

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

DOMENICO BOCCIONI

Indipendenza delle condizioni di distributività

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 28 (1958), p. 1-30

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1958__28__1_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

INDIPENDENZA DELLE CONDIZIONI DI DISTRIBUTIVITÀ

Nota () di DOMENICO BOCCIONI (a Padova)*

Nel presente lavoro, per un bisistema (o bigruppoide) B^0 si intende un insieme B , il sostegno di B^0 , nel quale sono definite due operazioni univoche binarie, l'addizione e la moltiplicazione di B^0 . Il numero cardinale ν (≥ 2 e non necessariamente finito di B) vien detto l'ordine di B^0 .

Dato un insieme B avente numero cardinale ν (≥ 2), si possono considerare le ν^3 eguaglianze:

$$x(y + z) = (xy) + (xz) \quad (x, y, z \in B),$$

che vengono dette condizioni di s -distributività (di B); se una di esse è soddisfatta in un bisistema B^0 di sostegno B , la relativa terna (x, y, z) viene detta s -distributiva in B^0 .

Il problema di riconoscere se tali condizioni di s -distributività siano indipendenti viene risolto nel § 1 col risultato seguente (n. 1, teor. 1): *le ν^3 condizioni di s -distributività sono indipendenti se e soltanto se $\nu \geq 3$.*

L'indipendenza di tali condizioni va intesa nel senso seguente: Dato un insieme B avente numero cardinale $\nu \geq 3$, e fissata una qualunque delle condizioni di s -distributività di B , allora esiste un bisistema B^0 di sostegno B nel quale la condizione fissata non è soddisfatta, mentre tutte le rimanenti condizioni vi sono invece soddisfatte.

(*) Pervenuta in Redazione il 16 settembre 1957.

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

Detto s -distributivo un bisistema se in esso le condizioni di s -distributività sono soddisfatte, per riconoscere dunque se un dato bisistema B^0 di ordine $\nu \geq 3$ sia s -distributivo, bisogna in generale esaminare tutte le ν^3 terne formate cogli elementi di B^0 .

Nel § 1 viene poi completato lo studio del caso $\nu = 2$. Precisamente (teoremi 2 e 3 del n.º 8), detto Σ l'insieme costituito da tutte le otto ($= 2^3$) condizioni di s -distributività di $B = \{a, b\}$, vengono determinati tutti i sottinsiemi Σ_0 di Σ ad esso equivalenti e costituiti, ciascuno, da condizioni indipendenti. Ognuno di questi sottinsiemi Σ_0 risulta costituito da quattro condizioni soltanto (ad es. da quelle relative alle quattro terne (x, y, z) con $x = z$, — cfr. n.º 16, coroll. 3 —).

Per riconoscere dunque se un dato bisistema di ordine 2 sia s -distributivo è sufficiente (e, in generale, necessario) l'esame di quattro sole fra le otto condizioni di s -distributività.

Approfittando di questo risultato e dell'analogo, stabilito nel § 2, per le condizioni di d -distributività:

$$(x + y)z = (xz) + (yz) \quad (x, y, z \in B),$$

vengono inoltre determinati (a meno di isomorfismi e di antisonomorfismi) tutti i bisistemi s -distributivi e tutti i bisistemi d -distributivi di ordine 2, (n.º 13, coroll. 1 e 2).

Nel § 3 viene infine studiato l'insieme, Δ , costituito dalle $2\nu^3$ condizioni, dette di distributività, ottenute riunendo le ν^3 condizioni di s -distributività e le ν^3 condizioni di d -distributività di uno stesso insieme B (avente numero cardinale ν).

Si è trovato che (n.º 14, teor. 4) anche *le $2\nu^3$ condizioni di distributività sono indipendenti se e soltanto se $\nu \geq 3$* .

Lo studio del caso $\nu = 2$ viene poi completato determinando (n.º 16, teor. 5) tutti i sottinsiemi Δ_0 dell'insieme Δ ad esso equivalenti e costituiti, ciascuno, da condizioni indipendenti. Ognuno di questi sottinsiemi Δ_0 risulta costituito da otto condizioni soltanto (ad es. da quelle relative alle terne (x, y, z) con $x = z$, — cfr. coroll. 3 —).

§ 1

1. - Chiameremo *gruppoide* (o sistema) un insieme non vuoto G nel quale sia ovunque definita un'operazione univoca binaria (cfr., ad es. [3]¹⁾, p. 67). L'insieme G si dirà il *sostegno* del gruppoide.

Chiameremo *bisistema* (o bigruppoide) un insieme non vuoto B nel quale siano ovunque definite due operazioni univoche binarie *distinte e considerate in un determinato ordine*. Tali operazioni si indicheranno, nell'ordine, con α e μ e si diranno l'*addizione* e la *moltiplicazione* del bisistema; per i loro risultati (che sono elementi di B) si useranno le denominazioni e i simboli consueti (*somma* $x + y$, *prodotto* xy ; $x, y \in B$). L'insieme B si dirà il *sostegno* del bisistema, il quale verrà denotato con B^0 . Il numero cardinale (non necessariamente finito) del sostegno B si dirà l'*ordine* del bisistema B^0 . Gli *elementi* di un bisistema sono quelli del suo sostegno.

Si dirà (cfr. [4], p. 5) che due bisistemi sono *duali* (e che ognuno è il *duale* dell'altro) se essi hanno lo stesso sostegno e se l'addizione e la moltiplicazione di ognuno risp. coincidono con la moltiplicazione e l'addizione dell'altro.

Se B^0 è un bisistema di sostegno B , ed $x, y, z \in B$, la terna (ordinata — cfr. [1], n.° 1, 2° capov. —) (x, y, z) si dirà *s-distributiva* (in B^0) se

$$(1) \quad x(y + z) = (xy) + (xz).$$

Se ν è il numero cardinale di B , le ν^3 eguaglianze che si ottengono dalla (1) al variare della terna (x, y, z) in B^3 (ν^3 nel senso della teoria dei numeri cardinali: la terna $(x, y, z) \in B^3$ deve pensarsi come un'applicazione di $\{1, 2, 3\}$ — cfr. [1], n.° 1, fine 3° capov. — in B) si chiameranno *condizioni di s-distributività* (dell'insieme B).

Se x, y, z sono elementi di un bisistema B^0 , la terna (x, y, z)

¹⁾ I numeri fra parentesi quadre rimandano alla bibliografia alla fine della nota.

si dirà *s-isolata* (in B^0), se essa non è *s-distributiva* (in B^0) mentre tutte le rimanenti terne (di elementi di B^0) sono invece *s-distributive*.

Una terna (x, y, z) di elementi di un insieme (non vuoto) B si dirà *s-isolabile* (in B), se esiste un bisistema B^0 di sostegno B nel quale essa è *s-isolata*.

Nei numeri successivi (5-7) dimostreremo anzitutto il seguente

TEOREMA 1: *Sia ν il numero cardinale di un insieme B , e siano x, y, z elementi di B . Allora, se $\nu \geq 3$, ogni terna (x, y, z) è *s-isolabile* in B . Se invece $\nu = 2$, nessuna terna (x, y, z) è *s-isolabile* in B .*

In base a questo semplice risultato potremo dunque conche, per i bisistemi di un dato ordine ν , le ν^3 condizioni di *s-distributività* sono « *indipendenti* » (cfr. il successivo n.° 8) se e soltanto se $\nu \geq 3$.

2. - Prima di iniziare la dimostrazione del teorema 1, faremo (n.° 2-4) qualche considerazione preliminare e dimostreremo alcuni lemmi.

Consideriamo un insieme B , il cui numero cardinale ν supporremo ≥ 2 . Le terne (x, y, z) di elementi di B possono essere ripartite in classi a due a due disgiunte (diciamo *disgiunte* due insiemi se la loro intersezione è vuota) in modo che due terne appartengano alla medesima classe se e solo se esiste una corrispondenza biunivoca di B su sé stesso nella quale gli elementi delle due terne ordinatamente si corrispondono ([1], n.° 3). Di tali classi possono assumersi come rappresentanti le terne seguenti (delle quali la quinta si presenta, naturalmente, solo se $\nu \geq 3$):

$$(2) \quad (a, a, a), (a, a, b), (b, a, a), (a, b, a), (a, b, c),$$

a, b, c denotando elementi distinti di B . È allora chiaro che una qualunque di queste terne sarà *s-isolabile* in B se e solo se sono *s-isolabili* le altre terne della classe da essa rappresentata. Infatti, se due terne (x, y, z) ed (x', y', z') sono nella medesima classe, e se (x, y, z) è *s-isolata* in un bisistema B^0 di sostegno B , allora (x', y', z') è evidentemente *s-isolata* nel

bisistema, di sostegno B , « *immagine isomorfa* » di B^0 nella corrispondenza biunivoca (di B su B) in cui (x, y, z) ed (x', y', z') si corrispondono. Un *isomorfismo* fra due bisistemi va naturalmente inteso come una corrispondenza biunivoca fra i loro sostegni B e B' tale che da $x' = f(x)$, $y' = f(y)$ segue sempre $x' + y' = f(x + y)$ ed $x'y' = f(xy)$ ($x, y \in B$, $x', y' \in B'$). E due bisistemi si dicono *isomorfi* se fra essi esiste un isomorfismo.

3. - Se il sostegno C di un bisistema C^0 è un soprainsieme del sostegno B di un bisistema B^0 , e se l'addizione e la moltiplicazione di C^0 subordinano in B risp. l'addizione e la moltiplicazione di B^0 , allora C^0 dicesi un *sopra-bisistema* di B^0 (e B^0 dicesi un *sotto-bisistema* di C^0). Se inoltre l'insieme $C - B$ (degli elementi di C che non appartengono a B) non è vuoto, C^0 dicesi un *sopra-bisistema proprio* di B^0 .

LEMMA 1: *Sia C^0 un sopra-bisistema proprio di un bisistema B^0 , ed esista un $w \in C - B$ tale che (in C^0) si abbia*

$$(3) \quad vx = xv = w, \quad v + x = x + v = w$$

per ogni $v \in C - B$ e per ogni $x \in C$. Allora le terne di elementi di C contenenti almeno un elemento di $C - B$ sono tutte *s-distributive* (in C^0).

Infatti, se $x, y, z \in C$ e $v \in C - B$, in C^0 si ha $v(y + z) = w$, $(vy) + (vz) = w + w = w$; $x(v + z) = xv = w$, $(xv) + (xz) = w + (xz) = w$; $x(y + v) = xv = w$, $(xy) + (xv) = (xy) + w = w$.

Se denotiamo con ω l'operazione in un gruppoide di sostegno G , l'elemento di G associato da ω alla coppia (ordinata) (x, y) di elementi di G (cioè il « risultato » dell'operazione ω) si può rappresentare col simbolo $x\omega y$ (cfr. [3], p. 67). Quindi la somma e il prodotto di due qualsiasi elementi x, y di un bisistema B^0 si potrebbero pure (ove ciò fosse opportuno) rappresentare risp. coi simboli

$$(4) \quad x\omega y, \quad x\mu y.$$

Due gruppoidi con le operazioni rispettive ω e ω diconsi *opposti* (e si dice che ognuno è l'*opposto* dell'altro) se essi

hanno lo stesso sostegno G e se

$$x\omega y = y\bar{\omega}x,$$

qualunque siano $x, y \in G$, (cfr., ad es., [2], pp. 65, 3).

Il gruppoide costituito dal sostegno B di un bisistema B^0 e dalla addizione (risp. moltiplicazione) di B^0 si dirà il *gruppoide additivo* (risp. *moltiplicativo*) di B^0 , (cfr., ad es., [5], p. 50).

Due bisistemi col medesimo sostegno si diranno α -*opposti* (risp. μ -*opposti*) se coincidono i loro gruppoidi moltiplicativi (risp. additivi) mentre sono opposti i loro gruppoidi additivi (risp. moltiplicativi)²⁾; si diranno invece *opposti* se sono opposti sia i loro gruppoidi additivi che i loro gruppoidi moltiplicativi (cfr. [2], p. 116).

Due bisistemi (oppure due gruppoidi) si diranno *antisomorfi* se ognuno è isomorfo all'opposto dell'altro. Per *antisomorfismo* fra due bisistemi dovrà dunque intendersi una corrispondenza biunivoca g fra i loro sostegni B e B' tale che da $x' = g(x)$, $y' = g(y)$ ($x, y \in B$, $x', y' \in B'$) segua sempre $y' + x' = g(x + y)$ ed $y'x' = g(xy)$, (cfr. [5], p. 72).

LEMMA 2: *Se due bisistemi sono α -opposti, e se la terna (x, y, z) è s -distributiva in uno di essi, allora la terna (x, z, y) è s -distributiva nell'altro.*

Infatti, detto B il comune sostegno e denotata (cfr. (4)) con xay la somma nell'un bisistema e con $x\bar{\alpha}y$ nell'altro ($x, y \in B$), si ha appunto $x(z\bar{\alpha}y) = x(y\alpha z) = (xy)\alpha(xz) = (xz)\bar{\alpha}(xy)$.

4. - Se G^0 è un gruppoide qualsiasi di sostegno G , ed ω la sua operazione, un elemento u di G^0 si dirà un'*unità sinistra* (in G^0) se $u\omega t = t$ per ogni $t \in G$; si dirà invece un'*unità destra* se $t\omega u = t$ per $t \in G$. Un $u \in G$ che sia contemporaneamente unità sinistra e destra si dirà un'*unità* (di G^0).

Un elemento v del gruppoide G^0 si dirà uno *zero sinistro* (risp. *destro*) se $v\omega t = v$ (risp. $t\omega v = v$) per ogni $t \in G$. Un

²⁾ Si osservi che l' α -opposto (il μ -opposto) di un bisistema esiste soltanto se non sono opposti i suoi gruppoidi additivo e moltiplicativo.

$v \in G$ che sia contemporaneamente uno zero sinistro e destro si dirà uno *zero* (di G^0).

Un elemento x del gruppoide G^0 tale che $x\alpha x = x$ si dirà un *idempotente* (in G^0).

Sia B^0 un bisistema di sostegno B . Per un' *α -unità sinistra*, un' *α -unità destra*, un' *α -unità*, un *α -zero sinistro*, un *α -zero destro*, un *α -zero*, un *α -idempotente* (di B^0) s'intenderà rispettivamente un'*unità sinistra*, un'*unità destra*, un'*unità*, uno *zero sinistro*, uno *zero destro*, uno *zero*, un *idempotente* del gruppoide additivo di B^0 .

Il precedente capoverso, ove si legga μ invece di α , e moltiplicativo invece di additivo, fornisce poi le definizioni di *μ -unità sinistra*, *μ -unità destra*, *μ -unità*, *μ -zero sinistro*, *μ -zero destro*, *μ -zero*, *μ -idempotente* in un bisistema B^0 .

Per un'*unità sinistra* di un bisistema B^0 s'intenderà un elemento di B^0 che sia contemporaneamente un' *α -unità sinistra* e una *μ -unità sinistra*. Analogamente verranno definiti una *unità destra*, un'*unità*, uno *zero sinistro*, uno *zero destro*, uno *zero*, un *idempotente* di B^0 .

Si faccia attenzione alle definizioni date nei tre precedenti capoversi, perchè esse sono (almeno in buona parte) inconsuete. Volendo, esse si potrebbero rendere più espressive dicendo « *unità sinistra additiva* » invece di « *α -unità sinistra* », « *unità sinistra moltiplicativa* » invece di « *μ -unità sinistra* », « *unità sinistra sia additiva che moltiplicativa* » invece di « *unità sinistra* », e così via.

Siano x, y, z elementi di un bisistema B^0 ; la dimostrazione dei seguenti lemmi è allora immediata.

LEMMA 3: *Se x è un idempotente, la terna (x, x, x) è s -distributiva.*

LEMMA 4: *Se x è una μ -unità sinistra, la terna (x, y, z) è s -distributiva.*

LEMMA 5: *Se x è contemporaneamente un μ -zero sinistro ed un α -idempotente, la terna (x, y, z) è s -distributiva.*

LEMMA 6: *Se z è uno zero destro, la terna (x, y, z) è s -distributiva.*

LEMMA 7: Se z è contemporaneamente un μ -zero destro e un' α -unità destra, la terna (x, y, z) è s -distributiva.

LEMMA 8: Se y è contemporaneamente un α -zero sinistro e un μ -zero destro, la terna (x, y, z) è s -distributiva.

LEMMA 9: Se y è contemporaneamente un' α -unità sinistra e un μ -zero destro, la terna (x, y, z) è s -distributiva.

LEMMA 10: Se x è un' α -unità destra e z un'unità destra, la terna (x, y, z) è s -distributiva.

LEMMA 11: Se x è un' α -unità sinistra ed y è contemporaneamente un' α -unità sinistra e una μ -unità destra, la terna (x, y, z) è s -distributiva.

LEMMA 12: Se x è un α -zero sinistro ed y è contemporaneamente un α -zero sinistro e una μ -unità destra, la terna (x, y, z) è s -distributiva.

5. - L'insieme costituito dagli elementi *distinti* a, b, c, \dots verrà sempre rappresentato col simbolo $\{a, b, c, \dots\}$.

Dimostriamo allora le cinque proposizioni seguenti.

I) In $B = \{a, b, c\}$ la terna (a, a, a) è s -isolabile. Essa è infatti isolata nel bisistema di sostegno B definito dalle due seguenti tabelle (cfr. [3], p. 68):

$$(5) \quad \begin{array}{c|ccc} \alpha & a & b & c \\ \hline a & a & c & c \\ b & c & c & c \\ c & c & c & c \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} \mu & a & b & c \\ \hline a & b & c & c \\ b & c & c & c \\ c & c & c & c \end{array}$$

E invero $a(a + a) = aa = b$, mentre $(aa) + (aa) \neq b$ (tutte le somme son $\neq b$), quindi (a, a, a) non è s -distributiva. Inoltre, se $(x, y, z) \neq (a, a, a)$ ($x, y, z \in B$), non può essere $x(y + z) = b$ (poichè questa eguaglianza implicherebbe $x = a$, $y + z = a$, e quest'ultima, a sua volta, $y = a$, $z = a$, contro l'ipotesi), quindi $x(y + z) = c$; né può essere $(xy) + (xz) = a$ (poichè questa eguaglianza implicherebbe $xy = a$, $xz = a$, mentre tutti i prodotti son $\neq a$), quindi $(xy) + (xz) = c$, cioè la terna (x, y, z) è s -distributiva. Dunque (a, a, a) è appunto s -isolata.

II) In $B = \{a, b, c\}$ la terna (a, a, b) è *s-isolabile*. Essa è infatti *s-isolata* nel bisistema di sostegno B definito dalle due seguenti tabelle:

$$(6) \quad \begin{array}{c|ccc} \alpha & a & b & c \\ \hline a & c & a & c \\ b & c & c & c \\ c & c & c & c \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} \mu & a & b & c \\ \hline a & b & c & c \\ b & c & c & c \\ c & c & c & c \end{array}$$

E invero (ragionamento analogo a quello fatto per dimostrare la I) $a(a + b) \neq (aa) + (ab)$, mentre $(x, y, z) \neq (a, a, b)$ implica $x(y + z) = (xy) + (xz) (=c)$. Anche la dimostrazione delle tre proposizioni successive è perfettamente analoga a quella della I).

III) In $B = \{a, b, c\}$ la terna (b, a, a) è *s-isolabile*. Essa è infatti *s-isolata* nel bisistema di sostegno B definito dalle due seguenti tabelle:

$$(7) \quad \begin{array}{c|ccc} \alpha & a & b & c \\ \hline a & a & c & c \\ b & c & c & c \\ c & c & c & c \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} \mu & a & b & c \\ \hline a & c & c & c \\ b & b & c & c \\ c & c & c & c \end{array}$$

IV) In $B = \{a, b, c\}$ la terna (a, b, a) è *s-isolabile*. Essa è infatti *s-isolata* nel bisistema di sostegno B definito dalle due seguenti tabelle:

$$(8) \quad \begin{array}{c|ccc} \alpha & a & b & c \\ \hline a & c & c & c \\ b & a & c & c \\ c & c & c & c \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} \mu & a & b & c \\ \hline a & b & c & c \\ b & c & c & c \\ c & c & c & c \end{array}$$

Si osservi che il bisistema definito dalle (8) è α -opposto di quello definito dalle (6) (cfr. n.° 3, lemma 2).

V) In $B = \{a, b, c\}$ la terna (a, b, c) è *s-isolabile*. Essa è infatti *s-isolata* nel bisistema di sostegno B definito dalle due seguenti tabelle:

$$(9) \quad \begin{array}{c|ccc} \alpha & a & b & c \\ \hline a & c & c & c \\ b & c & c & b \\ c & c & c & c \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} \mu & a & b & c \\ \hline a & c & a & c \\ b & c & c & c \\ c & c & c & c \end{array}$$

6. - Dare le due tabelle, risp. di addizione e di moltiplicazione,

$$(10) \quad \begin{array}{c|cc} \alpha & a & b \\ \hline a & s_{11} & s_{12} \\ b & s_{21} & s_{22} \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \mu & a & b \\ \hline a & p_{11} & p_{12} \\ b & p_{21} & p_{22} \end{array} \quad (s_{ij}, p_{ij} = a, b; i, j = 1, 2)$$

di un bisistema B^0 di sostegno $B = \{a, b\}$ equivale evidentemente a dare la 8-upla (ordinata)

$$(s_{11}, s_{12}, s_{21}, s_{22}, p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22}).$$

Perciò il bisistema B^0 di sostegno $B = \{a, b\}$ definito dalle due tabelle (10) verrà denotato con

$$(11) \quad B^0(s_{11}, \dots, p_{22}).$$

Si osservi che, poichè vi sono 16 ($=2^4$) gruppidi (distinti) di sostegno $\{a, b\}$, i bisistemi (distinti) di sostegno $B = \{a, b\}$ sono 240 (tanti cioè quante sono le disposizioni di 16 oggetti a due a due).

Dimostriamo adesso le altre quattro proposizioni seguenti.

VI) In un bisistema B^0 di sostegno $B = \{a, b\}$ la terna (a, a, a) è s -distributiva se e soltanto se vi è s -distributiva la terna (a, b, b) .

i) Infatti, supponiamo che in $B^0 (s_{11}, \dots, p_{22})$ la terna (a, a, a) non sia s -distributiva. Allora (n.º 4, lemma 3) $(s_{11}, p_{11}) \neq (a, a)$, quindi $(s_{11}, p_{11}) = (a, b), (b, a), (b, b)$ (s'intenda, e così pure nel seguito, $(s_{11}, p_{11}) = (a, b)$, oppure $= (b, a)$, oppure $= (b, b)$); si ricordi inoltre che due n -uple sono eguali se e solo se sono eguali gli elementi di egual posto. Occupiamoci separatamente di questi tre casi.

1) Sia inoltre

$$s_{11} = a, \quad p_{11} = b.$$

Allora $a(a + a) = aa = b$, $(aa) + (aa) = b + b = s_{22}$, donde (per la non s -distributività di (a, a, a)) $s_{22} \neq b$, cioè

$$s_{22} = a.$$

Ne segue $a(b + b) = aa = b$, $(ab) + (ab) = p_{12} + p_{12} = a$ (poichè $s_{11} = s_{22} = a$), quindi (a, b, b) non è s -distributiva.

2) Sia inoltre

$$s_{11} = b, \quad p_{11} = a.$$

Allora $a(a + a) = ab = p_{12}$, $(aa) + (aa) = a + a = b$, donde

$$p_{12} = a.$$

Ne segue $a(b + b) = as_{22} = a$ (poichè $p_{11} = p_{12} = a$), $(ab) + (ab) = a + a = b$, dunque (a, b, b) non è s -distributiva.

3) Sia inoltre

$$s_{11} = b, \quad p_{11} = b.$$

Allora $a(a + a) = ab = p_{12}$, $(aa) + (aa) = b + b = s_{22}$, donde $s_{22} \neq p_{12}$, cioè $(s_{22}, p_{12}) = (a, b), (b, a)$. Poichè $a(b + b) = as_{22} = aa, ab$, cioè $a(b + b) = b, p_{12}$, mentre $(ab) + (ab) = p_{12} + p_{12} = a + a, b + b$, cioè $(ab) + (ab) = b, s_{22}$, risulta in entrambi i casi $a(b + b) \neq (ab) + (ab)$, dunque la terna (a, b, b) non è s -distributiva.

ii) Supponiamo ora che in $B^0(s_{11}, \dots, p_{22})$ non sia s -distributiva la terna (a, b, b) . Allora (n.º 4, lemma 4) $(p_{11}, p_{12}) \neq (a, b)$, cioè

$$(12) \quad (p_{11}, p_{12}) = (a, a), (b, a), (b, b).$$

Osservato ciò, distinguiamo i due casi $s_{11} = a, s_{11} = b$.

1) Sia inoltre

$$s_{11} = a.$$

Allora (n.º 4, lemma 5) dev'essere $(p_{11}, p_{12}) \neq (a, a)$, cioè (v. (12)) $(p_{11}, p_{12}) = (b, a), (b, b)$. Occupiamoci separatamente di questi due sottocasi.

1.) Sia inoltre

$$p_{11} = b, \quad p_{12} = a.$$

Allora $a(b + b) = as_{22} = aa, ab$, cioè $a(b + b) = b, a$, mentre $(ab) + (ab) = a + a = a$, donde (per la non s -distributività di (a, b, b))

$$s_{22} = a.$$

Ne segue $a(a + a) = aa = b$, $(aa) + (aa) = b + b = a$, quindi la terna (a, a, a) non è s -distributiva.

1₂) Sia inoltre

$$p_{11} = b, \quad p_{12} = b.$$

Allora $a(b + b) = b$, $(ab) + (ab) = b + b = s_{22}$, donde

$$s_{22} = a.$$

Ne segue $a(a + a) = b$, $(aa) + (aa) = b + b = a$, quindi (a, a, a) non è s -distributiva.

2) Sia inoltre

$$s_{11} = b.$$

Distinguiamo allora i tre sottocasi (12).

2₁) Sia inoltre

$$p_{11} = a, \quad p_{12} = a.$$

Allora $a(a + a) = ab = a$, $(aa) + (aa) = a + a = b$, quindi (a, a, a) non è s -distributiva.

2₂) Sia inoltre

$$p_{11} = b, \quad p_{12} = a.$$

Allora $a(b + b) = as_{22} = aa$, ab , cioè $a(b + b) = b$, a , mentre $(ab) + (ab) = a + a = b$, donde

$$s_{22} = b.$$

Ne segue $a(a + a) = ab = a$, $(aa) + (aa) = b + b = b$, quindi (a, a, a) non è s -distributiva.

2₃) Sia inoltre

$$p_{11} = b, \quad p_{12} = b.$$

Allora (a, a, a) non è s -distributiva (cfr. il preced. caso 1₂)).

In conclusione abbiamo provato che, in un bisistema di sostegno $\{a, b\}$, la non s -distributività di (a, a, a) implica quella di (a, b, b) , e viceversa. La VI) è perciò dimostrata.

VII) In un bisistema B^0 di sostegno $B = \{a, b\}$ la terna (a, a, b) è s -distributiva se e soltanto se vi è s -distributiva la terna (a, b, a) .

i) Infatti, supponiamo che in $\check{B}^0(s_{11}, \dots, p_{22})$ la terna (a, a, b) non sia s -distributiva. Allora (n.º 4, lemma 4) $(p_{11}, p_{12}) \neq (a, b)$, cioè vale la (12). Distingueremo allora i due casi $s_{12} = a$, $s_{12} = b$.

1) Sia inoltre

$$s_{12} = a.$$

Occupiamoci allora separatamente dei tre sottocasi (12).

1₁) Sia inoltre

$$p_{11} = a, \quad p_{12} = a.$$

Allora $a(a + b) = a$, $(aa) + (ab) = a + a = s_{11}$, donde

$$s_{11} = b.$$

Ne segue $a(b + a) = a$, $(ab) + (aa) = a + a = b$, quindi (a, b, a) non è s -distributiva.

1₂) Sia inoltre

$$p_{11} = b, \quad p_{12} = a.$$

Allora $a(a + b) = aa = b$, $(aa) + (ab) = b + a = s_{21}$, donde

$$s_{21} = a.$$

Ne segue $a(b + a) = aa = b$, $(ab) + (aa) = a + b = a$, quindi (a, b, a) non è s -distributiva.

1₃) Sia inoltre

$$p_{11} = b, \quad p_{12} = b.$$

Allora $a(a + b) = b$, $(aa) + (ab) = b + b = s_{22}$, donde

$$s_{22} = a.$$

Ne segue $a(b + a) = b$, $(ab) + (aa) = b + b = a$, quindi (a, b, a) non è s -distributiva.

2) Sia inoltre

$$s_{12} = b.$$

Distinguiamo allora i tre sottocasi (12).

2₁) Sia inoltre

$$p_{11} = a, \quad p_{12} = a.$$

Allora (a, b, a) non è s -distributiva (cfr. il preced. caso 1₁)).

2₂) Sia inoltre

$$p_{11} = b, \quad p_{12} = a.$$

Allora $a(a + b) = ab = a$, $(aa) + (ab) = b + a = s_{21}$, donde

$$s_{21} = b.$$

Ne segue $a(b + a) = ab = a$, $(ab) + (aa) = a + b = b$, quindi (a, b, a) non è s -distributiva.

2₃) Sia inoltre

$$p_{11} = b, \quad p_{12} = b.$$

Allora (a, b, a) non è s -distributiva (cfr. il preced. caso 1₃)).

ii) Supponiamo ora che in $B^0(s_{11}, \dots, p_{22})$ non sia s -distributiva la terna (a, b, a) . Allora (n.º 4, lemma 4) vale la (12). Distinguiamo i due casi $s_{21} = a$, $s_{21} = b$.

1) Sia inoltre

$$s_{21} = a.$$

Occupiamoci allora separatamente dei tre sottocasi (12).

1₁) Sia inoltre

$$p_{11} = a, \quad p_{12} = a.$$

Allora $a(b + a) = a$, $(ab) + (aa) = a + a = s_{11}$, donde

$$s_{11} = b.$$

Ne segue $a(a + b) = a$, $(aa) + (ab) = a + a = b$, quindi (a, a, b) non è s -distributiva.

1₂) Sia inoltre

$$p_{11} = b, \quad p_{12} = a.$$

Allora $a(b + a) = aa = b$, $(ab) + (aa) = a + b = s_{12}$, donde

$$s_{12} = a.$$

Ne segue $a(a + b) = aa = b$, $(aa) + (ab) = b + a$, quindi (a, a, b) non è s -distributiva.

1₃) Sia inoltre

$$p_{11} = b, \quad p_{12} = b.$$

Allora $a(b + a) = b$, $(ab) + (aa) = b + b = s_{22}$, donde

$$s_{22} = a.$$

Ne segue $a(a + b) = b$, $(aa) + (ab) = b + b = a$. quindi (a, a, b) non è s -distributiva.

2) Sia inoltre

$$s_{21} = b.$$

Distinguiamo allora i tre sottocasi (12).

2₁) Sia inoltre

$$p_{11} = a, \quad p_{12} = a.$$

Allora (a, a, b) non è s -distributiva (cfr. il preced. caso 1₁)).

2₂) Sia inoltre

$$p_{11} = b, \quad p_{12} = a.$$

Allora $a(b + a) = ab = a$, $(ab) + (aa) = a + b = s_{12}$, donde

$$s_{12} = b.$$

Ne segue $a(a + b) = ab = a$, $(aa) + (ab) = b + a = b$, quindi (a, a, b) non è s -distributiva.

2₃) Sia inoltre

$$p_{11} = b, \quad p_{12} = b$$

Allora (a, a, b) non è s -distributiva (cfr. il preced. caso 1₃)).

In conclusione abbiamo provato che, in un bisistema di sostegno $\{a, b\}$, la non s -distributività di (a, a, b) implica quella di (a, b, a) , e viceversa. La VII) è dunque dimostrata.

VIII) *In un bisistema B^0 di sostegno $B = \{a, b\}$ la terna (b, b, b) è s -distributiva se e soltanto se vi è s -distributiva la terna (b, a, a) .*

IX) *In un bisistema B^0 di sostegno $B = \{a, b\}$ la terna (b, b, a) è s -distributiva se e soltanto se vi è s -distributiva la terna (b, a, b) .*

Infatti, queste due proposizioni VIII) e IX) sono un' immediata conseguenza risp. delle VI) e VII) applicate al bisistema, di sostegno B , immagine isomorfa di B^0 (cfr. n.º 2) mediante la corrispondenza $a \mapsto b, b \mapsto a$.

7. - La dimostrazione del teorema 1 (n.º 1) si ottiene ormai facilmente (tenuto conto delle considerazioni dei n.º 2 e 3) in base alle nove proposizioni I), ..., IX), dimostrate nei due numeri precedenti.

Infatti (v. l'enunciato del teor. 1) se $v \geq 3$, sia B_1 un qualunque sottinsieme di B costituito da tre elementi (distinti):

$$B_1 = \{a, b, c\}.$$

Allora, per le proposizioni I), ..., V) del n.° 5, esistono cinque bisistemi di sostegno B_1 in cui sono rispettivam. s -isolate le cinque terne (2). Ma allora, se $v = 3$, tutte le terne $(x, y, z) \in B^3$ sono appunto s -isolabili in $B (= B_1)$, in virtù delle osservazioni del n. 2. Se invece $v > 3$, detto B_1^0 uno qualsiasi dei suddetti cinque bisistemi di sostegno B_1 , si definiscano in B un'addizione e una moltiplicazione imponendo loro di subordinare in B_1 risp. l'addizione e la moltiplicazione di B_1^0 , e facendo le posizioni (3), con $v \in B \dot{-} B_1$, $x \in B$, w essendo un fissato elemento di $B \dot{-} B_1$. Il dato insieme B diventa allora il sostegno di un bisistema B^0 , nel quale è pure isolata (per il lemma 1 del n.° 3) quella fra le terne (2) che era isolata in B_1^0 . Ma allora, anche in questo caso (sempre per quanto osservato nel n.° 2) ogni terna $(x, y, z) \in B^3$ è appunto s -isolabile in B . E la 1ª parte del teor. 1 è dimostrata.

La seconda parte del teor. 1 ($v = 2$) risulta poi immediatamente dalle quattro proposizioni VI), ..., IX) del n.° precedente.

La dimostrazione del teorema 1 del n.° 1 è dunque completata.

8. - Approfondiamo ora lo studio delle condizioni di s -distributività (1) nei bisistemi di ordine 2.

Fissato un insieme

$$B = \{a, b\},$$

costituito da due elementi (distinti), ogni bisistema di ordine 2 è isomorfo ad uno dei bisistemi di sostegno B , quindi possiamo limitarci alla considerazione di questi ultimi.

Indicheremo allora con

$$\Sigma$$

l'insieme di tutte le 8 ($= 2^3$) condizioni di s -distributività (1), relative alle otto terne (x, y, z) di elementi di B (l'equaglianza

$x(y + z) = (xy) + (xz)$ e la terna (x, y, z) , con $x, y, z \in B$, diconsi l'una *relativa* all'altra).

Si dirà che un sottinsieme Σ_1 dell'insieme Σ è *equivalente* a Σ , se il verificarsi delle condizioni di Σ_1 in un bisistema B° di sostegno B implica sempre il verificarsi in B° di tutte le condizioni di $\Sigma \dot{-} \Sigma_1$.

Si dirà poi che un sottinsieme non vuoto Σ_2 dell'insieme Σ è costituito da condizioni *indipendenti*, se, fissata una qualunque condizione di Σ_2 , esiste sempre un bisistema di sostegno B nel quale la condizione fissata non è soddisfatta mentre tutte le rimanenti condizioni di Σ_2 vi sono invece soddisfatte.

Dalla 2ª parte del teor. 1 (n.º 1) risulta che l'insieme Σ non è costituito da condizioni indipendenti. È allora interessante il problema di determinare un sottinsieme proprio dell'insieme Σ ad esso equivalente e costituito da condizioni indipendenti. Di tale problema ci occuperemo nelle righe seguenti, dandone la soluzione completa (teor. 3).

Denotiamo con C_1, C_2, C_3, C_4 le seguenti quattro classi, costituite, ciascuna, da due terne di elementi di $B = \{a, b\}$:

$$C_1: (a, a, a), (a, b, b),$$

$$C_2: (a, a, b), (a, b, a),$$

$$C_3: (b, b, b), (b, a, a),$$

$$C_4: (b, b, a), (b, a, b).$$

Queste quattro classi C_1, C_2, C_3, C_4 sono a due a due disgiunte ed esauriscono complessivamente tutte le (otto) terne di elementi dell'insieme B .

Denotiamo ora con

©

una classe costituita da quattro terne (di elementi di $B = \{a, b\}$), delle quali una appartenente a C_1 , una a C_2 , una a C_3 ed una a C_4 .

Per quanto dimostrato nel n.º 6 (proposiz. VI), ..., IX)), abbiamo intanto il seguente

TEOREMA 2: *Se in un bisistema B° di sostegno $B = \{a, b\}$ sono s -distributive le quattro terne di una qualunque delle classi \mathcal{C} , allora tutte le otto terne (di elementi di B) sono s -distributive in B° .*

Ciò non significa altro che: Le quattro condizioni di s -distributività relative alle quattro terne di una qualunque delle classi \mathcal{C} costituiscono un insieme,

$$\Sigma_0,$$

equivalente all'insieme Σ . Ebbene, come dimostreremo nel n.º successivo, vale il seguente

TEOREMA 3: *Gli insiemi Σ_0 definiti nel precedente capoverso sono gli unici sottinsiemi dell'insieme Σ (di tutte le otto condizioni di s -distributività di $B = \{a, b\}$) ad esso equivalenti e costituiti, ciascuno, da condizioni indipendenti.*

9. - Diremo che la classe C_i ($i=1, 2, 3, 4$), (n.º 8), è s -isolata in un bisistema B° di sostegno $B = \{a, b\}$, se le due terne di C_i non sono s -distributive in B° , mentre le rimanenti sei terne vi sono invece s -distributive.

Diremo che la classe C_i ($i=1, 2, 3, 4$), (n.º 8), è s -isolabile nell'insieme $B = \{a, b\}$, se esiste un bisistema B° di sostegno B nel quale essa è s -isolata. Ebbene:

X) *Ciascuna classe C_i ($i=1, 2, 3, 4$), (n.º 8), è s -isolabile nell'insieme $B = \{a, b\}$. Infatti, C_1 è s -isolata nel bisistema di sostegno B definito dalle due seguenti tabelle:*

$$(13) \quad \begin{array}{c|cc} \alpha & a & b \\ \hline a & a & a \\ b & b & a \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \mu & a & b \\ \hline a & b & a \\ b & a & a \end{array}$$

C_2 è s -isolata nel bisistema di sostegno B definito dalle due seguenti altre:

$$(14) \quad \begin{array}{c|cc} \alpha & a & b \\ \hline a & a & a \\ b & a & b \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \mu & a & b \\ \hline a & b & a \\ b & a & a \end{array}$$

C_3 (risp. C_4) è s -isolata nel bisistema, di sostegno B , immagine isomorfa, mediante la corrispondenza $a \rightarrow b, b \rightarrow a$, di quello definito dalle (13) (risp. dalle (14)).

Mostriamo come si possa pervenire alla determinazione delle (13), (ragionamento analogo per le (14)). Supponiamo perciò C_1 s -isolata in $B^0(s_{11}, \dots, p_{22})$ (n.° 6). Allora dev'essere (n.° 4, lemma 3) $(s_{11}, p_{11}) \neq (a, a)$. Consideriamo il caso

$$s_{11} = a, \quad p_{11} = b.$$

Allora, essendo $a(a + a) = aa = b$, $(aa) + (aa) = b + b = s_{22}$, dev'essere

$$s_{22} = a.$$

Ne segue $b(a + a) = ba = p_{21}$, $(ba) + (ba) = a$, donde

$$p_{21} = a.$$

Inoltre, poichè $a(a + b) = as_{12} = aa, ab$, cioè $a(a + b) = b$, p_{12} , mentre $(aa) + (ab) = b + p_{12} = b + a, b + b$, cioè $(aa) + (ab) = s_{21}, a$, dev'essere $(s_{21}, p_{12}) \neq (a, b)$. Consideriamo perciò il sottocaso

$$s_{12} = a, \quad p_{12} = a.$$

Allora (v. terna (a, a, b) , appena esaminata)

$$s_{21} = b.$$

Se quindi si pone

$$p_{22} = a,$$

si ottengono proprio le (13), nel bisistema definito dalle quali (come subito si verifica) C_1 è effettivamente isolata.

Dimostriamo ora il teor. 3 del n.° 8. In base al teor. 2 dello stesso n.° ed alla precedente proposizione X), è intanto chiaro che uno qualunque degli insiemi Σ_0 è equivalente a Σ ed è costituito da condizioni indipendenti.

Sia allora Σ_1 un sottinsieme (proprio e non vuoto) dell'insieme Σ a questo equivalente e costituito da condizioni indipendenti, e si supponga che Σ_1 sia diverso da ciascuno degli insiemi Σ_0 . Allora Σ_1 non può essere un sottinsieme proprio di un Σ_0 (poichè, se lo fosse, non potrebbe essere equivalente a Σ , dato che le condizioni di ogni Σ_0 sono indipendenti), e perciò Σ_1 deve contenere entrambe le condizioni relative alle due terne di una stessa classe C_i ($i = 1, 2, 3, 4$) del n.° 8. Ma allora, in base alle proposiz. VI), ..., IX) del n.° 6, le condizioni di Σ_1 non possono essere indipendenti, contro l'ipotesi. Il teor. 3 del n.° 8 è dunque dimostrato.

10. - Diremo che un bisistema è *s-distributivo* se in esso sono *s-distributive* tutte le terne formate coi suoi elementi.

Il teorema 2 del n.º 8 riduce a metà il numero delle terne da esaminare per verificare se un dato bisistema di ordine 2 sia *s-distributivo*.

Consideriamo le tabelle di tutti i sedici gruppoidi di sostegno $\{a, b\}$:

1 a b a a a b a a	2 a b a a a b a b	3 a b a a b b a a	4 a b a a b b a b
5 a b a b a b a a	6 a b a b a b a b	7 a b a b b b a a	8 a b a b b b a b
9 a b a a a b b a	10 a b a a a b b b	11 a b a a b b b a	12 a b a a b b b b
13 a b a b a b b a	14 a b a b a b b b	15 a b a b b b b a	16 a b a b .b b b b

Diremo brevemente « *gruppoide n* » ($n = 1, 2, \dots, 16$) invece di « *gruppoide, di sostegno $\{a, b\}$, definito dalla tabella n* ».

Si verifica facilmente che le immagini isomorfe dei gruppoidi

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 13

mediante la corrispondenza $a \rightarrow b, b \rightarrow a$ sono rispettivamente i gruppoidi

16, 12, 8, 4, 15, 11, 7, 14, 10, 13.

Inoltre gli opposti (n.º 3) dei gruppoidi

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 15, 16

sono rispettivamente i gruppoidi

1, 2, 9, 10, 5, 6, 13, 14, 11, 12, 15, 16.

Diremo brevemente « *bisistema* (m, n) » ($m, n = 1, 2, \dots, 16; m \neq n$) invece di « *bisistema*, di sostegno $\{a, b\}$, definito dalla tabella di addizione m e dalla tabella di moltiplicazione n ». Denoteremo allora con

\mathfrak{B}

l'insieme costituito e dai seguenti quarantatré bisistemi: (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8), (1, 11), (1, 12), (1, 15), (1, 16), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (2, 8), (2, 11), (2, 12), (2, 15), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (3, 7), (3, 8), (3, 9), (3, 10), (3, 11), (3, 13), (3, 14), (3, 15), (4, 5), (4, 6), (4, 7), (4, 10), (4, 13), (5, 6), (5, 7), (5, 11), (5, 15), (6, 7), (6, 11), (7, 13), e dai loro duali (n.º 1). L'insieme \mathfrak{B} consta dunque di ottantasei bisistemi di sostegno $\{a, b\}$. È agevole verificare che:

XI) Ogni bisistema di sostegno $\{a, b\}$ è isomorfo o anti-isomorfo (n.º 3) ad uno dei bisistemi dell'insieme \mathfrak{B} .

Basta infatti verificare che ogni bisistema, di sostegno $\{a, b\}$, non appartenente all'insieme \mathfrak{B} figura *i*) fra le immagini isomorfe dei bisistemi di \mathfrak{B} mediante la corrispondenza $a \rightarrow b, b \rightarrow a$, oppure *ii*) fra i bisistemi opposti di tali immagini isomorfe, oppure *iii*) fra gli opposti dei bisistemi di \mathfrak{B} .

Applicando il teor. 2 del n.º 8 si trova poi facilmente che:

XII) Fra i bisistemi, di sostegno $\{a, b\}$, appartenenti all'insieme \mathfrak{B} , quelli *s-distributivi* sono i seguenti: (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (2, 7), (2, 8), (2, 12), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 5), (4, 6), (4, 7), (4, 10), (4, 13), (5, 4), (6, 4), (7, 4), (7, 6), (7, 13), (9, 3), (10, 3), (10, 4), (11, 1), (11, 2), (11, 3), (12, 1), (12, 2), (13, 4).

Nel successivo § 2, determineremo (fra l'altro) tutti i bisistemi *s-distributivi* di sostegno $\{a, b\}$ (n.º 13, coroll. 1)

§ 2

11. - Se B^0 è un bisistema di sostegno B , ed $x, y, z \in B$, la terna (x, y, z) si dirà *d-distributiva* (in B^0) se

$$(15) \quad (x + y)z = (xz) + (yz).$$

Se ν è il numero cardinale di B , le ν^8 eguaglianze che si ottengono dalla (15) al variare della terna (x, y, z) in B^8 si chiameremo *condizioni di d -distributività* (dell'insieme B).

Le definizioni di terna *d -isolata* e *d -isolabile* si deducono rispettivam. dal 5° e dal 6° capoverso del n.° 1 leggendo d invece di s .

LEMMA 13: *Se due bisistemi sono opposti (n.° 3), e se la terna (x, y, z) è s -distributiva (risp. d -distributiva) in uno di essi, allora la terna « opposta » (z, y, x) è d -distributiva (risp. s -distributiva) nell'altro.*

Dimostrazione: Detto B il comune sostegno e denotati (cfr. (4)) con xay e $x\bar{y}$ risp. la somma e il prodotto nell'un bisistema. con $x\bar{a}y$ e $x\bar{y}$ nell'altro $(x, y \in B)$, si ha infatti $(z\bar{a}y)_{\mu}x = x_{\mu}(yaz) = (x\bar{y})\alpha(x\mu z) = (z\bar{\mu}x)\bar{\alpha}y_{\bar{\mu}x}$ (risp. $z\bar{\mu}(y\bar{\alpha}x) = (xay)\mu z = (x\mu z)\alpha(y\mu z) = (z\bar{\mu}y)\bar{\alpha}(z\bar{\mu}x)$).

Dal teor. 1 del n.° 1, in virtù del precedente lemma 13, si ottiene immediatamente il seguente

TEOREMA 1': *Sia ν il numero cardinale di un insieme B , e siano x, y, z elementi di B . Allora, se $\nu \geq 3$, ogni terna (x, y, z) è d -isolabile in B . Se invece $\nu = 2$, nessuna terna (x, y, z) è d -isolabile in B .*

Basta infatti osservare che (per il lemma 13) una terna di elementi di un insieme B è d -isolabile in B se e solo se vi è s -isolabile la terna opposta.

In base al preced. teor. 1' si può dunque affermare che, per i bisistemi di un dato ordine ν , le ν^8 condizioni di d -distributività sono « indipendenti » (cfr. n.° 8) se e soltanto se $\nu \geq 3$.

Dalle quattro proposizioni VI), ..., IX) del n.° 6, tramite il lemma 13, si ottengono poi subito le quattro seguenti:

VI) *In un bisistema B^0 di sostegno $B = \{a, b\}$ la terna (a, a, a) è d -distributiva se e soltanto se vi è d -distributiva la terna (b, b, a) .*

Infatti (ragionamento analogo per le tre proposizioni successive), se (a, a, a) è d -distributiva in B^0 , la terna opposta (a, a, a) è s -distributiva nell'opposto di B^0 , nel quale opposto (per la VI)) è quindi s -distributiva (a, b, b) ; ma allora la terna (b, b, a) è appunto d -distributiva in B^0 . Similmente si dimostra il viceversa.

VII') In un bisistema B^0 di sostegno $B = \{a, b\}$ la terna (b, a, a) è d -distributiva se e soltanto se vi è d -distributiva la terna (a, b, a) .

VIII') In un bisistema B^0 di sostegno $B = \{a, b\}$ la terna (b, b, b) è d -distributiva se e soltanto se vi è d -distributiva la terna (a, a, b) .

IX') In un bisistema B^0 di sostegno $B = \{a, b\}$ la terna (a, b, b) è d -distributiva se e soltanto se vi è d -distributiva la terna (b, a, b) .

12. - Otterremo ora facilmente risultati analoghi a quelli esposti nei n.¹ 8 e 9.

Indichiamo con

$$\Sigma'$$

l'insieme di tutte le otto condizioni di d -distributività (15). *relative* (cfr. n.^o 8) alle otto terne di elementi dell'insieme $B = \{a, b\}$.

Denotiamo con C'_1, C'_2, C'_3, C'_4 le seguenti quattro classi, costituite, ciascuna, da due terne di elementi di $B = \{a, b\}$:

$$C'_1: (a, a, a), (b, b, a),$$

$$C'_2: (b, a, a), (a, b, a),$$

$$C'_3: (b, b, b), (a, a, b),$$

$$C'_4: (a, b, b), (b, a, b).$$

Queste quattro classi C'_i ($i=1, 2, 3, 4$) sono a due a due disgiunte (n.^o 2) ed esauriscono complessivamente tutte le (otto) terne di elementi dell'insieme B .

Le definizioni di classe C'_i *d-isolata* e *d-isolabile* si deducono risp. dal 1^o e dal 2^o capoverso del n.^o 9 leggendo C'_i invece di C_i , e d - invece di s .

X') *Ciascuna classe C'_i ($i=1, 2, 3, 4$) è d-isolabile nell'insieme $B = \{a, b\}$.*

Dimostrazione: si osservi che le due terne di C'_i ($i=1, 2, 3, 4$) sono le opposte di quelle della classe C_i (n.^o 8). La proposiz. X') è allora un'immediata conseguenza della X) del n.^o 9, tramite il lemma 13 del n.^o precedente.

Denotiamo ora con

$$\mathcal{C}'$$

una classe costituita da quattro terne (di elementi di $B = \{a, b\}$), delle quali una appartenente a C_1' , una a C_2' , una a C_3' ed una a C_4' .

TEOREMA 2': *Se in un bisistema B^0 di sostegno $B = \{a, b\}$ sono d -distributive le quattro terne di una qualunque delle classi \mathcal{C}' , allora tutte le otto terne (di elementi di B) sono d -distributive in B^0 .*

Dimostrazione: v. proposizioni VI'), ..., IX') del preced. n.° 11.

In base al teor. 2', le quattro condizioni di d -distributività relative alle quattro terne di una qualunque delle classi \mathcal{C}' costituiscono un insieme,

$$\Sigma'_0,$$

equivalente (cfr. n.° 8) all'insieme Σ' .

TEOREMA 3': *Gli insiemi Σ'_0 definiti nel precedente capocedente sono gli unici sottinsiemi dell'insieme Σ' (di tutte le otto condizioni di d -distributività di $B = \{a, b\}$) ad esso equivalenti e costituiti, ciascuno, da condizioni indipendenti.*

Dimostrazione: Per i precedenti teor. 2' e proposiz. X'), ogni Σ'_0 è equivalente a Σ' ed è appunto costituito da condizioni indipendenti. Che poi non vi siano altri sottinsiemi (propri e non vuoti) di Σ' che godano di queste due stesse proprietà, si riconosce con un ragionamento perfettamente analogo a quello fatto nell'ult. capov. del n. 9.

13. - Diremo che un bisistema è d -distributivo, se in esso sono d -distributive tutte le terne formate coi suoi elementi.

Il teor. 2' del preced. n.° 12 riduce a metà il numero delle terne da esaminare per verificare se un dato bisistema di ordine 2 sia d -distributivo.

Sfruttando appunto il teor. 2 del n.° 8 e il teor. 2' del n.° 12, determineremo adesso (a conclusione delle considerazioni del n.° 10) tutti i bisistemi s -distributivi (coroll. 1) e

tutti i bisistemi d -distributivi (coroll. 2) di sostegno $\{a, b\}$.
Premettiamo due lemmi.

LEMMA 14: *Se, in un antisonorfismo (n.º 3) fra due bisistemi, agli elementi x, y, z dell'uno corrispondono nell'ordine gli elementi x_1, y_1, z_1 dell'altro, e se la terna (x, y, z) è s -distributiva (risp. d -distributiva), allora la terna (z_1, y_1, x_1) è d -distributiva (risp. s -distributiva).*

Si osservi che di questo lemma 14 (la cui dimostrazione è immediata) il lemma 13 del n.º 11 è un caso particolare (che si ottiene supponendo che i due bisistemi abbiano lo stesso sostegno e che l'antisonorfismo sia la corrispondenza identica). Conseguenza evidente del lemma 14 è poi il seguente

LEMMA 15: *Se due bisistemi sono antisonorfi (n.º 3), e se uno di essi è s -distributivo (risp. d -distributivo), allora l'altro è d -distributivo (risp. s -distributivo).*

Riprendiamo allora le notazioni del n.º 10. Applicando il teor. 2' si trova facilmente che:

XIII) *Fra i bisistemi, di sostegno $\{a, b\}$, appartenenti all'insieme \mathfrak{B} (n.º 10), quelli d -distributivi sono i seguenti: (1,2), (2,1), (2,4), (2,12), (3,1), (3,2), (3,9), (3,10), (4,1), (4,2), (4,3), (4,5), (4,6), (4,7), (4,10), (4,13), (7,6), (10,3), (10,4), (11,1), (11,2), (12,1), (12,2), (13,7).*

Dalla proposiz. XII) del n.º 10 e dalla preced. XIII), in virtù della proposiz. XI) del n.º 10 e del precedente lemma 15, discendono immediatamente i due corollari seguenti.

COROLLARIO 1: *Ogni bisistema s -distributivo di sostegno $\{a, b\}$ è i) un'immagine isomorfa di uno dei bisistemi elencati nella proposiz. XII) del n.º 10, oppure ii) un'immagine antisonomorfa di uno dei bisistemi elencati nella preced. proposiz. XIII).*

COROLLARIO 2: *Ogni bisistema d -distributivo di sostegno $\{a, b\}$ è i) un'immagine isomorfa di uno dei bisistemi elencati nella preced. proposiz. XIII), oppure ii) un'immagine antisonomorfa di uno dei bisistemi elencati nella proposiz. XII) del n.º 10.*

§ 3

14. - Se B° è un bisistema di sostegno B ed $x, y, z \in B$, la terna (x, y, z) si dirà *distributiva* (in B°) se essa è contemporaneamente *s-distributiva* (n.º 1) e *d-distributiva* (n.º 11) in B° .

Se ν è il numero cardinale di B , le $2\nu^3$ eguaglianze che si ottengono dalle (1), (15) al variare della terna (x, y, z) in B^3 ($2\nu^3$ nel senso della teoria dei numeri cardinali) si chiameranno *condizioni di distributività* (dell'insieme B).

L'insieme,

$$\Delta,$$

di tutte le $2\nu^3$ condizioni di distributività di B è dunque la riunione dell'insieme, Σ , di tutte le ν^3 condizioni di *s-distributività* di B (cfr. n. 8) e dell'insieme, Σ' , di tutte le ν^3 condizioni di *d-distributività* di B (cfr. n.º 12):

$$(16) \quad \Delta = \Sigma + \Sigma'.$$

Le definizioni di « sottinsieme di Δ equivalente a Δ » e di « sottinsieme di Δ costituito da condizioni *indipendenti* » si deducono rispettivam. dal 4º e dal 5º capov. del n.º 8 leggendo Δ invece di Σ .

Ebbene (come vedremo nel n.º successivo), per i bisistemi di un dato ordine ν , le $2\nu^3$ condizioni di distributività sono *indipendenti se e soltanto se* $\nu \geq 3$. Dimostreremo, infatti, il seguente

TEOREMA 4: *Sia $\nu \geq 2$ il numero cardinale di un insieme B , e siano x, y, z elementi di B . Allora, se e soltanto se $\nu \geq 3$, ogni terna (x, y, z) è s-isolata in un bisistema d-distributivo di sostegno B ed è inoltre d-isolata in un bisistema s-distributivo di sostegno B .*

15. - Premettiamo il seguente

LEMMA 1': *Siano soddisfatte tutte le ipotesi del lemma 1 (n.º 3). Allora le terne di elementi di C contenenti almeno un elemento di $C - B$ sono tutte distributive (in C°).*

Dimostrazione: In base al lemma 1, basta verificare che le terne di cui si parla nel precedente enunciato sono tutte d -distributive in C^0 .

Premettiamo inoltre la proposizione seguente.

XIV) Ciascuna delle cinque terne (a, a, a) , (a, a, b) , (b, a, a) , (a, b, a) , (a, b, c) è s -isolata (n.° 1) in un bisistema d -distributivo (n. 13) di sostegno $B = \{a, b, c\}$.

Dimostrazione: Con ragionamenti analoghi a quello fatto nel n.° 5 per dimostrare la I), si riconosce facilmente che:

1°) La terna (a, a, a) è s -isolata nel bisistema d -distributivo di sostegno $B = \{a, b, c\}$ definito dalle due seguenti tabelle:

$$(17) \quad \begin{array}{c|ccc} \alpha & a & b & c \\ \hline a & b & c & c \\ b & c & c & c \\ c & c & c & c \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} \mu & a & b & c \\ \hline a & c & b & c \\ b & c & c & c \\ c & c & c & c \end{array}$$

2°) La terna (a, a, b) è s -isolata nel bisistema d -distributivo di sostegno $B = \{a, b, c\}$ definito dalle due seguenti tabelle:

$$(18) \quad \begin{array}{c|ccc} \alpha & a & b & c \\ \hline a & c & b & c \\ b & c & c & c \\ c & c & c & c \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} \mu & a & b & c \\ \hline a & c & a & c \\ b & c & c & c \\ c & c & c & c \end{array}$$

3°) Il bisistema di sostegno $B = \{a, b, c\}$ definito dalle due tabelle (7), nel quale la terna (b, a, a) è s -isolata (n.° 5, III)), è d -distributivo.

4°) La terna (a, b, a) è s -isolata nel bisistema d -distributivo di sostegno $B = \{a, b, c\}$ definito dalle due seguenti tabelle:

$$(19) \quad \begin{array}{c|ccc} \alpha & a & b & c \\ \hline a & c & c & c \\ b & b & c & c \\ c & c & c & c \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} \mu & a & b & c \\ \hline a & c & a & c \\ b & c & c & c \\ c & c & c & c \end{array}$$

5°) Il bisistema di sostegno $B = \{a, b, c\}$ definito dalle due tabelle (9), nel quale la terna (a, b, c) è s -isolata (n.° 5, V)), è d -distributivo.

Dimostriamo adesso il teor. 4 del n.º precedente.

Se $\nu \geq 3$, basta fare un ragionamento analogo a quello fatto nel n.º 7, poggiato adesso sulla proposiz. XIV) e sul lemma 1' di questo n.º, per riconoscere facilmente che ogni terna $(x, y, z) \in B^3$ è appunto s -isolata in un bisistema d -distributivo di sostegno B .

Ne segue allora immediatamente, per il lemma 13 del n.º 11, che ogni terna $(x, y, z) \in B^3$ è appunto d -isolata in un bisistema s -distributivo di sostegno B : l'opposto di quello, d -distributivo, in cui è s -isolata (z, y, x) .

La seconda parte del teor. 4 (« soltanto se ») è poi conseguenza evidente della 2ª parte del teor. 1 del n.º 1 ($\nu = 2$).

16. - Ci occuperemo in questo numero delle condizioni di distributività nei bisistemi di ordine 2.

Fissato il sostegno $B = \{a, b\}$, consideriamo l'insieme $\Delta = \Sigma + \Sigma'$ (n.º 14) di tutte le 16 ($= 2 \cdot 2^3$) condizioni di distributività di B .

Denoteremo allora con Δ_0 uno qualunque dei sottinsiemi di Δ ottenuti riunendo uno degli insiemi Σ_0 di cui si parla nel teor. 3 del n.º 8 ($\Sigma_0 \subset \Sigma$) con uno degli insiemi Σ'_0 di cui si parla nel teor. 3' del n.º 12 ($\Sigma'_0 \subset \Sigma'$):

$$\Delta_0 = \Sigma_0 + \Sigma'_0.$$

Ciascuno di questi insiemi Δ_0 consta dunque di otto condizioni di distributività. Ebbene, come ora dimostreremo, vale il seguente

TEOREMA 5: *Gli insiemi Δ_0 definiti nel precedente capoverso sono gli unici sottinsiemi dell'insieme Δ (di tutte le sedici condizioni di distributività di $B = \{a, b\}$) ad esso equivalenti e costituiti, ciascuno, da condizioni indipendenti.*

Premettiamo le due proposizioni seguenti.

XV) *Ciascuna delle quattro classi C_i ($i = 1, 2, 3, 4$) considerate nel n.º 8 è s -isolata (n.º 9) in un bisistema d -distributivo (n.º 13) di sostegno $B = \{a, b\}$.*

XV') *Ciascuna delle quattro classi C'_i ($i = 1, 2, 3, 4$) considerate nel n.º 12 è d -isolata (n.º 12) in un bisistema s -distributivo (n.º 10) di sostegno $B = \{a, b\}$.*

Dimostrazione della XV): Tenendo conto dei due corollari del n.º 13, e delle proposiz. VI), ..., IX) del n.º 6, si trova facilmente che C_1 e C_2 sono rispettivam. s -isolate nel bisistema (8, 14) e nel bisistema (2, 14) (v. n.º 10), i quali sono appunto d -distributivi ((8, 14) è isomorfo a (3,9), che figura nella XIII) del n.º 13, mentre (2,14) è opposto di (2,8), che figura nella XII) del n.º 10). Ne segue che C_3 e C_4 sono risp. s -isolate nelle immagini isomorfe di (8, 14) e di (2, 14) mediante la corrispondenza $a \rightarrow b$, $b \rightarrow a$.

Dimostrazione della XV'): Questa proposizione è un'immediata conseguenza della XV), tramite il lemma 13 del n.º 11 (cfr. n.º 12, dimostraz. della X')).

Dimostriamo ora il teor. 5. In base alle due precedenti proposiz. XV) e XV'), è intanto chiaro che ciascuno degli insiemi Δ_0 , oltre che equivalente a Δ (teor. 3 del n.º 8 e teor. 3' del n. 12), è appunto costituito da condizioni indipendenti.

Sia allora Δ_1 un sottinsieme (proprio e non vuoto) dell'insieme Δ a questo equivalente e costituito da condizioni indipendenti, e si supponga che Δ_1 sia diverso da ciascuno degli insiemi Δ_0 . Ne segue che Δ_1 non può essere un sottinsieme di un Δ_0 (cfr. ult. capov. del n.º 9), e quindi Δ_1 deve contenere o entrambe le condizioni di s -distributività relative alle due terne di una stessa classe C_i del n.º 8, oppure entrambe le condizioni di d -distributività relative alle due terne di una stessa classe C'_i del n.º 12. Ma allora (in base alle proposizioni del n.º 6 o del n.º 11) le condizioni di Δ_1 non possono essere indipendenti, contro l'ipotesi. Il teor. 5 è dunque dimostrato.

Detto *distributivo* un bisistema se esso è contemporaneamente s -distributivo (n.º 10) e d -distributivo (n.º 13), segnaleremo infine la seguente conseguenza dei teoremi 2 e 2' (n.º 8 e 12):

COROLLARIO 3: *Un bisistema B^0 di ordine 2 è distributivo (risp. s -distributivo, d -distributivo) se in esso sono distributive (risp. s -distributive, d -distributive) le quattro terne (x, y, z) con $x=z$, (x, y, z) denotando elementi di B^0 .*

BIBLIOGRAFIA

- [1] BOCCIONI, D.: *Indipendenza delle condizioni di associatività negli ipergruppidi*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 27 (1957), pp. 228-244.
- [2] BOURBAKI, N.: *Algèbre*, Act. scient. ind. 1144, Hermann (1951).
- [3] DUBREIL, P.: *Algèbre, I*, 2. éd., Gauthier-Villars (1954).
- [4] HERMES, H.: *Einführung in die Verbandstheorie*, Springer (1955).
- [5] JACOBSON, N.: *Lectures in Abstract Algebra, Vol. I*, Van Nostrand (1951).