BRUNO PINI

Sulla soluzione generalizzata di Wiener per il primo problema di valori al contorno nel caso parabolico

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 23 (1954), p. 422-434

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1954__23__422_0>

SULLA SOLUZIONE GENERALIZZATA DI WIENER PER IL PRIMO PROBLEMA DI VALORI AL CONTORNO NEL CASO PARABOLICO

Nota (*) *di* Bruno Pini (*a Cagliari*)

Siano γ_1 e γ_2 due archi di equazioni $x = \chi_1(y)$, $x = \chi_2(y)$, $a \leq y \leq b$, con $\chi_1(y)$ e $\chi_2(y)$ continue e $\chi_1(y) < \chi_2(y)$ per $a < y \leq b$; indichiamo con C_1 e C_2 i segmenti $\chi_1(a) \leq x \leq \leq \chi_2(a)$, $y = a$ e $\chi_1(b) \leq x \leq \chi_2(b)$, $y = b$, non escludendo che C_1 possa ridursi a un punto; indichiamo poi con D il dominio limitato di frontiera $\gamma_1 + \gamma_2 + C_1 + C_2$ e poniamo $S = \gamma_1 + C_1 + \gamma_2$, che brevemente diremo un *contorno parabolico*. Com'è noto, esiste ed è unica la soluzione del problema

$$(1) \qquad \begin{cases} \mathfrak{L}(u) = u_{xx} - u_y = 0 & \text{in } D - S \\ u = f & \text{su } S \end{cases}$$

se $f(P)$ è una funzione continua del punto P variabile su S e se $\chi_1(y)$ e $\chi_2(y)$ sono funzioni lipschitziane su $a \leq y \leq b$ (o anche soltanto hölderiane d'ordine $> 1/2$). Chiameremo *normale* un dominio D per cui γ_1 e γ_2 soddisfano tale condizione. È ben noto che non per ogni dominio T dello spazio euclideo ad n dimensioni ($n \geq 2$), esiste una funzione armonica in $T - \mathfrak{F}T$ la quale assuma in senso ordinario nei punti di $\mathfrak{F}T$ assegnati arbitrari valori continui; la presenza su $\mathfrak{F}T$ di certi punti *irregolari* (tipica ad esempio la *spina* di Lebesgue nel caso di $n = 3$) esclude l'esistenza della soluzione ordinaria del problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace.

Nel caso parabolico è banale che se il dominio D, anzichè essere del tipo indicato all'inizio, è ad esempio quello che ha per frontiera due segmenti di caratteristica C_1 e C_2, un arco del tipo γ_1 e un arco di equazione $x = \chi_2(y)$ $(> \chi_1(y))$ per $a \leq y \leq c$ $(< b)$

(*) Pervenuta in Redazione il 9 agosto 1954.

$(\chi_1(c) <)\, \chi_2(c) - \delta \leq x \leq \chi_2(c)$ per $y = c$ $(\delta > 0)$, $x = \chi_3(y)$ $(> \chi_1(y))$ per $c \leq y \leq b$ con $\chi_3(c) = \chi_2(c) - \delta$, non si possono prefissare ad arbitrio i valori di f su $\chi_2(c) - \delta \leq x \leq \chi_2(c)$, $y = c$.

Ma anche supponendo che le funzioni $\chi_i(y)$ siano continue, possono presentarsi punti irregolari [1]). Tuttavia è possibile anche nel caso parabolico parlare di *soluzione generalizzata* del tipo di WIENER [2]) e di *barriera* per i punti del contorno parabolico, capace di discriminare i punti regolari dai punti irregolari, essendo i primi, a differenza dei secondi, tali che la soluzione generalizzata prende in essi nel senso ordinario i valori assegnati. Per far ciò è sufficiente l'uso di una formola di media, di un analogo del cosidetto secondo teorema di HARNACK e della nozione di funzione $\mathfrak{L}$-prevalente ed $\mathfrak{L}$-subvalente [3]), le quali sono delle super ed infer-funzioni relativamente alle soluzioni di $\mathfrak{L}(u) = 0$; in possesso di ciò, basta ricalcare ragionamenti noti nel caso del problema di DIRICHLET. Noi svolgeremo per completezza anche quest'ultima parte seguendo l'esposizione di KELLOGG [4]), e ci riserviamo di tornare in altro luogo sull'argomento.

Vogliamo però espressamente rilevare che, anzichè usare il procedimento delle successioni, si può giungere allo stesso risultato col procedimento di mediazione di ZAREMBA, applicato a una formola di media caratteristica delle soluzioni di $\mathfrak{L}(u) = 0$, ciò che permette di giungere a un risultato in tutto simile a quello di LEBESGUE-PERKINS [5]).

1. - Vogliamo qui indicare un esempio di punto la cui irregolarità, sebbene deducibile dalle condizioni di irregolarità

---

1) Un primo studio sui punti regolari e irregolari di un contorno parabolico è stato fatto da I. PETROWSKY, *Zur ersten Randwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung*, Compositio Mathematica, I (1935).

2) N. WIENER, *Certain notions in potential theory*, Journal of Math. and Phys. Massachussetts Inst. of Technology, 1924.

3) B. PINI, *Maggioranti e minoranti delle soluzioni delle equazioni paraboliche*, Annali di Mat. pura ed appl., s. 4, XXXVII (1954).

4) O. D. KELLOGG, *Foundations of potential theory*, Berlin 1929.

5) H. LEBESGUE, *Sur le problème de Dirichlet*, C. R. Paris, 154 (1912) ed F. W. PERKINS, *Sur la résolution du problème de Dirichlet par des médiations réitérées*, C. R. Paris, 184 (1927).

stabilite da PETROWSKY, si può provare in modo estremamente semplice e diretto usando una opportuna formola di media. Fissato un punto $P_0 = (x_0, y_0)$, indichiamo con $\mathfrak{C}(P_0, r)$ la curva

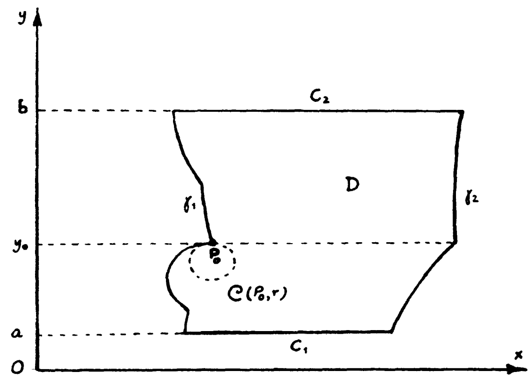
$$(2) \qquad \begin{cases} x = x_0 - \sqrt{2}r \operatorname{sen} \theta \sqrt{\lg(1/\operatorname{sen}^2 \theta)} \\ y = y_0 - r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \end{cases} \qquad -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$$

che è una linea di livello della funzione

$$z = \frac{1}{\sqrt{y_0 - y}} \exp\left[-\frac{(x_0 - x)^2}{4(y_0 - y)}\right]$$

e con $\mathfrak{D}(P_0, r)$ il dominio limitato che ha $\mathfrak{C}(P_0, r)$ per completa frontiera. Ricordiamo che condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione $u(P)$ continua in un campo A sia ivi soluzione di $\mathfrak{L}(u) = 0$ è che per ogni punto P_0 di A e per tutti gli r (positivi) abbastanza piccoli sia

$$(3) \qquad u(P_0) = \mu(u, P_0, r) = $$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (u)_{\mathfrak{C}\, P_0, r)} \cos \theta \sqrt{\lg (1/\operatorname{sen}^2 \theta)} d\theta$$ [6].



Ebbene, sia P_0 un punto, per esempio di γ_1, tale che, per un certo valore di r, $\mathfrak{D}(P_0, r)$ sia contenuto in D [7]. Allora P_0 è un punto irregolare.

---

[6]) Cfr. l. c. in [2]).

[7]) Cioè per un certo valore di r sia

$$\chi_1(y_0) - \chi_1(y) \geq \sqrt{2(y_0 - y) \lg [r^2/(y_0 - y)]} \quad \text{per} \quad y_0 \geq y \geq y_0 - r^2$$

Infatti sia $f(P)$ una funzione continua del punto P su S, positiva in tutti i punti di $S \cdot (y \leq y_0)$, escluso il punto P_0 ove si annulla, e supponiamo che esista la soluzione $u(P)$ del problema (1).

Per note proprietà estremali delle soluzioni di $\mathfrak{L}(u) = 0$, il minimo della u è raggiunto su S. Ora, detto D_η il dominio $D \cdot (y \leq \eta)$, la u è positiva in ogni dominio $D_{y_0-\varepsilon}$ con $\varepsilon > 0$ arbitrariamente piccolo; d'altra parte, per ragioni di continuità, è

$$u(P_0) = \mu(u, P_0, r)$$

mentre è $f(P_0) = 0$ e $\mu(u, P_0, r) > 0$.

Di qui l'assurdo. Pertanto *la presenza su* $\gamma_1 + \gamma_2$ *di punti del tipo indicato esclude che il problema* (1) *abbia soluzione* (*ordinaria*) *per arbitrari valori continui assegnati su* S.

2. - Sia R il rettangolo $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1/4$ e siano $f(x)$ una funzione continua su $0 \leq x \leq 1$, $\varphi_1(y)$ e $\varphi_2(y)$ due funzioni continue su $0 \leq y \leq 1/4$, tali che $f(0) = \varphi_1(0)$, $f(1) = \varphi_2(0)$. È noto [8]) che

$$(3)\quad u(x, y) = \int_0^1 G(x, y;\, \xi, 0) f(\xi) d\xi + \int_0^y G_\xi(x, y;\, 0, \eta)\varphi_1(\eta) d\eta - \int_0^y G_\xi(x, y;\, 1, \eta)\varphi_2(\eta) d\eta$$

dove

$$G(x, y;\, \xi, \eta) = \frac{1}{2}\left[\theta_3\left(\frac{x-\xi}{2},\, y-\eta\right) - \theta_3\left(\frac{x+\xi}{2},\, y-\eta\right)\right]$$

---

se P_0 appartiene a γ_1, e

$$\chi_2(y) - \chi_2(y_0) \geq \sqrt{2(y_0 - y)\lg[r^2/(y_0-y)]} \quad \text{per} \quad y_0 \geq y \geq y_0 - r^2$$

se P_0 appartiene a γ_2.

8) G. DOETSCH, *Theorie und anwendung der Laplace-Transformation*, Berlin 1937, Cap. 20.

e

$$\theta_3(\alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{\pi\beta}} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \exp\left[-\frac{(\alpha+n)^2}{\beta}\right],$$

è in R soluzione del problema (1) con $u(P) = f(x)$, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ rispettivamente su C_1, γ_1, γ_2. È immediato verificare che $G(x, y; \xi, 0)$, $G_\xi(x, y; 0, \eta)$, $-G_\xi(x, y; 1, \eta)$ sono funzioni non negative al variare di (x, y) in $R-S$ e di (ξ, η) rispettivamente su C_1, γ_1 e γ_2. Infatti, supponiamo per esempio che in un punto (x, y) di $R-S$ e per un certo $\bar\xi (0<\bar\xi<1)$ sia $G(x, y; \bar\xi, 0) < 0$; ciò avverrà anche per tutti gli ξ di un certo intorno di $\bar\xi$ contenuto in $0<\xi<1$; poniamo $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ ed $f(x) > 0$ nel detto intorno di $\bar\xi$, $f(x) = 0$ nei restanti punti di $0 \leq x \leq 1$ ($f(x)$ continua in $0 \leq x \leq 1$). Riesce allora $u(x, y) < 0$ mentre è noto che una soluzione continua di $\mathfrak{L}(u) = 0$ in un dominio D raggiunge il minimo (attualmente lo zero) in punti di S. Analogo ragionamento negli altri casi.

Fissato un δ tale che $0 < \delta < 1/8$, indichiamo con $R(\delta)$ il rettangolo $\delta \leq x \leq 1-\delta$, $\delta \leq y \leq 1/4 - \delta$ e conveniamo di far variare il punto (x, y) in $R(\delta)$. Si ha

$$G(x, y; 0, 0) = G(x, y; 1, 0) = 0 \qquad \text{per } y > 0$$

mentre

$$G(1/2, 1/4; \xi, 0) > 0 \qquad \text{per } 0 < \xi < 1.$$

Per verificare quest'ultima, osserviamo anzitutto che

$$G(1/2, 1/4; 1-\xi, 0) = G(1/2, 1/4; \xi, 0),$$

onde possiamo limitarci a supporre che sia $0 < \xi \leq 1/2$. Ora è

$$G(1/2, 1/4; \xi, 0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \exp\left[-\left(2n - \xi + \frac{1}{2}\right)^2\right] - \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \exp\left[-\left(2n + \xi + \frac{1}{2}\right)^2\right] \right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{0}^{\infty}{}_n \left\{ \left(\exp\left[-\left(\frac{4n+1}{2} - \xi\right)^2\right] - \exp\left[-\left(\frac{4n+1}{2} + \xi\right)^2\right] \right) - \left(\exp\left[-\left(\frac{4n+3}{2} - \xi\right)^2\right] - \exp\left[-\left(\frac{4n+3}{2} + \xi\right)^2\right] \right) \right\}.$$

Il termine corrispondente ad $n = 0$ si può scrivere

$$2(\operatorname{senh} \xi - e^{-2} \operatorname{senh} 3\xi) \exp [-(\xi^2 + 1/4)]$$

e questo è nullo per $\xi = 0$ e positivo per $0 < \xi \leq 1/2$; infatti $\operatorname{senh} 3\xi / \operatorname{senh} \xi$ è funzione crescente di ξ ed è $\operatorname{senh}(3/2)/\operatorname{senh}(1/2) < e^2$. Osserviamo poi che la funzione $\exp[-(x - a)^2] - \exp[-(x + a)^2]$ per $x > 2$ e $0 < a < 1$ è funzione decrescente di x; si può perciò affermare che anche tutti i restanti termini (nulli per $\xi = 0$) sono positivi per $0 < \xi \leq 1/2$.

Si ha poi

$$G_\xi(1/2, 1/4; 0, 0) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \left(2n + \frac{1}{2}\right) \exp\left[-\left(2n + \frac{1}{2}\right)^2\right] > 0$$

perchè

$$\left(2n + \frac{1}{2}\right) \exp\left[-\left(2n + \frac{1}{2}\right)^2\right] >$$
$$> \left|-2n - 2 + \frac{1}{2}\right| \exp\left[-\left(-2n - 2 + \frac{1}{2}\right)^2\right].$$

Pertanto, al variare di (x, y) in $R(\delta)$, esiste finito e non negativo il

$$\lim_{\xi \to 0+} \frac{G(x, y; \xi, 0)}{G(1/2, 1/4; \xi, 0)};$$

possiamo quindi affermare che esiste una costante positiva K_1, dipendente solo da δ, tale che

$$0 \leq G(x, y; \xi, 0) \leq K_1 G(1/2, 1/4; \xi, 0), \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad (x, y) \subset R(\delta).$$

Si ha poi

$$-G_\xi(x, y; 1, \eta) = G_\xi(1 - x, y; 0, \eta),$$

onde possiamo limitarci ad esaminare soltanto il secondo termine della (3).

La

$$G_\xi(x, y; 0, \eta) = \frac{1}{(y - \eta)\sqrt{\pi}} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \frac{x + 2n}{2\sqrt{y - \eta}} \exp\left[-\frac{(x + 2n)^2}{4(y - \eta)}\right]$$

è una funzione continua al variare di (x, y) in $R(\delta)$ e di η

in $0 \leq \eta \leq y$ $(G_\xi(x, y;\ 0, y) = \lim_{\eta \to y-} G_\xi(x, y;\ 0, \eta) = 0)$. Ora è

$$G_\xi(1/2,\ 1/4;\ 0,\ \eta) =$$
$$= \frac{4}{(1-4\eta)\sqrt{\pi}} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \frac{1+4n}{2\sqrt{1-4\eta}} \exp\left[-\frac{(1+4n)^2}{4(1-4\eta)}\right]$$

e questa è positiva al variare di η in $0 \leq \eta \leq 1/4 - \delta$; infatti

$$(1+4n)\exp\left[-\frac{(1+4n)^2}{4(1-4\eta)}\right] > |1-4n-4| \exp\left[-\frac{(1-4n-4)^2}{4(1-4\eta)}\right],$$
$$n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

come subito si ve ifica.

Esiste perciò una costante positiva K_2, dipendente solo da δ, tale che

$$0 \leq G_\xi(x, y;\ 0,\ \eta) \leq K_2 G_\xi(1/2,\ 1/4;\ 0,\ \eta),$$
$$0 \leq \eta \leq y \quad , \quad (x, y) \subset R(\delta).$$

Concludendo, avendo riguardo alla (3), resta provata l'esistenza di una costante positiva K, dipendente solo da δ, tale che, se $f(x)$, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ sono funzioni non negative, è

$$0 \leq u(x, y) \leq K u(1/2,\ 1/4) \qquad \text{per } (x, y) \subset R(\delta).$$

Ciò premesso, proviamo la seguente proposizione:

Sia D un dominio normale ed $f(P)$ una funzione non negativa continua del punto P su S. Sia $0(x_0, y_0)$ un punto di $D - S$ e D^* un dominio normale interno a D_{y_0}. Detta $u(P)$ la soluzione del problema (1), *esiste una costante positiva K, dipendente solo da D^*, tale che*

$$0 \leq u(P) \leq K u(0) \qquad \textit{per } P \subset D^*.$$

Chiamiamo $R_a(P)$ il rettangolo $x - a/2 \leq \xi \leq x + a/2$, $y - a/4 \leq \eta \leq y$, essendo P un punto arbitrario e, indicato con δ un numero tale che $0 < \delta < a/8$, sia $R_{a\delta}(P)$ il rettangolo $x - a/2 + \delta \leq \xi \leq x + a/2 - \delta$, $y - a/4 + \delta \leq \eta \leq y - \delta$.

Sia ancora D' un dominio normale contenente nel suo interno D^* e contenuto in $D - S$; scegliamo a in modo che, comunque si prenda P in D', sia $R_a(P)$ contenuto in D; scegliendo poi δ sufficientemente piccolo, si può trovare un numero finito n di punti P_1, P_2, ..., P_n di D' in modo che D^* riesca completamente ricoperto da $R_{a\delta}(P_1)$, $R_{a\delta}(P_2)$, ..., $R_{a\delta}(P_n)$. Aggiungendo il punto O ed eventualmente un numero finito di punti, possiamo ammettere l'esistenza di m punti, siano O_1, O_2, ..., O_m, tali che O_{i+1} appartenga ad $R_{a\delta}(O_i)$ e sia $\sum_1^m{}_i R_{a\delta}(O_i) + R_{a\delta}(O) \supset D^*$.

Si ha

$$0 \leq u(P) \leq Ku(O) \qquad \text{per } P \subset R_{a\delta}(O)$$

e in generale

$$0 \leq u(P) \leq Ku(O_i) \qquad \text{per } P \subset R_{a\delta}(O_i).$$

Di qui l'esistenza di una costante positiva $\overline{K}$ tale che

$$0 \leq u(P) \leq \overline{K}u(O) \qquad \text{per } P \subset D^*.$$

$\overline{K}$ dipende solo da D^* e dalla scelta di a e di δ (quindi in definitiva solo da D^*) e non dipende da u.

Segue il teorema, analogo al cosiddetto secondo teorema di HARNACK:

Sia $\{u_n(P)\}$ una successione monotona di soluzioni di $\mathfrak{L}(u) = 0$ in un dominio D; se essa converge in un punto $0(x_0, y_0)$ di $D - S$, allora converge uniformemente in ogni dominio normale D' completamente interno a D_{y_0}.

Supposta la successione non decrescente (il che è lecito), si ha, per quanto precede

$$0 \leq u_{n+p}(P) - u_n(P) \leq \overline{K}[u_{n+p}(O) - u_n(O)],$$

da cui l'affermazione.

3. - Sia ora D il dominio $\chi_1(y) \leq x \leq \chi_2(y)$, $a \leq y \leq b$, con $\chi_1(y) < \chi_2(y)$ per $a < y \leq b$, essendo $\chi_i(y)$ funzioni che supponiamo soltanto continue. Ampliamo D prolungando γ_1 e γ_2 ad esempio con due tratti rettilinei γ_1' e γ_2' secondo y^+, di eguale lunghezza l, e indichiamo con $\overline{D}$ il dominio relativo al contorno parabolico $S + \gamma_1' + \gamma_2' = \overline{S}$. Sia $\{\overline{S}_n\}$ una successione di contorni parabolici normali terminanti in punti di $\overline{C}_2(\chi_1(b) \leq x \leq \chi_2(b),\ y = b + l)$, tali che, detto $\overline{D}_n$ il dominio normale relativo a $\overline{S}_n$, sia $\overline{D}_n \subset \overline{D} - \overline{S}$ per ogni n e $\overline{D}_n \subset \overline{D}_{n+1} - \overline{S}_{n+1}$ per $n = 1, 2, \dots$, e inoltre, fissato ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, esista un $n(\varepsilon)$ tale che per $n > n(\varepsilon)$ $\overline{S}_n$ sia contenuto nell'intorno di raggio ε di $\overline{S}$.

Sia assegnato su $\overline{D}$ un polinomio $f(P)$ $\mathfrak{L}$-prevalente, cioè tale che sia $\mathfrak{L}(f) \leq 0$ in ogni punto di $\overline{D}$ [9]). Consideriamo la successione di funzioni $\{u_n\}$ così definite

$$u_1 \equiv f \text{ in } \overline{D}$$

$$u_{n+1} = \begin{cases} f \text{ in } \overline{D} - \overline{D}_n \\ v_n \text{ in } \overline{D}_n, \text{ essendo } v_n(P) \text{ la soluzione di } \mathfrak{L}(v) = 0 \\ \qquad \text{in } \overline{D}_n - \overline{S}_n, \ v = f \text{ su } \overline{S}_n. \end{cases}$$

Le funzioni u_n sono tutte $\mathfrak{L}$-prevalenti. Infatti in un punto di $\overline{D}_n - \overline{S}_n$ si ha per ipotesi

$$u_n(P) = \mu(u_n, P, r) \quad \text{per tutti gli } r \text{ abbastanza piccoli;}$$

in ogni punto P di $\overline{D} - \overline{D}_n - \overline{S}$ si ha

$$u_n(P) \geq \mu(u_n, P, r) \quad \text{per tutti gli } r \text{ abbastanza piccoli;}$$

mentre in ogni punto di $\overline{S}_n$ si ha

$$u_n(P) = f(P) \geq \mu(f, P, r) \geq \mu(u_n, P, r),$$

se si tiene presente che f è $\mathfrak{L}$-prevalente e su S_n è $f = u_n$.

Si ha poi $u_1 \geq u_2$, poichè in $\overline{D} - \overline{D}_1$ è $u_1 = u_2$ mentre in $\overline{D}_1$ è $u_2 \leq f = u_1$; analogamente $u_2 \geq u_3$, ecc. La successione $\{u_n\}$ è perciò monotona non crescente ed è limitata inferiormente dal minimo di f (tenendo presente che v_n prende il max. e il min. su $\overline{S}_n$). Pertanto $\{u_n\}$ converge; sia $u(P)$ la funzione limite.

Per il teorema del n. 2 la convergenza è, di più, uniforme in ogni dominio normale interno a $\overline{D}$ e $u(P)$ è conseguentemente soluzione di $\mathfrak{L}(u) = 0$.

Se il polinomio $f(P)$ non è $\mathfrak{L}$-prevalente, si scriverà

$$f(P) = \left[f(P) - M\frac{x^2 - y}{3}\right] - \left[- M\frac{x^2 - y}{3}\right], \qquad M > \max_{\overline{D}} |\mathfrak{L}(f)|;$$

---

[9]) Cfr. l. c. in [3]).

perciò $f(P)$ è la differenza di due polinomi $\mathfrak{L}$-prevalenti; su ciascuno di essi si ragiona come prima.

Sia ora assegnata su S una funzione continua. Prolunghiamola con continuità su $\overline{S}$; da essa in infiniti modi (a norma di un teorema di LEBESGUE) si può dedurre per prolungamento una funzione $f(P)$ continua in $\overline{D}$; questa poi si può approssimare uniformemente con una successione di polinomi (in base a un ben noto teorema di WEIERTRASS). Sia $f^*(P)$ un polinomio tale che

$$|f^*(P) - f(P)| < \varepsilon \quad \text{in } \overline{D}.$$

Sia $\{u_n\}$ la successione dedotta da $f(P)$ e $\{u_n^*\}$ quella dedotta da $f^*(P)$, relativamente alla medesima successione $\{\overline{S}_n\}$. La $\{u_n^*\}$ converge uniformemente in ogni dominio normale interno a $\overline{D}$ verso la funzione $u^*(P)$ tale che $\mathfrak{L}(u^*) = 0$.

Tenendo presenti le proprietà estremali delle soluzioni di $\mathfrak{L}(u) = 0$, si ha

$$|u_n^* - u_n| < 2\varepsilon \quad \text{in } \overline{D} \text{ per ogni } n;$$

onde

$$|u_n - u_m| \leq |u_n - u_n^*| + |u_n^* - u_m^*| + |u_m^* - u_m| < 5\varepsilon$$

per n ed m abbastanza grandi. Dunque anche $\{u_n\}$ converge uniformemente e la funzione limite $u(P)$ è soluzione di $\mathfrak{L}(u) = 0$. La $u(P)$ è poi indipendente dalla successione $\{\overline{D}_n\}$ impiegata e dal modo come si è prolungata la $f(P)$ in $\overline{D}$.

Si abbiano due diverse successioni $\{\overline{D}_n\}$ e $\{\overline{D}'_n\}$ di domini normali approssimanti $\overline{D}$. Partiamo dalla stessa funzione continua $\mathfrak{L}$-prevalente $f(P)$; siano $\{u_n\}$ e $\{u'_n\}$ le due successioni relative e u, u' le funzioni limiti. Poichè le u_n e le u'_n sono $\mathfrak{L}$-prevalenti, con gli stessi valori su $\overline{S}$, si ha

$$u' \leq u_n \quad , \quad u \leq u'_n \quad \text{per ogni } n$$

e quindi

$$u' = u .$$

L'estensione al caso che $f(P)$ sia un'arbitraria funzione continua è immediato.

Supponiamo ora di partire da due funzioni continue $f_1(P)$ ed $f_2(P)$, distinte, con gli stessi valori su $\overline{S}$; ci si può riferire alla stessa successione $\{\overline{D}_n\}$ di domini approssimanti $\overline{D}$. Siano $\{u'_n\}$ ed $\{u''_n\}$ le successioni dedotte da $f_1(P)$ ed $f_2(P)$ e u', u'' i limiti. Se $\overline{D}'$ è un dominio contenuto in $\overline{D}-\overline{S}$ e tale che $\overline{S}'$, con gli estremi su $\overline{C}_2$, sia abbastanza prossimo ad $\overline{S}$, sarà $|f_1(P)-f_2(P)|<\varepsilon$ in $\overline{D}-\overline{D}'$; ora $\overline{D}_n$, per n abbastanza grande, conterrà $\overline{D}'$, onde $u'_n-u''_n$, considerata in $\overline{D}_n$ essendo ivi soluzione di $\mathfrak{L}(u)=0$ e avendo il max. e il min. su $\overline{S}_n$ (appartenente a $\overline{D}-\overline{D}'$), fornirà $|u'_n-u''_n|<\varepsilon$ in tutto $\overline{D}_n$ e quindi $|u'-u''|<2\varepsilon$ in tutto $\overline{D}_n$, per ogni n, e perciò in tutto $\overline{D}$; quindi $u'=u''$.

4. - Sia ora P_0 un punto di S; diciamo che *la funzione* $V(P, P_0)$, *definita in* D, *è una barriera per* D *in* P_0 *se essa è continua ed* $\mathfrak{L}$*-prevalente in* D, *è positiva in* $D-P_0$ *e tende a zero per* $P\to P_0$.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè il problema (1) *abbia soluzione ordinaria per arbitrari valori continui su* S *è che esista una barriera per* D *in ogni punto di* S.

Supponiamo che abbia soluzione il problema (1) per una arbitraria funzione continua f. Poniamo

$$V(P,\ P_0)=(b-a)(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \quad (\geq 0),$$

onde

$$\mathfrak{L}(V)=2(b-a)-2(y-y_0)\geq 0\,.$$

Pertanto $V(P, P_0)$ è $\mathfrak{L}$-subvalente; quindi la funzione $u(P)$ tale che $\mathfrak{L}(u)=0$ in $D-S$, $u=V$ su S, è $\geq V(P, P_0)$. Poichè $u\to 0$ per $P\to P_0$, la u stessa costituisce una barriera.

Supponiamo reciprocamente che esista una barriera in ogni punto di S. Sia $f(P)$ la funzione continua in D da cui è stata derivata col procedimento del n. 3 la soluzione u del problema che ci interessa. Assegnato un $\varepsilon>0$, vi è un cerchio σ di centro P_0 tale che in $D\cdot\sigma$ riesce

$$|f(P)-f(P_0)|<\varepsilon/2\,.$$

In $D-D\cdot\sigma$ sarà

$$|f(P)-f(P_0)|\leq M\cdot\overline{PP_0}$$

per una certa costante positiva M. D'altro canto, in $D - D \cdot \sigma$ la barriera V ha un estremo inferiore positivo e quindi lo stesso sarà di $V/\overline{PP_0}$; sia b tale estremo. Allora dalla precedente e da $M \cdot \overline{PP_0} \leq VM/b$ segue

$$f(\mathrm{P}) \leq f(P_0) + MV(P, P_0)/b\,.$$

Quindi, poichè $V > 0$, sarà in tutto D, compreso $D \cdot \sigma$

$$f(P) \leq f(P_0) + MV(P, P_0)/b + \varepsilon/2\,.$$

La funzione a secondo membro è $\mathfrak{L}$-prevalente al pari di V; perciò se f viene sostituita, in un qualsiasi dominio D' appartenente a $D - S$ con la soluzione di $\mathfrak{L}(u) = 0$ che su S' prende gli stessi valori di f, la diseguaglianza sussiste ancora. Essa sussiste perciò per tutti i termini delle successione $\{u_n\}$ e quindi anche per il limite $u(P)$. Se allora σ' è un cerchio di centro P_0, interno a σ, in cui sia $V < b\varepsilon/2M$, in $D \cdot \sigma'$ è

$$u(P) < f(P_0) + \varepsilon\,;$$

similmente per un cerchio σ'' di centro P è in $D \cdot \sigma''$

$$u(P) > f(P_0) - \varepsilon\,;$$

ciò prova che $u(P) \to f(P_0)$ per $P \to P_0$.

Alla proposizione precedente si può aggiungere che:

La $u(P)$, definita col procedimento del n. 3, approssima l'assegnato valore al contorno, in ogni punto regolare (tale cioè che per esso esiste una barriera).

Riservandoci di tornare in un'altra Nota sulle condizioni di regolarità e irregolarità di un contorno parabolico, vogliamo qui indicare una semplice condizione sufficiente per la regolarità di un contorno parabolico, la quale asserisce l'esistenza di una barriera del tipo di POINCARÉ.

Detto $\overline{\mathfrak{D}}(Q, r)$ il dominio limitato che ha per frontiera la curva $\overline{\mathfrak{C}}(Q, r)$:

$$x = \xi + \sqrt{2}\, r \operatorname{sen} \theta \sqrt{\lg (1/\operatorname{sen}^2 \theta)}$$
$$y = \eta + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \qquad\qquad -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2,$$

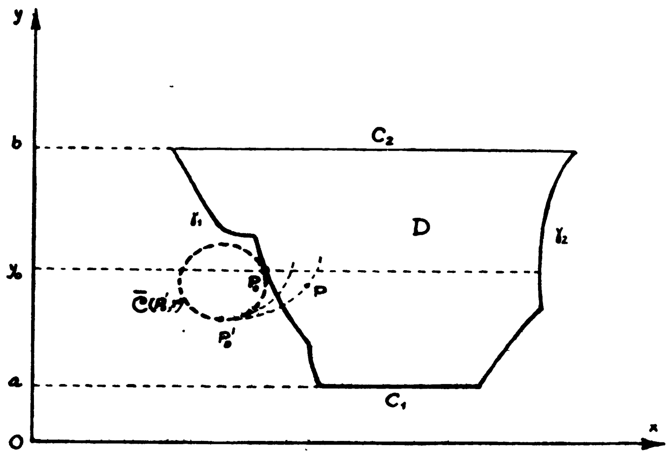
una condizione che assicura la regolarità del contorno parabolico è che ad ogni punto P_0 di S si possa associare un dominio $\overline{\mathfrak{D}}(P_0', r)$ con $y_0' < y_0$ e avente il solo punto P_0 in comune con D. Usando il sistema di coordinate ρ, θ definite da

$$x = x_0' + \sqrt{2}\,\rho \operatorname{sen}\theta \sqrt{\lg(1/\operatorname{sen}^2\theta)}$$
$$y = y_0' + \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta \qquad -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2 \quad , \quad \rho \geq 0,$$

la funzione

$$V(P, P_0) = \begin{cases} 1/r - 1/\rho & \text{per} \quad y > y_0' \\ 1/r & \text{per} \quad y \leq y_0' \end{cases}$$

costituisce una barriera; infatti $\mathfrak{L}(1/r - 1/\rho) = 0$, $\lim_{P \to P_0} (1/r - 1/\rho) = 0$ e $1/r > 1/\rho$ in $D - P_0$.



Di qui segue che tutti i punti di C_1 sono regolari e quindi se P_0 è un punto di γ_1, o di γ_2, esso sarà regolare per D se lo è relativamente a D_{y_0} [10]).

---

[10]) Cfr. anche l. c. in [1]).