coincide col sottogruppo identico $\bar{1}$ di $\bar{G}$;

b) Il gruppo G_0, intersezione di tutti i sottogruppi di G che φ trasforma in $\bar{G}$, è un sottogruppo normale contenuto in H;

(*) Pervenuta in Redazione il 18 giugno 1958.

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

1) M. SUZUKI: ***Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups.*** Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, Springer Verlag, Berlin, cap. II, par. 7.

2) Vedi op. cit. 1), pp. 70-73, 84.

c) Per H si ha la rappresentazione $H = C \cup K$, con K sottogruppo normale di H, e C sottogruppo con ordine primo con quello di K;

d) Il gruppo C è ciclico, o prodotto diretto di un gruppo ciclico ed un gruppo generalizzato dei quaternioni; φ subordina su ogni sottogruppo di Sylow di C un omomorfismo strutturale proprio non triviale;

e) L'omomorfismo strutturale φ subordina un isomorfismo strutturale su K/R, ove R è un sottogruppo normale di H d'ordine 2 od 1, con $\varphi(R) = \bar{1}$;

f) Si ha $\bar{G} = \varphi(C) \cup \varphi(K)$, con $\varphi(K)$ sottogruppo normale di $\bar{G}$, $\varphi(C)$ è ciclico e l'ordine di $\varphi(C)$ è primo con quello di $\varphi(K)$.

Detto T un sottogruppo normale di G, consideriamo il gruppo $M = T \cap H$, e poniamo $M_1 = M \cap C$, $M_2 = M \cap K$. Risulta allora che $M = M_1 \cup M_2$, M_2 sottogruppo normale di H, M_1 ciclico e l'ordine di M_1 primo con quello di M_2. Sia $M_2' = hM_1h^{-1}$ un coniugato di M_1, con h un elemento di H. Poichè $M_1 \subset M$, ed M è normale in H, è pure M_2' contenuto in M, sicchè sarà $M_1' = hM_1h^{-1} = m_2M_1m_2^{-1}$, con m_2 conveniente elemento di M_2. Ne segue che $m_2^{-1}h$ appartiene al normalizzante $\mathfrak{N}_H(M_1)$ di M_1 in H, il che ci dice che $H = \mathfrak{N}_H(M_1)M_2$. Il gruppo M_1 è contenuto nel gruppo ciclico C, per cui $\mathfrak{N}_H(M_1) \supset C$ e sarà dunque $\mathfrak{N}_H(M_1) = C \cup L$, ove $L = \mathfrak{N}_H(M_1) \cap K$. Dunque L è normale in $\mathfrak{N}_H(M_2)$; ma tale è pure M_1, sicchè, essendo $M_1 \cap L = 1$, avremo $M_1 \cup L = M_1 \times L$. Pertanto $\varphi(M_1)$ è normale in $\varphi(M_1 \times L) = \varphi(M_1) \times \varphi(L)$, ma è pure $\varphi(M_1)$ normale in $\varphi(C)$, sicchè $\varphi(M_1)$ è normale in $\varphi(M_1 \times L) \cup \varphi(C) = \varphi(L \cup C) =$ $= \varphi(\mathfrak{N}_H(M_1))$.

Pertanto se $\varphi(M_2)$ è normale in $\varphi(\mathfrak{N}_H(M_1)) \cup \varphi(M_2) =$ $= \varphi(\mathfrak{N}_H(M_1) \cup M_2) = \varphi(H)$, allora pure $\varphi(M) = \varphi(M_1) \cup \varphi(M_2)$ è normale in $\varphi(H)$.

Posto $F = C \cup M_2$, poichè per la f) $\varphi(K)$ è un sottogruppo normale di $\bar{G}$, risulta $\varphi(K) \cap \varphi(F)$ un sottogruppo normale di $\varphi(F)$; però $\varphi(K) \cap \varphi(F) = \varphi(K \cap F) = \varphi(M_2)$, dunque $\varphi(M_2)$ è normale in $\varphi(F)$. Se allora $\varphi(M_2)$ è normale anche in $\varphi(K)$, tale è $\varphi(M_2)$ in $\varphi(F) \cup \varphi(K) = \varphi(F \cup K) = \varphi(H)$; sicchè possiamo dire che $\varphi(M_2)$ è normale in $\varphi(H)$, se $\varphi(M_2)$ è tale in

$\varphi(K)$. Tenendo presente la conclusione al capoverso precedente, abbiamo che $\varphi(M)$ è normale in $\varphi(H)$ se $\varphi(M_2)$ è tale in $\varphi(K)$. Viceversa se $\varphi(M)$ è normale in $\varphi(H)$, allora $\varphi(M) \cap \varphi(K) = \varphi(M_2)$ è tale in $\varphi(K)$. Osservando infine che $M_2 = T \cap K$, otteniamo la proposizione

I) *Se T è un sottogruppo normale di G, il gruppo $\varphi(T)$ è normale in $\varphi(G)$ se e solo se $\varphi(T \cap K)$ è normale in $\varphi(K)$.*

Ricordando che tra K/R e $\varphi(K)$, φ subordina un isomorfismo strutturale e che $\varphi(T \cap K) = \varphi((T \cap K)R)$, il problema di stabilire se l'immagine $\varphi(T)$ di un sottogruppo normale T di G è tale anche in $\varphi(G)$ è così ricondotto per la propos. I) ad un analogo problema in cui φ è un isomorfismo strutturale tra due gruppi.

Consideriamo ora il problema inverso, vale a dire dato un omomorfismo strutturale φ tra G e G, vogliamo stabilire quando un assegnato sottogruppo normale T di G è l'immagine di almeno un sottogruppo normale T di G nell'assegnato omomorfismo strutturale φ.

Conservando ai simboli il significato fin qui loro attribuito, indichiamo con ψ^{-1} l'isomorfismo strutturale inverso a quello ψ subordinato da φ tra K/R e $\varphi(K) = K$. Sia $\bar{T}$ un sottogruppo di $\bar{G}$ tale che $\psi^{-1}(\bar{T} \cap \bar{K})$ sia normale in K/R. Vogliamo provare che ciò è sufficiente per garantire l'esistenza di un sottogruppo normale T di G con $\varphi(T) = \bar{T}$. Sia A un sottogruppo di H con $\varphi(A) = \bar{T}$ e senza restrizione possiamo supporre che sia $A \supset R$.

Posto $B = A \cap K$, proviamo che B è un gruppo permutabile con C.

Infatti se fosse $B \cup C \supset BC$, ne seguirebbe che $(B \cup C) \cap K$ conterrebbe B come sottogruppo proprio, per cui sarebbe $\varphi([B \cup C] \cap K) \supset \varphi(B)$. mentre è $\varphi([B \cup C] \cap K) = [(\bar{T} \cap \bar{K}) \cup \bar{C}] \cap \bar{K} = (\bar{T} \cap \bar{K}) \cup (\bar{C} \cap \bar{K}) = \bar{T} \cap \bar{K} = \varphi(B)$. Il gruppo B è pertanto normale in $B \cup C$, avendosi $(B \cup C) \cap K = B \cup (K \cap C) = B$. Ma B è per ipotesi normale in K, sicchè B è normale in $B \cup C \cup K = C \cup K = H$.

Tornando al gruppo A, sia P_1 un coniugato di $P = A \cap C$ in H.

Vogliamo far vedere che $\varphi(P_1)$ è un coniugato di $\varphi(P)$. A tal fine notiamo che se C_1 è un coniugato di C in H, allora $\varphi(C_1)$ è un coniugato di $\varphi(C)$. Infatti da $H = C_1K = CK$, $C \cap K = C_1 \cap K = 1$, segue che $\varphi(C_1) \cup \varphi(K) = \varphi(G)$, $\varphi(C_1) \cap \varphi(K) = 1$, per cui $\varphi(C_1)$ è un complemento di $\varphi(K)$. Ma i complimenti di $\varphi(K)$ sono coniugati per la f). Osserviamo ora che un sottogruppo di $\varphi(C)$ è coniugato ad un sottogruppo di $\varphi(C_1)$ se hanno lo stesso ordine, essendo $\varphi(C)$ ciclico. Resta pertanto da provare che $\varphi(P)$ e $\varphi(P_2)$ hanno lo stesso ordine. Per far ciò basterà far vedere che se $S \supset S'$ sono due sottogruppi di Sylow rispettivamente di C e P, se $S_1 \supset S_1'$ hanno significato analogo per C_1 e P_1, da $(S : S') = (S_1 : S_1')$ segue che $(\varphi(S) : \varphi(S')) = (\varphi(S_1) : \varphi(S'))$. Ora essendo $SK = S_1K$ si ha, come si è visto per C e C_1, che $\varphi(S)$ è coniugato a $\varphi(S_1)$, ed analog. da $S'K = S_1'K$, che $\varphi(S')$ è coniugato a $\varphi(S_2')$. Pertanto i due gruppi $\varphi(P)$ e $\varphi(P_2)$ sono coniugati avendo ordini uguali. Ma allora $\varphi_1(P_1)$ è contenuto in $\overline{T}$, essendo $\varphi(P)$ contenuto in $\overline{T}$, e T per ipotesi è normale in $\varphi(G)$.

Se ora consideriamo il gruppo U unione di tutti i coniugati di P in H, sarà $\varphi(U) \subset \overline{T}$, per cui il gruppo $Q = U \cup B$ avrà come immagine $\overline{T}$. D'altra parte Q è un sottogruppo normale di H, essendo unione di B ed U, ambedue sottogruppi normali di H. Se infine poniamo $T = NQ$, T è un sottogruppo normale di G e risulta $\varphi(T) = \overline{T}$. Si perviene pertanto alla seguente proposizione

II) *Se φ è un omomorfismo strutturale tra i gruppi finiti G e $\overline{G}$, detto $\overline{T}$ un sottogruppo normale di $\overline{G}$, esiste un sottogruppo normale di G, con $\varphi(T) = \overline{T}$, se e solo se $\psi^{-1}(\overline{T} \cap K)$ è normale in K/R.*

Le propos. I) e II) riconducono pertanto il problema delle immagini e controimmagini di sottogruppi normali negli omomorfismi strutturali tra gruppi finiti ad un problema analogo negli isomorfismi strutturali tra gruppi finiti.