RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIOVANNI PRODI

Problemi al contorno non lineari per equazioni di tipo parabolico non lineari in due variabili-soluzioni periodiche

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 23 (1954), p. 25-85

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1954__23__25_0>

PROBLEMI AL CONTORNO NON LINEARI PER EQUAZIONI DI TIPO PARABOLICO NON LINEARI IN DUE VARIABILI - SOLUZIONI PERIODICHE

Memoria (*) *di* GIOVANNI PRODI (*a Milano*)

Nel presente lavoro considero l'equazione di tipo parabolico

$$u_t = u_{xx} + F(x, t, u, u_x) \tag{1}$$

dove la x è compresa in un intervallo $0 \leq x \leq l$ che rimane fisso al variare di t; agli estremi di questo intervallo, cioè per $x = 0$ ed $x = l$, è assegnata una relazione, generalmente non lineare, che determina la derivata rispetto ad x in funzione del valore della incognita u e di t.

I problemi che considero sono due. Nel primo (trattato nei §§ 1, 2, 3, 4, 5) si suppone assegnato anche il valore della u sulla caratteristica $t = 0$ e si cercano le soluzioni per $t > 0$. Il secondo problema (che considero nel § 6), consiste invece nel cercare le soluzioni periodiche rispetto a t, quando, naturalmente, le funzioni assegnate siano tutte periodiche rispetto a t, con lo stesso periodo.

Questi problemi sono strettamente collegati con altri che ho studiato in due lavori di recente pubblicazione[1]); ne dif-

---

(*) Pervenuta in Redazione il 13 agosto 1953.

[1]) G. PRODI, *Soluzioni periodiche di equazioni alle derivate parziali di tipo parabolico e non lineari*. Rivista di matematica della Università di Parma, *3* 265-290 (1952); *Teoremi di esistenza per equazioni alle derivate parziali non lineari di tipo parabolico*. Rendiconti dell'Istituto Lombardo, vol. *86* (1953).

Nel seguito richiameremo questi lavori con i simboli (P) e (D) rispettivamente.

feriscono per le condizioni al contorno, che là erano quelle del problema di Dirichlet, qui sono, in un certo senso, quelle del problema di Neumann. Il procedimento dimostrativo è, nelle grandi linee, analogo: ricerca di una maggiorante e di una minorante e utilizzazione di queste funzioni sia per trovare una limitazione « a priori » delle soluzioni, sia per costruire una equazione lineare in cui trasformare per continuità l'equazione assegnata: questo in conformità al metodo di Leray-Schauder [2]). Ma, per i problemi che ora considero, la maggiorazione delle soluzioni ha richiesto un nuovo procedimento, che parte da un lemma esposto nel § 1; questo lemma ha una funzione analoga a quella del lemma di H. Westphal per il problema di Dirichlet [3]). Inoltre, in questo caso, l'operazione funzionale mediante cui si esprime l'equazione integrodifferenziale che traduce il nostro problema non risulta completamente continua nello spazio che si presenta più spontaneamente. Occorre introdurre uno spazio di funzioni che soddisfano ad una opportuna condizione di Hölder rispetto alla sola variabile t. Per quello che riguarda, in particolare, il problema delle soluzioni periodiche, il procedimento qui seguito differisce profondamente da quello seguito nel lavoro (P) nel modo di tradurre il problema in equazione integrodifferenziale: questo perchè, la funzione di Green relativa ad un certo punto (x, t) è sommabile nella semistriscia infinita $0 \leqq \xi \leqq l$, $\eta \leqq t$ nel caso del problema di Dirichlet, mentre non lo è più nel caso del problema di Neumann.

1. - Posizione del problema e lemma di confronto.

Introduciamo alcune convenzioni.

Indicheremo:

con $\bar{\mathfrak{R}}$ il dominio rettangolare del piano (x, t) definito dalle diseguaglianze $0 \leqq x \leqq l$, $0 \leqq t \leqq T$, dove l e T sono numeri positivi assegnati;

---

[2]) J. LERAY - J. SCHAUDER, *Topologie et équations fonctionnelles.* Annales de l'Ecole Normale Supérieure, (3), *51*, 45-78 (1934).

[3]) H. WESTPHAL, *Zur Abschätzung der Lösungen nichtlinearer parabolischer Differentialgleichungen.* Math. Zeitschrift, *51*, 690-695 (1949).

con $\mathfrak{R}$ l'insieme dei punti (x, t) tali che sia $0 < x < l$ $0 < t \leqq T$;

con $\mathfrak{L}$ il segmento $0 \leqq x \leqq l$, $t = 0$.

Diremo poi che una funzione $u(x, t)$ appartiene alla classe $\mathfrak{C}$ se gode di queste proprietà:

è continua in $\overline{\mathfrak{R}}$;

in $\overline{\mathfrak{R}} - \mathfrak{L}$ possiede derivata rispetto ad x continua e tale che la funzione $u_x(x, t)t^{1/2}$ si mantenga limitata.

Per le funzioni della classe $\mathfrak{C}$ noi useremo i simboli:

$$\| u \| = \max_{\overline{\mathfrak{R}}} | u(x, t) | ,$$

$$\| u_x \| = \operatorname*{estr\,sup}_{\overline{\mathfrak{R}} - \mathfrak{L}} | u_x(x, t) | \, t^{1/2} .$$

Ciò posto, consideriamo il problema al contorno

$$u_t = u_{xx} + F(x, t, u, u_x) \tag{1}$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = \chi(x) & (0 \leqq x \leqq l) \\ u_x(0, t) = -\varphi_1(t, u(0, t)) & \\ u_x(l, t) = \quad \varphi_2(t, u(l, t)) & \end{cases} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} (0 < t \leqq T) \tag{2}$$

dove F, χ, φ_1, φ_2, sono funzioni assegnate. *Alle soluzioni richiederemo di appartenere alla classe* $\mathfrak{C}$ *e di possedere in ogni punto di* $\mathfrak{R}$ *le derivate* u_t *e* u_{xx} *soddisfacenti alla* (1). Sussiste allora il seguente teorema:

Teorema 1. — « *Il problema al contorno* (1), (2) *ammette una soluzione, almeno, sotto le seguenti ipotesi:*

I_1) *la funzione* $F(x, t, u, u_x)$ *sia definita e continua per* $(x, t) \subset \mathfrak{R}$, $-\infty < u < +\infty$, $-\infty < u_x < +\infty$ *e soddisfi alla limitazione*

$$| F(x, t, u, u_x) | \leqq K(| u |) \{ t^{-\alpha} + | u_x |^{2\alpha} \}$$

essendo K *una funzione non negativa non decrescente ed* α *una costante positiva minore di* 1;

I_2) $F(x, t, u, u_x)$ *soddisfi ad una condizione di Hölder, puntualmente, nel suo campo di definizione;*

I_3) *la funzione* $\chi(x)$ *sia continua nell'intervallo chiuso* $0 \leqq x \leqq l$; *le funzioni* $\varphi_1(t, u)$, $\varphi_2(t, u)$ *siano continue per* $0 < t \leqq T$, $-\infty < u < +\infty$ *e tali che valgano le limitazioni*

$$| \varphi_2(t, u) | \leqq H(| u |)t^{-\beta}$$
$$| \varphi_2(t, u) | \leqq H(| u |)t^{-\beta}$$

essendo H *una funzione non negativa non decrescente e* β *una costante non negativa minore di* $1/2$;

I_4) *esistano due funzioni* $\bar{u}(x, t)$ e $\underline{u}(x, t)$, *appartenenti a* $\mathcal{C}$ *con derivata rispetto ad* x *puntualmente hölderiana in* $\mathfrak{R}$, *dotate in* $\mathfrak{R}$ *di derivata rispetto a* t *e di derivata seconda rispetto ad* x *e soddisfacenti alle diseguaglianze*

$$\bar{u}_t > \bar{u}_{xx} + F(x, t, \bar{u}, \bar{u}_x), \quad \underline{u}_t < \underline{u}_{xx} + F(x, t, \underline{u}, \underline{u}_x)$$
$$-\bar{u}_x(0, t) > \varphi_1(t, \bar{u}(0, t)), \quad -\underline{u}_x(0, t) < \varphi_1(t, \underline{u}(0, t)),$$
$$\bar{u}_x(l, t) > \varphi_2(t, \bar{u}(l, t)), \quad \underline{u}_x(l, t) < \varphi_2(t, \underline{u}(l, t)),$$
$$\bar{u}(x, 0) > \chi(x) > \underline{u}(x, 0) \text{ »}.$$

È opportuno enunciare e dimostrare subito il lemma di cui abbiamo parlato nell'introduzione, che dovremo applicare più volte in seguito.

Lemma 1. — « *Le funzioni* $\bar{u}(x, t)$ *e* $u(x, t)$ *siano continue in* $\overline{\mathfrak{R}}$ *e siano dotate, per* $t > 0$, *di derivate* $\bar{u}_x(x, t)$ *e* $u_x(x, t)$ *continue. In ogni punto di* $\mathfrak{R}$, *abbiano inoltre la derivata rispetto a* t *e la derivata seconda rispetto ad* x *e soddisfino alle diseguaglianze*

$$\bar{u}_t > \bar{u}_{xx} + F(x, t, \bar{u}, \bar{u}_x)$$
$$u_t \leqq u_{xx} + F(x, t, u, u_x)$$

dove F *è una funzione continua.*

Esistano poi due funzioni $\varphi_1(t, u)$, $\varphi_2(t, u)$ *definite e continue per* $0 < t \leqq T$, $-\infty < u < +\infty$ *e tali che sia*

$$\begin{cases} -\bar{u}_x(0, t) > \varphi_1(t, \bar{u}(0, t)) \\ -u_x(0, t) \leqq \varphi_1(t, u(0, t)) \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \bar{u}_x(l, t) > \varphi_2(t, \bar{u}(l, t)) \\ u_x(l, t) \leqq \varphi_2(t, u(l, t)) \end{cases}$$

Allora, se è

$$\bar{u}(x, 0) > u(x, 0),$$

si ha in tutto $\overline{\mathfrak{R}}$

$$\bar{u}(x, t) > u(x, t) \text{»}.$$

Supponiamo infatti, per assurdo, che vi siano punti di $\overline{\mathfrak{R}}$ per cui è $\bar{u}(x, t) \leq u(x, t)$. Vi sarà allora certamente, per la continuità di queste due funzioni, un punto $(\bar{x}, \bar{t})$ tale che sia $\bar{u}(\bar{x}, \bar{t}) = u(\bar{x}, \bar{t})$ e tale che sia sempre $\bar{u}(x, t) > u(x, t)$ per ogni t minore di $\bar{t}$. È evidente che deve essere $\bar{t} > 0$. Si può anche vedere che il punto $(\bar{x}, \bar{t})$ non può cadere sui lati $x = 0$ ed $x = l$ del nostro rettangolo. Supponiamo infatti che sia $\bar{x} = 0$. Dalle diseguaglianze valide per $x = 0$ avremmo allora

$$\bar{u}_x(0, \bar{t}) - u_x(0, \bar{t}) < 0 .$$

Questo implica che, per valori di x positivi sufficientemente piccoli, si abbia

$$\bar{u}(x, \bar{t}) - u(x, \bar{t}) < 0 ,$$

cioè

$$\bar{u}(x, \bar{t}) < u(x, \bar{t}) .$$

Fissata allora la x, si potrebbero sostituire a $\bar{t}$ valori più piccoli, mantenendo ancora valida questa diseguaglianza, contrariamente alla definizione di $\bar{t}$.

Analogo discorso si può fare per dimostrare che non può essere $\bar{x} = l$. Il punto $(\bar{x}, \bar{t})$ deve appartenere allora ad $\mathfrak{R}$.

Ma, tenendo presenti le diseguaglianze che sono verificate in $\mathfrak{R}$, e ricordando che per $t = 0$ e per $x = 0$ ed $x = l$, quando è $t \leq \bar{t}$, si ha $\bar{u} > u$, si deduce dal lemma di Westphal che deve essere $\bar{u}(x, t) > u(x, t)$ anche per $t = \bar{t}$. Di qui l'assurdo. Deve dunque essere, in ogni punto di $\overline{\mathfrak{R}}$

$$\bar{u}(x, t) > u(x, t) .$$

Osserviamo subito, come immediata conseguenza di questo lemma, che *le funzioni* $\bar{u}(x, t)$ e $\underline{u}(x, t)$ *di cui parla l'enunciato del Teorema 1 soddisfano in tutto* $\overline{\mathfrak{R}}$ *alla diseguaglianza*

$$\bar{u}(x, t) > \underline{u}(x, t) .$$

2. - Studio di un problema lineare.

Occupiamoci ora di un problema lineare che è un caso particolare del problema che ci interessa. Consideriamo la equazione:

$$u_t = u_{xx} + f(x,\ t) \tag{3}$$

con le condizioni al contorno

$$\begin{cases} u(x,\ 0) = \chi(x) & (0 \leqq x \leqq l) \\ u_x(0,\ t) = -\varphi_2(t) & \\ u_x(l,\ t) = \varphi_2(t) & (0 < t \leqq T) \end{cases} \tag{4}$$

Le condizioni a cui dovranno soddisfare i dati sono casi particolari delle condizioni del Teorema 1. Precisamente supporremo che

I_1') *la $f(x,\ t)$ sia continua in $\mathfrak{R}$ e sia tale che si mantenga limitata la funzione $f(x,\ t)t^\alpha$. Noi supporremo sempre, evidentemente senza restrizione di generalità, che sia $1/2 < \alpha < 1$. Indicheremo con $\| f \|$ il numero*

$$\| f \| = \operatorname*{estr\,sup}_{\mathfrak{R}} | f(x,\ t) |\, t^\alpha \ ;$$

I_2') *$f(x,\ t)$ sia puntualmente hölderiana in $\mathfrak{R}$;*

I_3') *la funzione $\chi(x)$ sia continua per $0 \leqq x \leqq l$; e $\varphi_1(t)$ e $\varphi_2(t)$ siano continue per $t > 0$ e tali che le funzioni $\varphi_1(t)t^\beta$ e $\varphi_2(t)t^\beta$ $(0 \leqq \beta < 1/2)$ si mantengano limitate. Porremo:*

$$\| \chi \| = \max_{0 \leqq x \leqq l} | \chi(x) | \ , \quad \| \varphi_1 \| = \operatorname*{estr\,sup}_{0 < t \leqq T} | \varphi_1(t) |\, t^\beta \ ,$$

$$\| \varphi_2 \| = \operatorname*{estr\,sup}_{0 < t \leqq T} | \varphi_2(t) |\, t^\beta .$$

Sotto queste ipotesi, il problema (3), (4) ha una ed una sola soluzione che appartiene alla classe $\mathfrak{C}$, ed è data dalla formula:

$$u(x,\ t) = \int_0 \Gamma(x,\ \xi;\ t)\chi(\xi)d\xi + \int_0^t \Gamma(x,\ 0;\ t-\eta)\varphi_1(\eta)d\eta + \tag{5}$$

$$+ \int_0^t \Gamma(x,\ l;\ t-\eta)\varphi_2(\eta)d\eta + \int_0^t \Gamma(x,\ \xi;\ t-\eta) f(\xi,\ \eta) d\xi\ ,$$

dove Γ è la funzione di Green, sempre positiva, che ha l'espressione:

$$(6) \qquad \Gamma(x, \xi; t) = \frac{1}{2l}\left[\vartheta_3\left(\frac{x-\xi}{2l}, \frac{t}{l^2}\right) + \vartheta_3\left(\frac{x+\xi}{2l}, \frac{t}{l^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}(\pi t)^{-1/2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\left\{\exp\left(-\frac{(2nl+x-\xi)^2}{4t}\right) + \exp\left(-\frac{(2nl+x+\xi)^2}{4t}\right)\right\}.$$

Questa espressione si trova con procedimento formale, usando la trasformata di Laplace [4]). Noi, comunque, verificheremo che la (5) rappresenta una effettiva soluzione del nostro problema: e questo anche perchè dobbiamo tener conto delle ipotesi ampie che abbiamo fatto per i dati e dei requisiti che abbiamo imposto alle soluzioni. L'unicità della soluzione (5) discenderà come caso particolare da un teorema che dimostreremo subito dopo.

Per semplicità indicheremo con i simboli v, w, z rispettivamente il primo termine, il complesso del secondo e del terzo, ed infine il quarto termine del secondo membro della (5); studieremo separatamente queste tre funzioni.

Nel seguito *indicheremo con L una costante generica dipendente soltanto da l, T e dai numeri α e β (e non dai dati).*

Studio della funzione $v(x, t)$.

La funzione

$$(7) \qquad v(x, t) = \int_0^l \Gamma(x, \xi; t)\chi(\xi)d\xi$$

ha queste proprietà:

α_1) per $t \to 0$ tende uniformemente verso $\chi(x)$; perciò è una funzione continua in $\overline{\mathfrak{R}}$;

α_2) è derivabile rispetto ad x e a t, in $\overline{\mathfrak{R}} - \mathfrak{L}$, quante volte si vuole e soddisfa all'equazione omogenea associata alla (3);

---

[4]) G. DOETSCH, *Theorie und anwendung der Laplace-Transformation.* Berlino, 1937. Il problema che ci interessa è trattato solo in un caso particolare, a pag. 361; ma, per ottenere la (5), basta portare delle modifiche del tutto ovvie al procedimento seguito per il problema di Dirichlet (pp. 353-361).

α_3) la derivata $v_x(x, t)$ si annulla per $x = 0$ ed $x = l$ $(t > 0)$ e soddisfa alla limitazione

$$|v_x(x, t)| \leqq L \|\chi\| t^{-1/2}. \tag{8}$$

Dimostriamo la proprietà α_1). Abbiamo, con calcoli semplicissimi,

$$v(x, t) = \frac{1}{2}(\pi t)^{-1/2} \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_n \int_{2nl}^{(2n+1)l} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right)\chi(\xi - 2nl)d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2}(\pi t)^{-1/2} \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_n \int_{(2n-1)l}^{2nl} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right)\chi(-\xi + 2nl)d\xi .$$

Ponendo ora

$$\begin{cases} \chi^*(x) = \chi(x - 2nl), & \text{per} \quad 2nl \leqq x \leqq (2n+1)l \\ = \chi(2nl - x), & \text{per} \quad (2n-1)l \leqq x \leqq 2nl \end{cases}$$

potremo scrivere:

$$v(x, t) = \frac{1}{2}(\pi t)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right)\chi^*(\xi)d\xi$$

Poichè $\chi^*(x)$ è una funzione periodica di periodo $2l$ continua, la convergenza uniforme verso $\chi^*(x)$ (e quindi verso $\chi(x)$ nell'intervallo $0 \leqq x \leqq l$) si dimostra facilmente. Eseguendo la sostituzione $\xi = 2t^{1/2}\mu$ si ha poi

$$v(x, t) = \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\left[\frac{1}{2} x t^{-1/2} - \mu\right]^2\right)\chi^*(2t^{1/2}\mu)d\mu$$

da cui, derivando rispetto ad x sotto il segno di integrale, per $t > 0$, si ottiene

$$v_x(x, t) = -$$

$$- \pi^{-1/2} t^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} x t^{-1/2} - \mu\right] \exp\left(-\left[\frac{1}{2} x t^{-1/2} - \mu\right]^2\right)\chi^*(2t^{1/2}\mu)d\mu .$$

La proprietà α_3) si deduce immediatamente da questa espressione di $v_x(x, t)$. La proprietà α_2) è ben nota. Osserviamo che la limitazione (8) giustifica l'opportunità di cercare le soluzioni del problema (1), (2) nella classe $\mathfrak{C}$, quando non si faccia sulla $\chi(x)$ altra ipotesi oltre quella della continuità.

Studio della funzione $w(x, t)$.

La funzione

$$(9)\quad w(x, t) = \int_0^t \Gamma(x, 0;\ t - \eta)\varphi_1(\eta)d\eta + \int_0^t \Gamma(x, l;\ t - \eta)\varphi_2(\eta)d\eta$$

β_1) è derivabile quante volte si vuole sotto il segno di integrale rispetto ad x e a t per $0 < x < l$ e soddisfa all'equazione omogenea associata alla (3),

β_2) è continua in $\overline{\mathfrak{R}}$ e soddisfa, rispetto alla variabile t, ad una condizione di Hölder di esponente $\frac{1}{2} - \beta$. Precisamente, si ha:

$$(10)\quad |w(x, t + k) - w(x, t)| \leqq L\{\|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|\}|k|^{1/2-\beta};$$

β_3) per $t > 0$ la derivata $w_x(x, t)$ è continua anche sui lati $x = 0$, $x = l$ ed assume su questi i valori $-\varphi_1(t)$ e $\varphi_2(t)$ rispettivamente.

Si ha poi

$$(11)\quad |w_x(x, t)| \leqq L\{\|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|\}t^{-\beta}$$

La proprietà β_1) è immediata. Rimandiamo all'appendice **1)** per i calcoli che sono necessari per dimostrare la (10) e la (11). Per stabilire la prima parte della β_3), notiamo che, dalla (8), si ha per $0 < x < l$:

$$w_x(x, t) = -$$

$$-\frac{1}{2}\pi^{-1/2}\int_0^t (t-\eta)^{-3/2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n (2nl + x)\exp\left(-\frac{(2nl+x)^2}{4(t-\eta)}\right)\varphi_1(\eta)d\eta -$$

$$-\frac{1}{2}\pi^{-1/2}\int_0^t (t-\eta)^{-3/2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n ([2n+1]l + x)\exp\left(\frac{-([2n+1]l+x)^2}{4(t-\eta)}\right)\varphi_2(\eta)d\eta$$

Tolto da questa espressione il termine (corrispondente al valore $n = 0$ nella prima sommatoria):

$$-\frac{1}{2}\pi^{-1/2}\int_0^t (t-\eta)^{-3/2} x \exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\eta)}\right)\varphi_1(\eta)d\eta$$

si riconosce che il complesso dei termini rimanenti rappresenta una funzione limitata per $x \to 0$, anzi infinitesima (uniformemente al variare di t in un intervallo chiuso tutto di valori positivi). Quanto al termine isolato, esso rappresenta un noto potenziale di doppio strato; facendo tendere x a zero, esso converge verso $-\varphi_1(t)$, con la stessa proprietà di uniformità. Analogamente si procede per $x \to l$.

Studio della funzione $z(x, t)$.

Consideriamo ora la funzione

$$z(x, t) = \int_0^t d\eta \int_0^l \Gamma(x, \xi; t-\eta) f(\xi, \eta) d\xi \tag{12}$$

tenendo presente la limitazione a cui soddisfa la $f(x, t)$. Sussistono le proprietà seguenti:

γ_1) $z(x, t)$ soddisfa ad una condizione di Hölder di esponente $2-2\alpha$ rispetto alla variabile x e ad una condizione di Hölder di esponente $1-\alpha$ rispetto alla variabile t;

γ_2) $z(x, t)$ è derivabile rispetto ad x sotto il segno di integrale in $\overline{\mathfrak{R}} - \mathfrak{L}$ e la derivata soddisfa alla limitazione

$$| z_x(x, t) | \leq L \, || f || \, t^{1/2-\alpha}; \tag{13}$$

γ_3) la funzione $z_x(x, t)t^{1/2}$ risulta hölderiana di esponente $2-2\alpha$ rispetto ad x e di esponente $1-\alpha$ rispetto a t;

γ_4) $z_x(x, t)$ è nulla per $x = 0$ e $x = l$ $(t > 0)$. Inoltre, nei punti di $\mathfrak{R}$, $z(x, t)$ soddisfa all'equazione (3).

Le proprietà γ_1), γ_2), γ_3) si dimostrano in modo perfettamente analogo a quello seguito nel lavoro (D) per stabilire le formule (19), (20), (22), (23); anzi qui i calcoli si semplificano notevolmente. In appendice **2)** riferiamo, per comodità del lettore, i calcoli, in forma un po' abbreviata.

Quanto alla proprietà γ_4), la prima parte si verifica immediatamente, mentre per dimostrare che la $z(x, t)$ soddisfa puntualmente alla (3) basta ricordare che la $f(x, t)$ soddisfa puntualmente ad una condizione di Hölder e applicare il ben noto criterio di E. E. Levi [5]).

Le proprietà γ_1) e γ_2) si possono esprimere con queste limitazioni:

$$(14)\quad \begin{cases} |z(x+h, t) - z(x, t)| \leqq L \|f\| \, |h|^{2-2\alpha} \\ |z(x, t+k) - z(x, t)| \leqq L \|f\| \, |k|^{1-\alpha} \\ |t^{1/2} z_x(x+h, t) - t^{1/2} z_x(x, t)| \leqq L \|f\| \, |h|^{2-2\alpha} \\ |(t+k)^{1/2} z_x(x, t+k) - t^{1/2} z_x(x, t)| \leqq L \|f\| \, |k|^{1-\alpha} \end{cases}$$

Per dimostrare l'unicità della soluzione (5), premettiamo un teorema di unicità, valido per un problema lineare omogeneo più generale, che ci sarà utile anche in seguito.

Teorema di unicità. — « *Si consideri il problema al contorno*

$$u_t = u_{xx} + f(x, t)u(x, t)$$

$$u(x, 0) = 0 \qquad (0 \leqq x \leqq l)$$

$$\left.\begin{aligned} u_x(0, t) &= -\varphi_1(t)u(0, t) \\ u_x(l, t) &= \varphi_2(t)u(l, t) \end{aligned}\right\} (0 < t \leqq T)$$

dove le funzioni f, φ_1, φ_2, *hanno sempre le proprietà che sono espresse dalle ipotesi* I_1'), I_2'), I_3'). *L'unica soluzione continua in* $\overline{\mathfrak{R}}$ *è dotata di derivata rispetto ad* x *continua in* $\overline{\mathfrak{R}} - \mathfrak{L}$ *è la soluzione identicamente nulla* ».

Infatti, usando i simboli del § 1, avremo

$$|f(x, t)| \leqq \|f\| \, t^{-\alpha}, \quad |\varphi_1(t)| \leqq \|\varphi_1\| \, t^{-\beta}, \quad |\varphi_2(t)| \leqq \|\varphi_2\| \, t^{-\beta}$$

---

[5]) E. E. LEVI, *Sull'equazione del calore*, Annali di Matematica (3) *14*, 187-264 (1908).

consideriamo ora la funzione

$$\bar{u}(x,\ t) = \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon \|\varphi_1\| \int_0^t \Gamma(x,\ 0;\ t-\eta)\eta^{-\beta}d\eta +$$

$$+ \varepsilon \|\varphi_2\| \int_0^t \Gamma(x,\ l;\ t-\eta)\eta^{-\beta}d\eta + \varepsilon \|f\| \int_0^t d\eta \int_0^l \Gamma(x,\ \xi;\ t-\eta)\eta^{-\alpha}d\xi$$

dove ε è un numero positivo arbitrario. Si ha, per la (6), $\bar{u}(x,\ t) \geqq \frac{\varepsilon}{2} > 0$. La $\bar{u}(x,\ t)$ soddisfa all'equazione

$$\bar{u}_t - \bar{u}_{xx} = \varepsilon \|f\| t^{-\alpha} \geqq \varepsilon\, |f(x,\ t)|$$

con le condizioni al contorno

$$\bar{u}(x,\ 0) = \frac{\varepsilon}{2} > 0$$

$$-\bar{u}_x(0,\ t) = \varepsilon \|\varphi_1\| t^{-\beta} \geqq \varepsilon\, |\varphi_1(t)|$$

$$\bar{u}_x(l,\ t) = \varepsilon \|\varphi_2\| t^{-\beta} \geqq \varepsilon\, |\varphi_2(t)|\,.$$

Consideriamo ora un numero positivo δ tale che, per $0 \leqq t \leqq \delta$, $0 \leqq x \leqq l$, sia $\bar{u}(x,\ t) < \varepsilon$. Si avrà, per $0 < t \leqq \delta$, $0 < x < l$,

$$\bar{u}_t(x,\ t) - \bar{u}_{xx}(x,\ t) > \bar{u}(x,\ t)\, |f(x,\ t)| \quad \text{e, per} \quad 0 < t \leqq \delta$$

$$-\bar{u}_x(0,\ t) > \bar{u}(0,\ t)\varphi_1(t)$$

$$\bar{u}_x(l,\ t) > \bar{u}(l,\ t)\varphi_2(t)\,.$$

Dunque, in virtù del lemma 1, $\bar{u}(x,\ t)$ è una maggiorante, rispetto alle soluzioni del problema al contorno considerato, per $0 \leqq t \leqq \delta$. Ma l'ampiezza dell'intervallo δ si può fissare indipendentemente dal valore di ε, imponendo che, per $0 \leqq t \leqq \delta$, sia

$$\|\varphi_1\| \int_0^t \Gamma(x,\ 0;\ t-\eta)\eta^{-\beta}d\eta + \|\varphi_2\| \int_0^t \Gamma(x,\ l;\ t-\eta)\eta^{-\beta}d\eta +$$

$$+ \|f\| \int_0^t d\eta \int_0^l \Gamma(x,\ \xi;\ t-\eta)\eta^{-\alpha}d\xi < \frac{1}{2}\,.$$

Potendosi attribuire ad ε valori arbitrariamente piccoli, si può concludere che $u(x,\ t)$ non può assumere valori positivi per $0 \leq t \leq \delta$. Ma non può neppure assumere valori negativi (basta fare un ragionamento analogo prendendo come minorante la funzione $\underline{u}(x, t) = -\bar{u}(x, t)$). Perciò $u(x, t)$ è identicamente nulla per $0 \leq t \leq \delta$; in particolare è $u(x, \delta) = 0$. Si può allora ripetere il ragionamento per un secondo intervallo di ampiezza non inferiore a δ: così si dimostra che $u(x, t)$ è identicamente nulla in $\mathfrak{R}$.

Applichiamo ora questo teorema di unicità al nostro problema al contorno.

Se il problema al contorno (3), (4) ammettesse due soluzioni u_1 e u_2, la loro differenza dovrebbe essere soluzione del problema al contorno omogeneo associato; ma dal teorema dimostrato (ponendo $f(x, t) \equiv 0$, $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) \equiv 0$) si deduce che $u_1 - u_2$ deve essere identicamente nulla. Dunque la (5) rappresenta l'unica soluzione del problema (3), (4) e questo, osserviamolo incidentalmente, anche quando ci si ponga nella classe (più ampia della $\mathfrak{C}$) formata dalle funzioni la cui derivata rispetto ad x, per $t > 0$, è sottoposta al solo vincolo della continuità.

C'è ancora un'osservazione da fare.

Supponiamo di sapere che il problema (3), (4) *ha una soluzione* $u(x, t)$; *ammettiamo che valgano le ipotesi* I_1') *e* I_3') (*senza che si supponga vera la* I_2'), *relativa alla condizione di Hölder per la* $f(x, t)$): *anche in questo caso* $u(x, t)$ *è rappresentata dalla espressione* (5). Infatti, fissato ε arbitrariamente piccolo, prendiamo due funzioni $\bar{f}(x, t)$ ed $\underline{f}(x, t)$ in modo che per esse valgano le ipotesi I_1') e I_2') e sia $\bar{f}(x, t) > f(x, t) > \underline{f}(x, t)$, $\|\bar{f} - \underline{f}\| < \varepsilon$. Consideriamo inoltre le funzioni $\bar{\varphi}_1(t)$, $\underline{\varphi}_1(t)$, $\bar{\varphi}_2(t)$, $\underline{\varphi}_2(t)$, $\bar{\chi}(x)$, $\underline{\chi}(x)$, tali che per esse valga l'ipotesi I_3') e tali che sia $\underline{\varphi}_1(t) < \varphi_1(t) < \bar{\varphi}_1(t)$, $\underline{\varphi}_2(t) < \varphi_2(t) < \bar{\varphi}_2(t)$, $\underline{\chi}(x) < \chi(x) < \bar{\chi}(x)$ e sia $\|\bar{\varphi}_1 - \underline{\varphi}_1\| < \varepsilon$, $\|\bar{\varphi}_2 - \underline{\varphi}_2\| < \varepsilon$, $\|\bar{\chi} - \underline{\chi}\| < \varepsilon$. Consideriamo la $\bar{u}(x, t)$, soluzione del problema (3), (4) con i dati $\bar{f}$, $\bar{\varphi}_1$, $\bar{\varphi}_2$, $\bar{\chi}$, e la $\underline{u}(x, t)$, soluzione dello stesso problema con i dati $\underline{f}$, $\underline{\varphi}_1$, $\underline{\varphi}_2$, $\underline{\chi}$. Dal nostro lemma si deduce che è $\underline{u}(x, t) < u(x, t) < \bar{u}(x, t)$. Ma $\bar{u}(x, t)$ e $\underline{u}(x, t)$ ammettono la rappresentazione (5). Poichè, per $\varepsilon \to 0$, si ha $\|\bar{u} - \underline{u}\| \to 0$, si deduce che anche $u(x, t)$ ammette la rappresentazione (5).

3. - Traduzione del problema al contorno in equazione integrodifferenziale.

Per dimostrare il Teorema 1 introduciamo ora questa ipotesi supplementare: che *la funzione* $\chi(x)$ *sia identicamente nulla. Ciò non costituisce una limitazione di generalità*: infatti ci si può sempre ridurre a questo caso mediante la sostituzione

$$u^*(x,\ t) = u(x,\ t) - v(x,\ t)$$

dove $v(x,\ t)$ è la funzione definita dalla (7). Questa sostituzione muta le condizioni I_1), I_2), I_3), I_4) in altre analoghe relative alla nuova incognita. Cominciamo a verificarlo per la I_1). L'equazione (1) si muterà nella equazione

$$u_t{}^* = u^*_{xx} + \Phi(x,\ t,\ u^*,\ u^*_x)$$

dove si è posto

$$\Phi(x,\ t,\ u^*,\ u^*_x) = F(x,\ t,\ u^* + v,\ u^*_x + v_x)$$

Si avrà allora

$$|\,\Phi(x,\ t,\ u^*,\ u^*_x)\,| \leqq K(|\,u^* + v\,|)\,\{\,t^{-\alpha} + |\,v_x + u^*_x\,|^{2\alpha}\,\} \leqq$$
$$\leqq K'(|\,u^*\,|)\,\{\,t^{-\alpha} + |\,u^*_x\,|^{2\alpha}\,\}$$

essendo K' una funzione dello stesso tipo di K. Il permanere della I_2) è evidente se si riflette che la $v(x,\ t)$ possiede in $\overline{\mathfrak{R}} - \mathfrak{L}$ le derivate di qualsiasi ordine continue. Per la I_3) basterà notare che le nuove condizioni al contorno sui lati $x = 0$ ed $x = l$ sono espresse mediante le funzioni

$$\varphi_1{}^*(t,\ u^*) = \varphi_1(t,\ u^* + v(0,\ t))$$
$$\varphi_2{}^*(t,\ u^*) = \varphi_2(t,\ u^* + v(l,\ t))\,.$$

Per la I_4), consideriamo le funzioni

$$\bar{u}^*(x,\ t) = \bar{u}(x,\ t) - v(x,\ t)$$
$$\underline{u}^*(x,\ t) = \underline{u}(x,\ t) - v(x,\ t)$$

che apparterranno pure alla classe $\mathfrak{C}$. Avremo, in $\mathfrak{R}$, (ricordando che è $v_t = v_{xx}$)

$$\bar{u}_t^* = \bar{u}_t - v_t > \bar{u}_{xx} - v_{xx} + F(x,\ t,\ \bar{u},\ \bar{u}_x) =$$
$$= \bar{u}_{xx}^* + F(x,\ t,\ \bar{u}^* + v,\ \bar{u}_x^* + v_x) = \bar{u}_{xx}^* + \Phi(x,\ t,\ \bar{u}^*,\ \bar{u}_x^*)$$

e, sui lati $x = 0$, $x = l$, $t = 0$ (ricordando che è $v_x(0, t) = v_x(l,\ t) = 0$):

$$- \bar{u}_x^*(0,\ t) = - \bar{u}_x(0,\ t) > \varphi_1(t,\ \bar{u}(0,\ t)) = \varphi_1^*(t,\ \bar{u}^*(0,\ t))$$
$$\bar{u}_x^*(l,\ t) = \bar{u}_x(l,\ t) > \varphi_2(t,\ \bar{u}(l,\ t)) = \varphi_2^*(t,\ \bar{u}^*(l,\ t))$$
$$\bar{u}^*(x,\ 0) > 0\,.$$

È poi evidente che $\bar{u}_x^*(x,\ t)$, come $\bar{u}_x(x,\ t)$, è puntualmente hölderiana in $\mathfrak{R}$.

Analogamente si procede per le diseguaglianze in cui interviene $\underline{u}^*$.

Torniamo dunque, per semplicità, ai soliti simboli, supponendo $\chi(x)$ identicamente nulla. Si vede facilmente che, se le soluzioni si cercano nella classe $\mathfrak{C}$, il problema (1), (2) è equivalente all'equazione integrodifferenziale

$$u(x,\ t) = \int_0^t \Gamma(x,\ 0;\ t - \eta)\varphi_1(\eta,\ u(0,\ \eta))d\eta + \tag{15}$$
$$\int_0^t \Gamma(x,\ l;\ t - \eta)\varphi_1(\eta,\ u(l,\ \eta))d\eta +$$
$$+ \int_0^t d\eta \int_0^l \Gamma(x,\ \xi;\ t - \eta)F(\xi,\ \eta,\ u(\xi,\ \eta),\ u_x(\xi,\ \eta))d\xi\,.$$

Infatti, supponiamo che $u(x,\ t)$ sia una soluzione del problema (1), (2) appartenente alla classe $\mathfrak{C}$. Sostituendo $u(x,\ t)$ in F, in φ_1 e in φ_2, otterremo una funzione F di x e t che soddisfa alla condizione I_1') e due funzioni della t, φ_1 e φ_2, che soddisfano alla condizione I_3'). Allora, per l'osservazione fatta alla fine del § 2, $u(x,\ t)$ deve soddisfare alla (15).

Viceversa, ogni soluzione della (15) appartenente alla classe $\mathfrak{C}$, per la proprietà β_1) (relativa alle funzioni rappresentate dagli integrali (9)) e per le (14) soddisfa certamente, assieme, alla sua derivata rispetto ad x, ad una condizione di Hölder in ogni punto di $\mathfrak{R}$; perciò F, come funzione di x e t, per l'ipotesi I_2), soddisferà ad una condizione di Hölder: quindi $u(x, t)$ è una soluzione del problema (1), (2).

Introduciamo ora uno spazio funzionale dotato di norma in cui cercheremo di risolvere la (15). *Gli elementi di questo spazio saranno tutte le funzioni della classe* $\mathfrak{C}$ *che soddisfano, in più, ad una condizione di Hölder di esponente* γ, *rispetto alla sola variabile* t, *essendo* γ *un ben determinato numero positivo, con* $\gamma < 1 - \alpha$, $\gamma < 1/2 - \beta$.

Indicheremo con $|u|_\gamma$ il relativo coefficiente di Hölder in $\overline{\mathfrak{R}}$. Avremo cioè

$$|u|_\gamma = \operatorname*{estr\,sup}_{\substack{0 \leq x \leq l \\ 0 \leq t' \leq T \\ 0 \leq t'' \leq T}} \frac{|u(x, t'') - u(x, t')|}{|t'' - t'|^\gamma}$$

Come norma di una funzione $u(x, t)$ assumiamo il numero

$$||u|| + ||u_x|| + |u|_\gamma$$

dove $||u||$ e $||u_x||$ hanno il significato definito nel § **1.** [6])

Con questa norma il nostro spazio lineare risulta completo: noi lo indicheremo nel seguito con $\mathfrak{S}$.

Notiamo che, per la (10) e la seconda delle (14) tutte le soluzioni della (15) soddisfano alla condizione di Hölder introdotta e perciò il problema al contorno (1), (2) in $\mathfrak{C}$ è ancora equivalente all'equazione (15) in $\mathfrak{S}$. Indichiamo ora con $T(u)$ l'operazione funzionale rappresentata dal secondo membro della (15), dove u è variabile nello spazio $\mathfrak{S}$, e consideriamo la trasformazione

$$u' = u - T(u)\,. \tag{15'}$$

Essa muta i punti di $\mathfrak{S}$ *ancora in punti di* $\mathfrak{S}$: basta per questo tener presenti le ipotesi I_1) e I_3) e ricordare la (11), la (13), la (10) e la seconda delle (14). Cercare la soluzione della (15) equivale a cercare i punti che dalla trasformazione

---

[6]) Di solito il simbolo $||u||$ viene riservato per la norma di u. Noi abbiamo preferito questa scrittura per non moltiplicare inutilmente i simboli.

(15') vengono mutati nell'origine di $\mathfrak{S}$. Vedremo tra poco che la $T(u)$ è completamente continua.

Sarà dimostrata l'esistenza di una soluzione se sarà provato che il grado topologico della (15') *relativamente ad un certo dominio* $\mathfrak{D}$ *dello spazio-oggetto e all'origine dello spazio-immagine è diverso da zero.* Per ottenere questo, secondo il metodo di Leray-Schauder, cercheremo di mutare con continuità l'operazione $T(u)$ in una nuova operazione $T^*(u)$, in modo che la nuova trasformazione

$$u' = u - T^*(u)$$

risulti lineare e completamente invertibile in $\mathfrak{S}$.

Per raggiungere lo scopo, ritorniamo al nostro problema al contorno. Al posto delle funzioni assegnate F, φ_1, φ_2, consideriamo le tre funzioni lineari nell'argomento u così definite

$$F^*(x,\ t, u) =$$

$$= \frac{(u - \underline{u}(x,t))F(x,t,\bar{u}(x,t),\bar{u}_x(x,t)) + (\bar{u}(x,t) - u)F(x,t,\underline{u}(x,t),\underline{u}_x(x,t))}{\bar{u}(x,t) - \underline{u}(x,t)}$$

$$\varphi_1^*(t,\ u) = \frac{(u - \underline{u}(0,\ t))\varphi_1(t,\ \bar{u}(0,\ t)) + (\bar{u}(0,t) - u)\varphi_1(t,\ \underline{u}(0,\ t))}{\bar{u}(0,\ t) - \underline{u}(0,t)}$$

$$\varphi_2^*(t,\ u) = \frac{(u - \underline{u}(l,\ t))\varphi_2(t,\ \bar{u}(l,\ t)) + (\bar{u}(l,\ t) - u)\varphi_2(t,\ \underline{u}(l,\ t))}{\bar{u}(l,\ t) - \underline{u}(l,\ t)}$$

dove $\bar{u}$ e $\underline{u}$ sono le funzioni di cui parla la condizione I_3) (ricordiamo che in $\bar{\mathfrak{R}}$ è sempre $\bar{u} > \underline{u}$).

Consideriamo ora il problema al contorno

$$u_t = u_{xx} + \lambda F(x,\ t,\ u,\ u_x) + (1-\lambda)F^*(x,\ t,\ u) \tag{16}$$

$$\begin{cases} u(x,\ 0) = 0 \\ u_x(0,\ t) = -\lambda\varphi_1(u(0,\ t)) - (1-\lambda)\varphi_1^*(t,\ u(0,\ t)) \\ u_x(l,\ t) = \lambda\varphi_2(t,\ u(l,\ t)) + (1-\lambda)\varphi_2(t,\ u(l,\ t)) \end{cases} \tag{17}$$

dove il parametro λ può variare nell'intervallo chiuso $(0,\ 1)$. Per ogni valore di λ avremo una equazione integrodifferenziale corrispondente alla (15). Per $\lambda = 0$ questa diventa l'equazione lineare

$$(18)\qquad u(x,t)=\int_0^t \Gamma(x,0;t-\eta)\varphi_2^*(\eta,u(0,\eta))d\eta+$$
$$+\int_0^t \Gamma(x,l;t-\eta)\varphi_2^*(\eta,u(l,\eta))d\eta+$$
$$+\int_0^t d\eta\int_0^l \Gamma(x,\xi;t-\eta)F^*(\xi,\eta,u(\xi,\eta))d\xi$$

che indicheremo brevemente così:

$$u-T^*(u)=0\,.$$

Per ciascun valore di λ l'equazione che traduce il problema al contorno si può scrivere

$$(19)\qquad u-\lambda T(u)-(1-\lambda)T^*(u)=0\,.$$

Questa equazione integrodifferenziale è equivalente al problema al contorno (16), (17). Infatti anche la funzione $F^*(x,t,u)$ soddisfa ad una condizione di Hölder, puntualmente nei suoi argomenti, per $(x,t)\subset\mathfrak{R}$, $-\infty<u<+\infty$. Per dimostrarlo basta tener presente l'ipotesi I_2) e ricordare che le funzioni $\bar{u}(x,t)$ e $\underline{u}(x,t)$ sono differenziabili (avendo derivata rispetto a t e derivata continua rispetto ad x), mentre le funzioni $\bar{u}_x(x,t)$ e $\underline{u}_x(x,t)$ soddisfano in $\mathfrak{R}$ ad una condizione di Hölder, puntualmente (per l'ipotesi I_4)).

Dimostreremo che il nostro problema ha almeno una soluzione se faremo vedere che:

σ_1) *l'operazione*

$$\lambda T(u)+(1-\lambda)T^*(u)$$

è completamente continua per ogni fissato valore di λ, *con* $0\leqq\lambda\leqq 1$ *e che essa è continua rispetto a* λ, *uniformemente al variare di* u *in un dominio limitato.* (Quest'ultima proprietà è evidente).

σ_2) *Le eventuali soluzioni della* (19) *si mantengono tutte interne ad un dominio limitato* $\mathfrak{D}$ *di* $\mathfrak{S}$, *che rimane costante al variare di* λ.

σ_3) *La trasformazione lineare* $u - T^*(u)$, *che si ottiene per* $\lambda = 0$, *risulta completamente invertibile.*

Con questo noi proveremo che il grado topologico della trasformazione $u - T(u)$, relativamente al dominio $\mathfrak{D}$, è ± 1.

4. - Dimostrazione del teorema di esistenza.

Dimostriamo la proprietà σ_1). Basterà fare vedere che la $T(u)$ e la $T^*(u)$ sono completamente continue in $\mathfrak{S}$. Svolgiamo completamente la dimostrazione per la $T(u)$; per la $T^*(u)$ si procederà nello stesso modo.

Dimostriamo che la $T(u)$ muta ogni successione limitata di $\mathfrak{S}$ in una successione compatta. Sia $\{ u_n \}$ una successione limitata in $\mathfrak{S}$: avremo $\| u_n \| \leqq \nu$, $\| u_{nx} \| \leqq \mu$, $| u_n |_\gamma \leqq \zeta$, essendo ν, μ, ζ opportune costanti. Poichè, come dice l'ultima delle limitazioni ora scritte, tutte le u_n soddisfano ad una stessa condizione di Hölder di esponente γ, rispetto a t esse sono egualmente continue su ogni parallela all'asse t. Potremo perciò estrarre dalla sucessione una successione parziale $\{ u_{n_k} \}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ che converge uniformemente sui lati $x = 0$ ed $x = l$ verso due funzioni della sola variabile t che indicheremo rispettivamente con $g_1(t)$ e $g_2(t)$ [7]).

---

[7]) Risulta qui evidente che la $T(u)$ non è completamente continua nello spazio Σ che si ottiene introducendo nella classe $\mathfrak{C}$ una norma data che $\| u \| + \| u_x \|$ semplicemente: questo perchè, mentre, in virtù delle (14), risulterebbe completamente continua in Σ l'operazione

$$Z(u) \equiv \int_0^t d\eta \int_0^l \Gamma(x, \xi;\, t - \eta) F(\xi, \eta, u(\xi, \eta), u_x(\xi, \eta)) d\xi,$$

non risulterebbe completamente continua l'operazione

$$W(u) \equiv \int_0^t \Gamma(x, 0;\, t - \eta) \varphi_1(\eta, u(0, \eta)) d\eta + \int_0^t \Gamma(x, l;\, t - \eta) \varphi_2(\eta, u(l, \eta)) d\eta.$$

Infatti, posto $u'_x = W(u)$, si ha: $u'_x(0, t) = \varphi_1(t, u(0, t))$, $u'_x(l, t) = \varphi_2(t, u(l, t))$; ora, escluso il caso banale in cui φ_1 e φ_2 siano entrambe costanti rispetto ad u, si può sempre trovare una successione u_n limitata in Σ e tale che una almeno delle successioni $\varphi_1(t, u_n(0, t))$, $_2(t, u_n(l, t)$ non converga per $t > 0$ verso una funzione continua e, con lei, nessuna delle successioni parziali.

Poniamo

$$w(x,t)=\int_0^t \Gamma(x,0;t-\eta)\varphi_1(\eta,g_1(\eta))d\eta+\int_0^t \Gamma(x,l;t-\eta)\varphi_2(\eta,g_2(\eta))d\eta$$

e

$$w_{n_k}(x,t)=\int_0^t \Gamma(x,0;t-\eta)\varphi_1(\eta,u_{n_k}(0,\eta))d\eta+$$
$$+\int_0^t \Gamma(x,l;t-\eta)\varphi_2(\eta,u_{n_k}(l,\eta))d\eta .$$

Si può affermare che è $w_{n_k} \to w$. Infatti si ha intanto

$$\| w-w_{n_k}\| \to 0 \quad \text{e} \quad \| (w-w_{n_k})_x \| \to 0 .$$

Queste relazioni esprimono la convergenza uniforme di $w_{n_k}(x,t)$ verso $w(x,t)$ in $\overline{\mathfrak{R}}$ e la convergenza uniforme di $w_{n_k x}(x,t)t^{1/2}$ verso $w_x(x,t)t^{1/2}$ *in* $\overline{\mathfrak{R}}-\mathfrak{L}$ rispettivamente; per la loro dimostrazione (che ,del resto, non presenta alcuna difficoltà) rinviamo all'appendice **3)**. Resta da vedere che si ha

$$| w-w_{n_k}|_\gamma \to 0$$

Per dimostrare questo premettiamo il seguente lemma:

Lemma 2. — « *Sia* $\{ h_n(t) \}$ *una successione di funzioni definite in uno stesso intervallo* $\mathfrak{J}$ *(finito o infinito) e soddisfacenti ad una stessa condizione di Hölder, di esponente* $\tau \leqq 1$. *Se la successione converge (uniformemente) verso una funzione* $h(t)$ *e se* γ *è un numero tale che sia* $\gamma<\tau$, *si ha*

$$| h-h_n|_\gamma \to 0 \text{ ».}$$

Per ipotesi si avrà, per ogni funzione h_n,

$$\frac{| h_n(t'')-h_n(t')|}{| t''-t'|^\tau}<M$$

dove M è una opportuna costante e questa limitazione varrà anche per la $h(t)$, come si vede subito passando al limite.

Occorre dimostrare che è

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{estr\,sup}_{t',t''\subset\mathfrak{J}} \frac{|(h(t'')-h_n(t''))-(h(t')-h_n(t'))|}{|t''-t'|^{\gamma}} = 0$$

Fissato un intero positivo k, per la convergenza uniforme sarà possibile determinare un indice n_k tale che per $|t''-t'| \geqq \frac{1}{k}$ e per $n > n_k$ si abbia

$$\frac{|(h(t'')-h_n(t''))-(h\,t')-h_n(t'))|}{|t''-t'|^{\gamma}} < \frac{1}{k}$$

D'altra parte, per $|t''-t'| < \frac{1}{k}$, si ha

$$\frac{|(h(t'')-h_n(t''))-(h(t')-h_n(t'))|}{|t''-t'|^{\gamma}} \leqq \frac{|h(t'')-h(t')|}{|t''-t'|^{\gamma}} + \frac{|h_n(t'')-h_n(t')|}{|t''-t'|^{\gamma}} =$$

$$= \left\{\frac{|h(t'')-h(t')|}{|t''-t'|^{\tau}} + \frac{|h_n(t'')-h_n(t')|}{|t''-t'|^{\tau}}\right\} |t''-t'|^{\tau-\gamma} < 2M\left(\frac{1}{k}\right)^{\tau-\gamma}$$

Perciò, per $n > n_k$, si avrà:

$$\frac{|(h(t'')-h_n(t''))-(h(t')-h_n(t'))|}{|t''-t'|^{\gamma}} < \max\left(\frac{1}{k},\ 2M\left(\frac{1}{k}\right)^{\tau-\gamma}\right)$$

E questo prova il nostro asserto.

Le funzioni $w_{n_k}(x, t)$ soddisfano tutte ad una stessa condizione di Hölder rispetto alla variabile t, con esponente $\frac{1}{2}-\beta$, come si deduce dalla limitazione (10). D'altra parte, il lemma 2 sussiste anche quando le funzioni $h_n(t)$ dipendano da un parametro (nel nostro caso la x), purchè la convergenza, naturalmente, sia uniforme anche rispetto al variare di questo parametro e purchè la condizione di Hölder rimanga la stessa. Poichè abbiamo supposto $\gamma < \frac{1}{2}-\beta$, dal lemma 2 si ottiene la relazione asserita.

Consideriamo ora la successione

$$z_{n_k}(x, t) = \int_0^t d\eta \int_0^l \Gamma(x, \xi;\ t-\eta) F(\xi, \eta, u_{n_k}(\xi, \eta), u_{n_k x}(\xi, \eta)) d\xi$$

Ricordando l'ipotesi I_1) e le limitazioni che valgono per la successione $\{ u_n \}$, avremo:

$$| F(x, t, u_{n_k}(x, t), u_{n_k x}(x, t)) | \leqq K(\nu) \{ 1 + \mu^{2\alpha} \} t^{-\alpha}$$

Applicando la (13) e le (14) si riconosce che le funzioni $z_{n_k}(x, t)$, $z_{n_k x}(x, t) t^{1/2}$ sono egualmente limitate ed egualmente continue. Da esse si può estrarre ancora una successione parziale, di indici $n_{k'}$, tale che $z_{n_{k'}}(x, t)$ e $z_{n_{k'} x}(x, t) t^{1/2}$ risultino uniformemente convergenti in $\overline{\mathfrak{R}}$. Essendo le funzioni $z_{n_{k'}}$ egualmente hölderiane di esponente $1 - \alpha > \gamma$, si vede anche in questo caso, applicando il lemma 2, che la successione $z_{n_{k'}}$ è effettivamente convergente secondo la metrica di $\mathfrak{S}$.

Dunque la successione $T(u_{n_{k'}})$ è convergente in $\mathfrak{S}$.

Resta da dimostrare la continuità dell'operazione T; ma per questo, dopo la proprietà di compattezza che abbiamo dimostrato, basta provare che, se $\{ u_n \}$ è una successione convergente in $\mathfrak{S}$ verso una certa u^*, la successione delle funzioni trasformate converge puntualmente in $\mathfrak{R}$ verso la trasformata di u^*: e questo è immediato (non c'è neppure bisogno di fare la verifica analoga per la derivata rispetto ad x).

Proprietà σ_2). Applichiamo il lemma 1 alla limitazione « a priori » delle soluzioni del problema (16), (17). Occorre tener presente che, per la definizione di F^*, $\varphi_1{}^*$, $\varphi_2{}^*$, si ha:

$$\bar{u}_t > \bar{u}_{xx} + F(x, t, \bar{u}, \bar{u}_x) = \bar{u}_{xx} + \lambda F(x, t, \bar{u}, \bar{u}_x) + (1 - \lambda) F^*(x, t, \bar{u})$$

$$- \bar{u}_x(0, t) > \varphi_1(t, \bar{u}(0, t)) = \lambda \varphi_1(t, \bar{u}(0, t)) + (1 - \lambda) \varphi_1{}^*(t, \bar{u}(0, t))$$

$$\bar{u}_x(l, t) > \varphi_2(t, \bar{u}(l, t)) = \lambda \varphi_2(t, \bar{u}(l, t)) + (1 - \lambda) \varphi_2{}^*(t, \bar{u}(l, t)).$$

Dal nostro lemma si deduce che allora che è, per $0 \leqq \lambda \leqq 1$,

$$u(x, t) < \bar{u}(x, t) .$$

Analogamente si procede per la limitazione inferiore. Si può concludere che, per $0 \leqq \lambda \leqq 1$, ogni soluzione del problema (16), (17) soddisfa alla limitazione

$$\underline{u}(x, t) < u(x, t) < \bar{u}(x, t) .$$

Sarà dunque $|| u || < \nu$, avendo posto $\nu = \max (|| \bar{u} ||, || \underline{u} ||)$. Per limitare $|| u_x ||$ possiamo ora, in modo analogo a quello seguito nei lavori (*P*) e (*D*), applicare la formula di Green al rettangolo $0 \leq \xi \leq l$, $t - k \leq \eta \leq t$, dove è $0 < k \leq t$. Avremo, derivando sotto il segno di integrale,

$$(20) \qquad u_x(x, t) = \int_{t-k}^{t} \Gamma_x(x, 0; t-\eta) \{ \lambda\varphi_1(\eta, u(0, \eta)) +$$

$$+ (1-\lambda)\varphi_1^*(\eta, u(0, \eta)) \} d\eta + \int_{t-k}^{t} \Gamma_x(x, l; t-\eta) \{ \lambda\varphi_2(\eta, u(l, \eta)) +$$

$$+ (1-\lambda)\varphi_2^*(\eta, u(l, \eta)) \} d\eta + \int_0^l \Gamma_x(x, \xi; k) u(\xi, t-k) d\xi +$$

$$+ \int_{t-k}^{t} d\eta \int_0^l \Gamma_x(x, \xi; t-\eta) \{ \lambda F(\xi, \eta, u(\xi, \eta), u_x(\xi, \eta)) +$$

$$+ (1-\lambda) F^*(\xi, \eta, u(\xi, \eta)) \} d\xi .$$

Bisogna osservare che, in questa formula, il terzo integrale si annulla per $k = t$, essendo allora $u(x, 0) = \chi(x) = 0$ per ipotesi. Poichè è $\| u \| < \nu$, in virtù dell'ipotesi I_1) si ha

$$| F(x, t, u(x, t), u_x(x, t)) | \leq K(\nu) \{ t^{-\alpha} + | u_x |^{2\alpha} \} \leq$$
$$\leq K(\nu) \{ 1 + \| u_x \|^{2\alpha} \} t^{-\alpha}$$

$$| F^*(x, t, u(x, t)) | \leq K(\nu) \{ 1 + \sigma^{2\alpha} \} t^{-\alpha}$$

avendo posto $\sigma = \max (\| \bar{u}_x \|, \| \underline{u}_x \|)$. Inoltre si ha, per l'ipotesi I_3),

$$| \varphi_1 | , | \varphi_2 | , | \varphi_1^* | , | \varphi_2^* | \leq H(\nu) t^{-\beta}$$

Tenendo conto di queste limitazioni ed applicando la (11), i primi due integrali del secondo membro della (20) si possono maggiorare in questo modo:

$$\int_{t-k}^{t} | \Gamma_x(x, 0; t-\eta) | (\lambda | \varphi_1(\eta, u(0, \eta)) | + (1-\lambda) | \varphi_1^*(\eta, u(0, \eta)) |) d\eta +$$

$$+ \int_{t-k}^{t} | \Gamma_x(x, l; t-\eta) | (\lambda | \varphi_2(\eta, u(l, \eta)) | + (1-\lambda) | \varphi_2^*(\eta, u(l, \eta)) |) d\eta +$$

$$\leq H(\nu) \left\{ \int_0^t | \Gamma_x(x, 0; t-\eta) | \eta^{-\beta} d\eta + \int_0^t | \Gamma_x(x, l; t-\eta) | \eta^{-\beta} d\eta \right\} \leq$$

$$\leq L H(\nu) t^{-\beta} .$$

Per i rimanenti due termini della (20) occorre tener presente che si ha (cfr. la formula (8)):

$$\int_0^l |\Gamma_x(x, \xi; k)| d\xi \leq L k^{-\frac{1}{2}}.$$

Si può dunque scrivere

$$|u_x(x, t)| \leq LH(\nu)t^{-\beta} + L\nu k^{-1/2} +$$

$$+ LK(\nu)\{\lambda(1 + \|u_x\|^{2\alpha}) + (1 - \lambda)(1 + \sigma^{2\alpha})\} \int_{t-k}^{t} (t - \eta)^{-1/2}\eta^{-\alpha} d\eta$$

Maggiorando l'ultimo integrale come nell'Appendice (2), b)), abbiamo

$$|u_x(x, t)| \leq LH(\nu)t^{-\beta} + L\nu k^{-1/2} + LK(\nu)\{\lambda(1 + |u_x\|^{2\alpha}) +$$
$$+ (1 - \lambda)(1 + \sigma^{2\alpha})\} t^{-\alpha}k^{1/2}$$

Quando sia $k = t$, si vede subito che si può scrivere

$$|u_x(x, t)| \leq LH(\nu)t^{-\beta} + LK(\nu)\{\lambda(1 + \|u_x\|^{2\alpha}) +$$
$$+ (1 - \lambda)(1 + \sigma^{2\alpha})\} t^{1/2-\alpha}.$$

Prendiamo ora $k = \nu t^\alpha K^{-1}(\nu)\{\lambda(1 + \|u_x\|)^{2\alpha} + (1 - \lambda)(1 + \sigma^{2\alpha})\}^{-1}$ nel caso in cui questa quantità risulti minore di t; altrimenti prenderemo $k = t$. Nel primo caso avremo

$$|u_x(x, t)| \leq LH(\nu)t^{-\beta} + L\nu^{1/2}K^{1/2}(\nu)\{\lambda(1 + \|u_x\|^{2\alpha}) +$$
$$+ (1 - \lambda)(1 + \sigma^{2\alpha})\}^{1/2} t^{-\frac{\alpha}{2}}.$$

mentre nel secondo, essendo $t \leq \nu t^\alpha K^{-1}(\nu)\{\lambda(1 + \|u_x\|^{2\alpha}) + (1 - \lambda)(1 + \sigma^{2\alpha})\}^{-1}$, avremo:

$$|u_x(x, t)| \leq LH(\nu)t^{-\beta} + LK(\nu)\{\lambda(1 + \|u_x\|^{2\alpha}) +$$
$$+ (1 - \lambda)(1 + \sigma^{2\alpha})\} t^{1/2-\alpha} \leq LH(\nu)t^{-\beta} + L\nu^{1/2}K^{1/2}(\nu)\{\lambda(1 + \|u_x\|^{2\alpha}) +$$
$$+ (1 - \lambda)(1 + \sigma^{2\alpha})\}^{1/2} t^{-\frac{\alpha}{2}}$$

Ma questa diseguaglianza (previa una opportuna scelta della costante indeterminata L) coincide con quella trovata nel primo caso.

Moltiplicando ambo i membri per $t^{1/2}$, avremo:

$$| u_x(x, t) | t^{1/2} \leqq LH(\nu) t^{1/2-\beta} + L\nu^{1/2} K^{1/2}(\nu) \{ \lambda(1 + \| u_x \|^{2\alpha}) +$$
$$+ (1 - \lambda)(1 + \sigma^{2\alpha}) \}^{1/2} t^{\frac{1-\alpha}{2}}$$

Poichè i fattori $t^{\frac{1}{2}-\beta}$ e $t^{\frac{1-\alpha}{2}}$ sono limitati essendo $0 < t \leqq T$, indicando ancora con L una conveniente costante, si ottiene:

$$\| u_x \| = \text{estr sup} \, | u_x(x, t) | \, t^{1/2} \leqq LH(\nu) + L\nu^{1/2} K(\nu) \cdot$$
$$\cdot \{ \lambda(1 + \| u_x \|^{2\alpha}) + (1 - \lambda)(1 + \sigma^{2\alpha}) \}^{1/2}$$

Se non sarà $\| u_x \| \leqq \sigma$, si avrà però certamente, sostituendo nel secondo membro σ con $\| u_x \|$,

$$\| u_x \| \leqq L \{ H(\nu) + \nu^{1/2} K^{1/2}(\nu)(1 + \| u_x \|^{2\alpha})^{1/2} \} .$$

Consideriamo ora l'equazione

$$\rho = L \{ H(\nu) + \nu^{1/2} K^{1/2}(\nu)(1 + \rho^{2\alpha})^{1/2} \}$$

poichè il secondo membro, come funzione di ρ, è infinito di ordine α per $\rho \to +\infty$ e, d'altra parte, il primo membro è nullo per $\rho = 0$, essa ammette radici positive. La diseguaglianza scritta sopra non può essere soddisfatta da valori di ρ che superino la maggiore radice ρ_1 dell'equazione. Avremo perciò

$$\| u_x \| \leqq \mu = \max (\sigma, \rho_1) .$$

Resterebbe ora da fissare una limitazione « a priori » per il coefficiente di Hölder $| u |_\gamma$ delle soluzioni. Ma scrivendo esplicitamente la (19) sotto forma di equazione integrodifferenziale, ci si può valere delle limitazioni « a priori » già trovate per la $\| u \|$ e la $\| u_x \|$. Tenendo presenti la (10) e la seconda delle (14) e ricordando che è $\gamma < \frac{1}{2} - \beta$, $\gamma < 1 - \alpha$, avremo

$$| u |_\gamma \leqq \tau .$$

(essendo τ una costante opportuna).

Potremo perciò asserire che le eventuali soluzioni dell'equazione (19) in $\mathfrak{S}$ sono *interne* al dominio

$$\mathfrak{D} \equiv \begin{cases} \| u \| \leqq \nu \\ \| u_x \| \leqq \mu + \varepsilon \\ | u |_\gamma \leqq \tau + \varepsilon \end{cases} \qquad \text{(essendo } \varepsilon > 0 \text{ arbitrario).}$$

La proprietà σ_2) è dunque dimostrata.

Dimostriamo ora la completa invertibilità della trasformazione lineare $u' = u - T^*(u)$. L'equazione integrale omogenea ad essa associata si può scrivere esplicitamente così:

$$u(x, t) = \int_0^t \Gamma(x, 0; t - \eta)\mu_1(\eta)u(0, \eta)d\eta + $$
$$+ \int_0^t \Gamma(x, l; t - \eta)\mu_2(\eta)u(l, \eta)d\eta + $$
$$+ \int_0^t d\eta \int_0^l \Gamma(x, \xi; t - \eta)\psi(\xi, \eta)u(\xi, \eta)d\xi$$

dove abbiamo posto

$$\mu_1(t) = \frac{\varphi_1(t, \bar{u}(0, t)) - \varphi_1(t, \underline{u}(0, t))}{\bar{u}(0, t) - \underline{u}(0, t)},$$

$$\mu_2(t) = \frac{\varphi_2(t, \bar{u}(l, t)) - \varphi_2(t, \underline{u}(l, t))}{\bar{u}(l, t) - \underline{u}(l, t)}$$

$$\psi(x, t) = \frac{F(x, t, \bar{u}(x, t), \bar{u}_x(x, t)) - F(x, t, \underline{u}(x, t), \underline{u}_x(x, t))}{\bar{u}(x, t) - \underline{u}(x, t)}$$

Questa equazione è equivalente al problema al contorno

$$u_t = u_{xx} + \psi(x, t)u$$
$$u(x, 0) = 0 \quad (0 \leqq x \leqq l)$$
$$\left. \begin{aligned} u_x(0, t) &= -\mu_1(t)u(0, t) \\ u_x(l, t) &= \quad \mu_2(t)u(l, t) \end{aligned} \right\} \quad (0 < t \leqq T)$$

Ma le funzioni ψ, μ_1, μ_2 soddisfano alle ipotesi sotto cui vale il teorema di unicità del § 2 (cioè le stesse ipotesi che sono contenute nelle I_1', I_2'), I_3') relativamente alle funzioni f, φ_1, φ_2). Possiamo perciò affermare che l'unica soluzione è quella identicamente nulla. Ma allora, essendo la $T^*(u)$ completamente continua, la trasformazione $u' = u - T^*(u)$ è completamente invertibile, in virtù del teorema generale dell'alternativa [8]).

5. - Sviluppi e corollari.

Enunciamo ora alcuni risultati atti a chiarire il significato del Teorema 1 e ad applicarlo più facilmente ai casi particolari.

Abbiamo, anzitutto, un risultato che è perfettamente analogo ad uno trovato nel lavoro (D):

Teorema 2. — « *Le sole ipotesi* I_1), I_2), I_3) *sono sufficienti ad assicurare l'esistenza di una soluzione in un intervallo abbastanza piccolo della variabile t. Più esattamente*:

è sempre possibile trovare due funzioni dotate delle proprietà volute dall'ipotesi I_4), *purchè in un intervallo* $0 < t \leqq \delta$, *con* δ *sufficientemente piccolo* ».

Infatti, presa una costante positiva M, per tutti i valori degli argomenti u e u_x soddisfacenti alle limitazioni

$$| u | \leqq 2M, \quad | u_x | \leqq t^{-1/2} M$$

si ha:

$$| \varphi_1(t, u) | \leqq H(2M) t^{-\beta}, \quad | \varphi_2(t, u) | \leqq H(2M) t^{-\beta}$$

$$| F(x, t, u, u_x) | \leqq K(2M)(1 + M^{2\alpha}) t^{-\alpha}$$

Consideriamo ora l'equazione

$$\bar{u}_t = \bar{u}_{xx} + K(2M)(1 + M^{2\alpha}) t^{-\alpha}$$

con le condizioni al contorno

$$\bar{u}(x, 0) = M$$
$$\bar{u}_x(0, t) = -H(2M) t^{-\beta}$$
$$\bar{u}_x(l, t) = \quad H(2M) t^{-\beta}$$

---

[8]) F. RIESZ, *Über lineare Funktionalgleichungen.* Acta Mathematica, *41*, 71-98 (1918).

La soluzione di questo problema al contorno sarà data dalla espressione

$$\bar{u}(x, t) = H(2M)\left\{\int_0^t \Gamma(x, 0; t-\eta)\eta^{-\beta}d\eta + \int_0^t \Gamma(x, l; t-\eta)\eta^{-\beta}d\eta\right\} +$$
$$+ K(2M)(1 + M^{2\alpha})\int_0^t d\eta \int_0^l \Gamma(x, \xi;\ t-\eta)\eta^{-\alpha}d\eta$$

Si verifica facilmente, applicando la (10) e la (11), con la seconda e la quarta delle (14), che è effettivamente possibile determinare un numero positivo δ tale che, per $0 < t \leqq \delta$, si abbia $|\bar{u}| < 2M$, $|u_x| < t^{-1/2}M$. In tale intervallo, $\bar{u}(x, t)$ soddisfa alle condizioni volute dall'ipotesi I_4) ed è perciò una maggiorante. In modo analogo si determina un minorante $\underline{u}(x, t)$.

È facile indicare condizioni espressive sotto cui esistono funzioni $\bar{u}$ e $\underline{u}$ soddisfacenti all'ipotesi I_4) e indipendenti da x. Possiamo enunciare il seguente

Corollario 1. — « *Supponiamo che nel problema* (1), (2) *i dati F, φ_1, φ_2 χ siano continui per $0 \leqq x \leqq l$, $0 \leqq t < +\infty$, $-\infty < u < +\infty$, $-\infty < u_x < +\infty$; inoltre la F sia puntualmente hölderiana e soddisfi alla limitazione*

$$|F(x, t, u, u_x)| < K(|u|)(1 + |u_x|^{2\alpha}) \qquad (0 < \alpha < 1).$$

essendo $K(\rho)$ una funzione positiva crescente definita per $0 \leqq \rho < +\infty$ e tale che sia

$$\int_0^\infty \frac{d\rho}{K(\rho)} = +\infty.$$

Allora il problema (1), (2) *è risolubile per T arbitrariamente grande* [9]*, se è possibile trovare un numero positivo M tale che*

---

[9]) Notiamo che, dall'esistenza di un integrale in ogni intervallo $0 \leqq t \leqq T$, con T arbitrariamente grande, si può dedurre (mediante un risultato riguardante il prolungamento delle soluzioni. di cui faremo uso nel § 6) l'esistenza di un integrale almeno per $0 \leqq t < +\infty$.

per $|u| > M$ *si abbia*

$$\left.\begin{array}{l} u\varphi_1(t, u) < 0 \\ u\varphi_2(t, u) < 0 \end{array}\right\} \quad (0 \leqq t < +\infty). \text{»}$$

Infatti la soluzione dell'equazione $\dfrac{d\bar{u}}{dt} = \psi(\bar{u})$ relativa ad un valore iniziale $\bar{u}(0) > \max(M, \|\chi\|)$, può essere presa come maggiorante in tutto l'intervallo $0 < t < +\infty$, mentre la funzione $\underline{u}(t) = -\bar{u}(t)$ può essere presa come minorante.

Nel caso in cui nella F manchi l'argomento u_x si può utilizzare il

Corollario 2. — « *Si consideri il problema al contorno*

$$u_t = u_{xx} + F(x, t, u)$$

$$u(x, 0) = \chi(x) \quad (0 \leqq x \leqq l)$$

$$\left.\begin{array}{l} u_x(0, t) = -\varphi_1(t, u(0, t)) \\ u_x(l, t) = \quad \varphi_2(t, u(l, t)) \end{array}\right\} \quad (0 < t < +\infty)$$

dove le funzioni $F, \chi, \varphi_1, \varphi_2$, *sono definite e continue per* $0 \leqq x \leqq l$, $0 \leqq t < +\infty$, $-\infty < u < +\infty$, *e la* F *è puntualmente hölderiana all'interno del suo campo di esistenza. Inoltre esistano due funzioni positive non decrescenti* $M(t)$ *e* $N(t)$ *definite per* $0 < t < +\infty$ *e tali che si abbia, per* $|u| > M(t)$,

$$\frac{\varphi_1(t, u)}{u} < N(t), \quad \frac{\varphi_2(t, u)}{u} < N(t), \quad \frac{F(x, t, u)}{u} < N(t)$$

Sotto queste ipotesi, il nostro problema al contorno è risolubile per T *arbitrariamente grande* ».

Basterà far vedere come si può ottenere, anche in questo caso, una maggiorante ed una minorante. Preso infatti un intervallo $0 < t \leqq T$, si avrà, per $u > M(T)$,

$$F(x, t, u) < N(T)u$$

$$\varphi_1(t, u) \quad < N(T)u$$

$$\varphi_2(t, u) \quad < N(T)u\,.$$

Consideriamo ora la funzione $\bar{u}(x, t) = w(t)$ ch $(\lambda[x - l/2])$, dove $w(t)$ è una funzione positiva che determineremo. Si vede subito che, se è $w(t) \geqq M(T)$ e λ è la soluzione positiva della equazione

$$\lambda \operatorname{th} \lambda l/2 = N(T)$$

si ha

$$-\bar{u}_x(0, t) = w(t)\lambda \operatorname{sh} \lambda l/2 = N(T) w(t) \operatorname{ch} \lambda l/2 =$$

$$= N(T)\bar{u}(0, t) > \varphi_1(t, \bar{u}(0, t))$$

e così pure

$$\bar{u}_x(l, t) > \varphi_2(t, \bar{u}(l, t))$$

Prendiamo ora

$$w(t) = w_0 \exp([\lambda^2 + N(T)]t) \qquad (w_0 \geqq M(T),\ w_0 > \| \chi \|)$$

avremo

$$\bar{u}_t - \bar{u}_{xx} = N(T)\bar{u}(x, t) > F(x, t, \bar{u}(x, t)) .$$

Per avere una minorante basta prendere $\underline{u}(x, t) = -\bar{u}(x, t)$.

6. - Soluzioni periodiche.

Occupiamoci ora delle soluzioni periodiche. Consideriamo il problema al contorno

$$u_t = u_{xx} + f(x, t, u, u_x) \tag{21}$$

$$\begin{cases} u_x(0, t) = -\varphi_1(t, u(0, t)) \\ u_x(l, t) = \quad \varphi_2(t, u(l, t)) \end{cases} \qquad (-\infty < t < +\infty) \tag{22}$$

in cui f, φ_1, φ_2 *sono funzioni periodiche rispetto a* t, *con lo stesso periodo* T. Abbiamo il seguente teorema:

Teorema 3. — «*Il problema al contorno* (21), (22) *ammette una soluzione, almeno, periodica con lo stesso periodo* T *delle funzioni* f, φ_1 e φ_2, *se sono soddisfatte le seguenti condizioni*:

J$_1$) *la funzione* $f(x, t, u, u_x)$ *sia continua per* $0 \leqq x \leqq l$, $-\infty < t < +\infty$, $-\infty < u < +\infty$, $-\infty < u_x < +\infty$, *e soddisfi alla limitazione*

$$| f(x, t, u, u_x) | \leqq K(| u |) \{ 1 + | u_x |^{2\alpha} \}$$

dove K è una funzione non negativa non decrescente ed α è una costante non negativa minore di 1;

J_2) *la funzione $f(x, t, u, u_x)$ soddisfi puntualmente ad una condizione di Hölder internamente al dominio in cui è definita;*

J_3) *le funzioni $\varphi_1(t, u)$ e $\varphi_2(t, u)$* siano continue per $-\infty < t < +\infty$, $-\infty < u < +\infty$;

J_4) *posto*

$$\bar{f}(x, u, u_x) = \max_{0 \leqq t < T} f(x, t, u, u_x)$$

$$\bar{\varphi}_1(u) = \max_{0 \leqq t < T} \varphi_1(t, u)\,, \quad \bar{\varphi}_2(u) = \max_{0 \leqq t < T} \varphi_2(t, u)$$

l'equazione differenziale ordinaria

$$\bar{u}'' + \bar{f}(x, \bar{u}, \bar{u}') = 0$$

ammetta una soluzione $\bar{u}(x)$ tale che sia

$$-\bar{u}'(0) > \bar{\varphi}_1(\bar{u}(0)) \quad , \quad \bar{u}'(l) > \bar{\varphi}_2(\bar{u}(l))$$

così pure, posto

$$\underline{f}(x, u, u_x) = \min_{0 \leqq t < T} f(x, t, u, u_x)$$

$$\underline{\varphi}_1(u) = \min_{0 < t < T} \varphi_1(t, u)\,, \quad \underline{\varphi}_2(u) = \min_{0 \leqq t < T} \varphi_2(t, u)$$

l'equazione ordinaria

$$\underline{u}'' + \underline{f}(x, \underline{u}, \underline{u}') = 0$$

ammetta una soluzione $\underline{u}(x)$ tale che sia

$$\underline{u}'(0) < \underline{\varphi}_1(\underline{u}(0)) \quad , \quad \underline{u}'(l) < \underline{\varphi}_2(\underline{u}(l))\,.$$

Inoltre si abbia sempre, per $0 \leqq x \leqq l$,

$$\bar{u}(x) > \underline{u}(x) \text{ ».}$$

Le soluzioni del nostro problema, oltre a soddisfare puntualmente la (21), per $0 < x < l$, dovranno essere continue insieme con la loro derivata rispetto ad x per $0 \leqq x \leqq l$.

Noi dimostreremo l'esistenza di una soluzione, almeno, compresa fra $\bar{u}(x)$ e $\underline{u}(x)$. Come abbiamo fatto nel lavoro (P)

(e come si fa spesso in questioni di questa natura) cominciamo col modificare la definizione delle funzioni f, φ, φ_2 al di sopra di $\bar{u}$ e al di sotto di $\underline{u}$ (rispettando la continuità) in modo da ottenere che tutte le eventuali soluzioni periodiche del problema al contorno che così si ottiene siano comprese fra $\bar{u}(x)$ e $\underline{u}(x)$. Porremo:

$$F(x,t,u,u_x) = \begin{cases} f(x,t,\bar{u}(x),u_x) - (u - \bar{u}(x)) & \text{per} \quad u > \bar{u}(x) \\ f(x,t,u,u_x) & \text{per} \quad \underline{u}(x) \leqq u \leqq \bar{u}(x) \\ f(x,t,\underline{u}(x),u_x) - (u - \underline{u}(x)) & \text{per} \quad u < \underline{u}(x) \end{cases}$$

Analogamente:

$$\Phi_1(t,u) = \begin{cases} \varphi_1(t,\bar{u}(0)) - (u - \bar{u}(0)) & \text{per} \quad u > \bar{u}(0) \\ \varphi_1(t,u) & \text{per} \quad \underline{u}(0) \leqq u \leqq \bar{u}(0) \\ \varphi_1(t,\underline{u}(0)) - (u - \underline{u}(0)) & \text{per} \quad u < \underline{u}(0) \end{cases}$$

$$\Phi_2(t,u) = \begin{cases} \varphi_2(t,\bar{u}(l)) - (u - \bar{u}(l)) & \text{per} \quad u > \bar{u}(l) \\ \varphi_2(t,u) & \text{per} \quad \underline{u}(l) \leqq u \leqq \bar{u}(l) \\ \varphi_2(t,\underline{u}(l)) - (u - \underline{u}(l)) & \text{per} \quad u < \underline{u}(l). \end{cases}$$

Alle funzioni F, Φ_1, Φ_2 faremo corrispondere i loro rispettivi massimi e minimi al variare di t: $\bar{F}$, $\bar{\Phi}_1$, $\bar{\Phi}_2$; $\underline{F}$, $\underline{\Phi}_1$, $\underline{\Phi}_2$. È ovvio che per $\underline{u}(x) \leqq u \leqq \bar{u}(x)$ queste funzioni coincidono con le rispettive $\bar{f}$, $\bar{\varphi}_1$, $\bar{\varphi}_2$; $\underline{f}$, $\underline{\varphi}_1$, $\underline{\varphi}_2$; pertanto le funzioni $\bar{u}(x)$ ed $\underline{u}(x)$ soddisferanno alle equazioni ordinarie che si ottengono sostituendo alla $\bar{f}$ e alla $\underline{f}$ la $\bar{F}$ e la $\underline{F}$ rispettivamente. Anche le diseguaglianze valide per $x = 0$ ed $x = l$, secondo quanto afferma l'ipotesi J_4), rimarranno valide sostituendo $\bar{\varphi}_1$, $\bar{\varphi}_2$, $\underline{\varphi}_1$, $\underline{\varphi}_2$, con $\bar{\Phi}_1$, $\bar{\Phi}_2$, $\underline{\Phi}_1$, $\underline{\Phi}_2$, rispettivamente.

Consideriamo ora le funzioni così definite:

$$F^*(x,u) =$$

$$= \begin{cases} \bar{F}(x,\bar{u}(x),\bar{u}'(x)) - (u - \bar{u}(x)) & \text{per} \quad u > \bar{u}(x) \\ \dfrac{(u - \underline{u}(x))\bar{F}(x,\bar{u}(x),\bar{u}'(x)) + (\bar{u}(x) - u)\underline{F}(x,\underline{u}(x),\underline{u}'(x))}{\bar{u}(x) - \underline{u}(x)} & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{per} \quad \underline{u}(x) \leqq u \leqq \bar{u}(x) & \\ \underline{F}(x,\underline{u}(x),\underline{u}'(x)) - (u - \underline{u}(x)) & \text{per} \quad u < \underline{u}(x) \end{cases}$$

$$\Phi_1^*(u) = \begin{cases} \bar{\varphi}_1(\bar{u}(0)) - (u - \bar{u}(0)) & \text{per} \quad u > \bar{u}(0) \\ \dfrac{(u - \underline{u}(0))\bar{\varphi}_1(\bar{u}(0)) + (\bar{u}(0) - u)\underline{\varphi}_1(\underline{u}(0))}{\bar{u}(0) - \underline{u}(0)} & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{per } \underline{u}(0) \leq u \leq \bar{u}(0) & \\ \underline{\varphi}_1(\underline{u}(0)) - (u - \underline{u}(0)) & \text{per} \quad u < \underline{u}(0) \end{cases}$$

$$\Phi_2^*(u) = \begin{cases} \bar{\varphi}_2(\bar{u}(l)) - (u - \bar{u}(l)) & \text{per} \quad u > \bar{u}(l) \\ \dfrac{(u - \underline{u}(l))\bar{\varphi}_2(\bar{u}(l)) + (\bar{u}(l) - u)\underline{\varphi}_2(\underline{u}(l))}{\bar{u}(l) - \underline{u}(l)} & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{per } \underline{u}(l) \leq u \leq \bar{u}(l) & \\ \underline{\varphi}_2(u(l)) - (u - \underline{u}(l)) & \text{per} \quad u < \underline{u}(l) \end{cases}$$

Dimostriamo che l'equazione

$$u_t = u_{xx} + \lambda F(x, t, u, u_x) + (1 - \lambda)F^*(x, u) \tag{23}$$

con le condizioni al contorno

$$\begin{aligned} u_x(0, t) &= -\lambda\Phi_1(t, u(0, t)) - (1 - \lambda)\Phi_2^*(u(0, t)) \\ u_x(l, t) &= \lambda\Phi_2(t, u(l, t)) + (1 - \lambda)\Phi_2^*(u(l, t)) \end{aligned} \tag{24}$$

ha, per ogni valore di λ con $0 \leq \lambda \leq 1$, tutte le sue soluzioni periodiche comprese tra $\underline{u}(x)$ e $\bar{u}(x)$. Infatti, sia $u(x, t)$ una soluzione periodica e supponiamo che la funzione

$$y(x, t) = u(x, t) - \bar{u}(x)$$

assuma valori positivi. Essa avrà allora un massimo positivo m, in un certo punto $(\bar{x}, \bar{t})$. Supponiamo che sia $\bar{x} = 0$. Sarà:

$$\begin{gathered} y_x(0, \bar{t}) = -\lambda\Phi_1(\bar{t}, u(0, \bar{t})) - (1 - \lambda)\Phi_1^*(u(0, \bar{t})) - \bar{u}'(0) = \\ = -\lambda\{\varphi_1(\bar{t}, \bar{u}(0)) - m\} - (1 - \lambda)\{\bar{\varphi}_1(\bar{u}(0)) - m\} - \bar{u}'(0) \geq \\ \geq -(\bar{\varphi}_1(\bar{u}(0)) + \bar{u}'(0)) + m > m > 0\,. \end{gathered}$$

Ma questo non può essere perchè la derivata destra di $y(x, t)$ nel punto $(0, \bar{t})$ dovrebbe essere negativa o nulla. In modo anologo si dimostra che non può essere $x = l$. Ma il punto $(\bar{x}, \bar{t})$ non può essere neppure interno alla striscia; basta per questo ripetere un ragionamento che ha servito nel lavoro (P):

nel punto $(\bar{x}, \bar{t})$ si avrebbe

$$y_x(\bar{x}, \bar{t}) = u_x(\bar{x}, \bar{t}) - \bar{u}'(\bar{x}) = 0$$
$$y_t(\bar{x}, \bar{t}) = u_t(\bar{x}, \bar{t}) = 0$$
$$y_{xx}(\bar{x}, \bar{t}) = u_{xx}(\bar{x}, \bar{t}) - \bar{u}''(\bar{x}) \leqq 0$$

Dall'equazione (23) e dalle prime due relazioni ora scritte si avrebbe allora:

$$\begin{aligned} u_{xx}(\bar{x}, \bar{t}) &= -\lambda F(\bar{x}, \bar{t}, u(\bar{x}, \bar{t}), u_x(\bar{x}, \bar{t})) - (1-\lambda)F^*(\bar{x}, u(\bar{x}, \bar{t})) \\ &= -\lambda F(\bar{x}, \bar{t}, \bar{u}(\bar{x}), \bar{u}'(\bar{x})) + \lambda[u(\bar{x}, \bar{t}) - \bar{u}(\bar{x})] - \\ &\quad - (1-\lambda)\overline{F}(\bar{x}, \bar{u}(\bar{x}), \bar{u}'(\bar{x})) + (1-\lambda)[u(\bar{x}, \bar{t}) - \bar{u}(\bar{x})] \geqq \\ &\geqq -\overline{F}(\bar{x}, \bar{u}(\bar{x}), \bar{u}'(\bar{x})) + m\,. \end{aligned}$$

D'altra parte, è

$$\bar{u}''(\bar{x}) = -\overline{F}(\bar{x}, \bar{u}(\bar{x}), \bar{u}'(\bar{x})).$$

Sottraendo membro a membro dalla relazione precedente si ottiene

$$u_{xx}(\bar{x}, \bar{t}) - \bar{u}''(\bar{x}) = y_{xx}(\bar{x}, \bar{t}) \geqq m > 0$$

diseguaglianza incompatibile con l'ultima delle tre relazioni scritte sopra ed esprimenti condizioni necessarie per l'esistenza di un massimo. Analogamente si dimostra che deve essere $u(x, t) \geqq \underline{u}(x)$.

Secondo quanto abbiamo visto alla fine del § 2, le soluzioni devono soddisfare all'equazione analoga alla (20) che si ottiene applicando la formula di Green ad un arbitrario rettangolo $t - k \leqq \eta \leqq t$, $0 \leqq x \leqq l$. Procedendo in modo analogo a quello seguito nel § 4 si trova una limitazione « a priori » per la derivata rispetto ad x. In questo caso, anzi, le cose si semplificano perchè le funzioni F, Φ_1 Φ_2; F^*, $\Phi_1{}^*$, $\Phi_2{}^*$ sono ovunque continue e perchè k può essere un qualsiasi numero positivo.

Si potrà concludere che si ha

$$|\, u_x(x, t) \,| \leqq \mu \qquad (\mu = \text{cost.},\ 0 \leqq \lambda \leqq 1)$$

Consideriamo ora il rettangolo $\mathfrak{R} \equiv (0 \leqq t \leqq T,\ 0 \leqq x \leqq l)$.

Le soluzioni periodiche di periodo T del problema (21), (22) dovranno soddisfare necessariamente a questo sistema

$$
(25)\quad \begin{cases}
u(x, t) = \int_0^l \Gamma(x, \xi; t)\chi(\xi)d\xi + \int_0^t \Gamma(x, 0; t-\eta)\Phi_1(\eta, u(0, \eta))d\eta + \\
\quad + \int_0^t \Gamma(x, l; t-\eta)\Phi_2(\eta, u(l, \eta))d\eta + \int_0^t d\eta \int_0^l \Gamma(x, \xi; t-\eta) \cdot \\
\quad \cdot F(\xi, \eta, u(\xi, \eta), u_x(\xi, \eta))d\xi \qquad (0 \leqq t \leqq T) \\
\chi(x) = \int_0^l \Gamma(x, \xi; T)\chi(\xi)d\xi + \int_0^T \Gamma(x, 0; T-\eta)\Phi_1(\eta, u(0, \eta))d\eta + \\
\quad + \int_0^T \Gamma(x, l; T-\eta)\Phi_2(\eta, u(l, \eta))d\eta + \int_0^T d\eta \int_0^l \Gamma(x, \xi; T-\eta) \cdot \\
\quad \cdot F(\xi, \eta, u(\xi, \eta), u_x(\xi, \eta))d\xi .
\end{cases}
$$

Dimostriamo ora che ogni funzione $u(x, t)$ soddisfacente (con una corrispondente $\chi(x) = u(x, 0) = u(x, T)$ al sistema (25) è effettivamente una soluzione periodica del nostro problema al contorno. Questa asserzione deve essere anzitutto chiarita in questo modo: definiamo la funzione $u(x, t)$ in tutta la striscia $0 \leqq x \leqq l$, $-\infty < t < +\infty$, ponendo $u(x, t) = (x, t')$, ove è $0 \leqq t' < T$ ed è $t \equiv t'$ (mod. T). Bisogna fare vedere che sulle caratteristiche $t = kT$ (k intero) tanto la funzione u che la derivata u_x sono continue e, inoltre, l'equazione (21) risulta soddisfatta. Basterà fare la dimostrazione per $t = T$. Noi verificheremo che la prima equazione del sistema (25) è soddisfatta per t variabile nell'intervallo più ampio $0 \leqq t \leqq$ $\leqq T + \varepsilon$ $(T > \varepsilon > 0)$ dalla funzione $u(x, t)$ definita come abbiamo visto.

Premettiamo questa importante formula, valida per $t_1 > 0$, $t_2 > 0$ [10]):

$$
\Gamma(x, \xi; t_1 + t_2) = \Gamma(\xi, x; t_1 + t_2) = \int_0^l \Gamma(x, \lambda; t_1)\Gamma(\lambda, \xi; t_2)d\lambda .
$$

---

10) La dimostrazione di questa formula si può fare molto semplicemente in questo modo: consideriamo la funzione $v(x, t)$ che ab-

Considieriamo dunque il secondo membro della prima delle (25). Avremo, ponendo $t = T + \tau$ ed applicando la formula ora scritta,

$$\int_0^l \Gamma(x, \xi; t)\chi(\xi)d\xi + \int_0^t \Gamma(x, 0; t - \eta)\, \Phi_1(\eta, u(0, \eta))d\eta +$$
$$+ \int_0^t \Gamma(x, l; t - \eta) \cdot \Phi_2(\eta, u(l, \eta))d\eta +$$
$$+ \int_0^t d\eta \int_0 \Gamma(x, \xi; t - \eta)F(\xi, \eta, u(\xi, \eta), u_x(\xi, \eta))d\xi =$$
$$= \int_0^l \Gamma(x, \xi; t)\chi(\xi)d\xi + \int_0^{T+\tau} \Gamma(x, 0; T + \tau - \eta)\Phi_1(\eta, u(0, \eta))d\eta +$$
$$+ \int_0^{T+\tau} \Gamma(x, l; T + \tau - \eta) \cdot \Phi_2(\eta, u(l, \eta))d\eta +$$

---

biamo studiato nel § 2 (formula (8)). Essa risolve il problema al contorno

$$v_t = v_{xx}$$
$$v(x, 0) = \chi(x), \quad v_x(0, t) \equiv v_x(l, t) \equiv 0$$

In virtù del teorema di unicità, si avrà

$$v(x, t_1 + t_2) = \int_0^l \Gamma(x, \xi; t_1 + t_2)\chi(\xi)d\xi = \int_0^l \Gamma(x, \lambda; t_1)v(\lambda, t_2)d\lambda =$$
$$= \int_0^l \Gamma(x, \lambda; t_1) \left\{ \int_0^l \Gamma(\lambda, \xi; t_2)\chi(\xi)d\xi \right\} d\lambda$$

da cui

$$\int_0^l \Gamma(x, \xi; t_1 + t_2)\chi(\xi)d\xi = \int_0^l \left\{ \int_0^l \Gamma(x, \lambda; t_1)\Gamma(x, \xi; t_2)d\lambda \right\} \chi(\xi)d\xi$$

ma, dovendo verificarsi questa relazione per qualsiasi scelta della funzione continua $\chi(x)$, deve essere

$$\Gamma(x, \xi; t_1 + t_2) = \int_0 \Gamma(x, \lambda; t_1)\Gamma(\lambda, \xi; t_2)d\lambda$$

$$+\int_0^{T+\tau} d\eta \int_0^l \Gamma(x, \xi;\, T+\tau-\eta) F(\xi, \eta, u(\xi, \eta), u_x(\xi, \eta))\, d\xi =$$

$$=\int_0^l \left\{ \int_0^l \Gamma(x, \lambda; \tau)\Gamma(\lambda, \xi; T)\, d\lambda \right\} \chi(\xi)\, d\xi + \int_0^T \left\{ \int_0^l \Gamma(x, \lambda; \tau)\Gamma(\lambda, 0; T-\eta)\, d\lambda \right\} \cdot$$

$$\cdot\, \Phi_1(\eta, u(0, \eta))\, d\eta + \int_T^{T+\tau} \Gamma(x, 0;\, \tau-[\eta-T])\Phi_1(\eta, u(0, \eta))\, d\eta +$$

$$+\int_0^T \left\{ \int_0^l \Gamma(x, \lambda;\, \tau)\Gamma(\lambda, l;\, T-\eta)\, d\lambda \right\} \Phi_2(\eta, u(l, \eta))\, d\eta +$$

$$+\int_T^{T+\tau} \Gamma(x, l;\, \tau-[\eta-T])\Phi_2(\eta, u(l, \eta))\, d\eta +$$

$$+\int_0^T d\eta \int_0^l \left\{ \int_0^l \Gamma(x, \lambda; \tau)\Gamma(\lambda, \xi; T-\eta)\, d\lambda \right\} F(\xi, \eta, u(\xi, \eta), u_x(\xi, \eta))\, d\xi +$$

$$+\int_T^{T+\tau} d\eta \int_0^l \Gamma(x, \xi;\, \tau-[\eta-T]) F(\xi, \eta, u(\xi, \eta), u_x(\xi, \eta))\, d\xi .$$

Aggiungendo e togliendo il termine $\int_0^l \Gamma(x, \xi;\, \tau)\chi(\xi)\, d\xi$ ed eseguendo alcune sostituzioni e inversioni nell'ordine delle integrazioni, l'espressione diventa:

$$\int_0^l \Gamma(x, \xi;\, \tau)\chi(\xi)\, d\xi + \int_0^\tau \Gamma(x, 0;\, \tau-\nu)\Phi_1(\nu, u(0, \nu))\, d\nu +$$

$$+\int_0^\tau \Gamma(x, l;\, \tau-\nu)\cdot \Phi_2(\nu, u(l, \nu))\, d\nu +$$

$$+\int_0^\tau d\nu \int_0^l \Gamma(x, \xi;\, \tau-\nu) F(\xi, \nu, u(\xi, \nu), u_x(\xi, \nu))\, d\xi +$$

$$+\int_0^l \Gamma(x, \lambda;\, \tau) \left\{ -\chi(\lambda) + \int \Gamma(\lambda, \xi;\, T)\chi(\xi)\, d\xi + \right.$$

$$+\int_0^T \Gamma(\lambda,\, 0;\, T-\eta)\cdot \Phi_1(\eta,\, u(0,\, \eta))d\eta +$$

$$+\int_0^T \Gamma(\lambda,\, l;\, T-\eta)\, \Phi_2(\eta,\, u(l,\, \eta))d\eta +$$

$$+\int_0^T d\eta \int_0 \Gamma(\lambda,\, \xi;\, T-\eta) F(\xi,\, \eta,\, u(\xi,\, \eta),\, u_x(\xi,\, \eta))d\xi \Big\} d\lambda\, .$$

Ma l'espressione entro le graffe è nulla, identicamente al variare di λ, per la seconda delle (25). Ora, per la prima delle (25) (che è certamente soddisfatta dalla $u(x,\, t)$ per $0 \leqq t \leqq T$) i termini che rimangono non sono altro che $u(x,\, \tau) = u(x,\, T+\tau) = u(x,\, t)$. Risulta così dimostrato che la prima delle (25) è soddisfatta anche per $T \leqq t \leqq T+\varepsilon$ dalla funzione $u(x,\, t)$ che noi abbiamo definito per periodicità; da questo fatto si deducono immediatamente le proprietà richieste.

Scriveremo brevemente le equazioni del sistema (25), nel loro ordine, in questo modo:

$$(25') \qquad \begin{cases} u = Q(u,\, \chi) \\ \chi = R(u,\, \chi)\, . \end{cases}$$

Il sistema che traduce il problema più generale (23), (24) sarà indicato, con ovvio significato di simboli, così

$$(26) \qquad \begin{cases} u = \lambda Q(u,\, \chi) + (1-\lambda)Q^*(u,\, \chi) \\ \chi = \lambda R(u,\, \chi) + (1-\lambda)R^*(u,\, \chi)\, . \end{cases}$$

Per poter affermare che il sistema (26) è equivalente al problema (23), (24) con la condizione di periodicità, si può ripetere il ragionamento fatto per il caso $\lambda = 1$. C'è solo una difficoltà da superare: la funzione $F^*(x,\, u)$ non soddisfa necessariamente ad una condizione di Hölder in ogni punto: e quindi non si può fare ricorso al criterio già citato di E. E. Levi per affermare che l'integrale

$$\int_0^t d\eta \int_0^l \Gamma(x,\, \xi;\, t-\eta) F^*(\xi,\, u(\xi,\, \eta))d\xi$$

ammette derivata rispetto a t e derivata seconda rispetto ad x. Ma la funzione F^* è della forma

$$F^*(x, u) = \psi(x)u(x, t) + \omega(x)$$

essendo ψ ed ω continue. Tenendo presente che $u(x, t)$, supposto che sia soluzione del sistema (26), soddisfa ad una condizione di Hölder, si può fare ricorso ad un altro criterio, dovuto a M. Gevrey [11]), da cui si ottiene facilmente l'esistenza di tali derivate.

Fissiamo ora lo spazio funzionale in cui vogliamo considerare il sistema (26): *sarà il prodotto topologico dello spazio* $\mathfrak{S}$ *delle* $u(x, t)$ *per lo spazio* $\mathfrak{S}'$ *delle* $\chi(x)$, *dove* $\mathfrak{S}$ *è lo stesso spazio che abbiamo considerato nel* § 3; *soltanto l'esponente di Hölder,* γ, *nella limitazione degli incrementi rispetto a* t, *è sottoposto qui alla sola limitazione* $\gamma < 1 - \alpha$ (noi supporremo anche ora $1/2 < \alpha < 1$, questo unicamente per poterci giovare delle maggiorazioni (14)).

Lo spazio $\mathfrak{S}'$ *sarà invece quello delle funzioni* $\chi(x)$ *continue con la loro derivata nell'intervallo* $0 \leqq x \leqq l$. Per esso stabiliremo la norma

$$\|\chi\| + \left\|\frac{d\chi}{dx}\right\|$$

dove è

$$\|\chi\| = \max_{0<x<} |\chi(x)|, \quad \left\|\frac{d\chi}{dx}\right\| = \max_{0\leqq x\leqq l} \left|\frac{d\chi}{dx}\right|,$$

La norma che assumeremo per $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}'$ sarà:

$$\|u\| + \|u_x\| + |u|_\gamma + \|\chi\| + \left\|\frac{d\chi}{dx}\right\|$$

Con questa norma, il nostro spazio risulterà completo. Seguendo ancora il metodo di Leray e Schauder consideriamo la trasformazione

$$(26')\qquad \begin{cases} u' = u - \lambda Q(u, \chi) - (1-\lambda)Q^*(u, \chi) \\ \chi' = \chi - \lambda R(u, \chi) - (1-\lambda)R^*(u, \chi). \end{cases}$$

---

11) M. GEVREY, *Sur les équations aux dérivées partielles du tipe parabolique*. J. Math. Pures Appl., *78*, 305-574 (1913). Qui ci riferiamo, in particolare, alla condizione A_3 di pag. 351.

Essa muta i punti di $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}'$ *in punti dello stesso spazio.* Verificheremo che questo accade per l'operazione (Q, R), cioè per il caso $\lambda = 1$. Analogamente si procede per (Q^*, R^*). Consideriamo la rappresentazione esplicita della trasformazione $Q(u, \chi)$; essa differisce dal secondo membro della (15) solo per la presenza del termine

$$v(x, t) = \int_0^l \Gamma(x, \xi;\ t - \eta)\chi(\xi)d\xi .$$

Ma questo soddisfa ora ad una condizione di Hölder di esponente ½ rispetto a t; infatti si ha (per $t'' > t' > 0$)

$$v(x, t'') - v(x, t') = \int_0^l \{\Gamma(x, \xi;\ t'') - \Gamma(x, \xi;\ t')\}\chi(\xi)d\xi =$$

$$= (t'' - t') \int_0^l \Gamma_t(x, \xi;\ t' + \theta(t'' - t'))\chi(\xi)d\xi =$$

$$= (t'' - t') \int_0^l \Gamma_{xx}(x, \xi;\ t' + \theta(t'' - t'))\chi(\xi)d\xi =$$

$$= (t'' - t') \int_0^l \Gamma_{\xi\xi}(x, \xi;\ t' + \theta(t'' - t'))\chi(\xi)d\xi =$$

$$= (t'' - t') \left\{ \Big[\Gamma_\xi(x, \xi;\ t' + \theta(t'' - t'))\chi(\xi)\Big]_{\xi=0}^{\xi=l} - \int_0^l \Gamma_\xi(x, \xi;\ t' + \theta(t'' - t'))\frac{d\chi}{d\xi}d\xi \right\} \qquad (0 < \theta < 1)$$

da cui, ricordando che è $\Gamma_\xi(x, \xi;\ \tau) = 0$ per $\xi = 0$ e $\xi = l$ $(0 \leqq x \leqq l)$ e osservando che è $\int_0^l |\Gamma_\xi(x, \xi;\ k)|\, d\xi \leqq Lk^{-1/2}$, si racava

$$|v(x, t'') - v(x, t')| \leqq (t'' - t')L \left\| \frac{d\chi}{dx} \right\| (t' + \theta(t'' - t'))^{-1/2}$$

e, infine,

$$| v(x, t'') - v(x, t') | \leq L \left\| \frac{d\chi}{dx} \right\| \int_{t'}^{t''} t^{-1/2} dt =$$

$$= L \left\| \frac{d\chi}{dx} \right\| 2(t''^{1/2} - t'^{1/2}) \leq L \left\| \frac{d\chi}{dx} \right\| (t'' - t')^{1/2}.$$

Tenendo presente che è $\gamma < 1/2$ si conclude che $Q(u, \chi)$ muta i punti di $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}'$ in punti di $\mathfrak{S}$. Basta poi riflettere che $v(x, T)$ è derivabile quante volte si vuole rispetto ad x nell'intervallo chiuso $0 \leq x \leq l$ e ricordare la proprietà β_3) del § 2, con la terza delle (14), per affermare che $R(u, \chi)$ trasforma i punti di $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}'$ nei punti di $\mathfrak{S}'$.

Le operazioni (Q, R) *e* (Q^*, R^*) *sono completamente continue in* $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}'$.

Vediamo la dimostrazione per il caso della (Q, R); per l'altra operazione si procederà in modo analogo, anzi più semplice. Sia dunque assegnata una successione $\{ u_n, \chi_n \}$ limitata in $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}'$. A causa della condizione di Hölder rispetto alla t a cui soddisfano tutte le u_n e a causa della uguale limitatezza delle derivate $\frac{d\chi_n}{dx}$, si può estrarre dalla successione una successione parziale $\{ (u_{n_k}, \chi_{n_k}) \}$ tale che le u_{n_k} risultino uniformemente convergenti sui lati $x = 0$ ed $x = l$ verso due funzioni $g_1(t)$ e $g_2(t)$ rispettivamente, mentre le χ_{n_k} convergono uniformemente verso una funzione $h(x)$. Posto

$$w(x, t) = \int_0^t \Gamma(x, 0; t - \eta) \varphi_1(\eta, g_1(\eta)) d\eta + \\ + \int_0^t \Gamma(x, l; t - \eta) \varphi_2(\eta, g_2(\eta)) d\eta,$$

$$w_{n_k}(x, t) = \int_0^t \Gamma(x, 0; t - \eta) \varphi_1(\eta, u_{n_k}(0, \eta)) d\eta + \\ + \int_0^t \Gamma(x, l; t - \eta) \varphi_2(\eta, u_{n_k}(l, \eta)) d\eta,$$

$$v(x, t) = \int_0^t \Gamma(x, \xi, t) h(\xi) d\xi,$$

$$v_{n_k}(x, t) = \int_0^t \Gamma(x, \xi; t) \chi_{n_k}(\xi) d\xi,$$

avremo, come nel § **4** (cfr. Appendice **3)**), oppure, più semplicemente tenendo presente che ora le funzioni φ_1 e φ_2 risultano continue per $0 \leq t \leq T$:

$$\| w - w_{n_k} \| \to 0 \quad , \quad \| (w - w_{n_k})_x \| \to 0 \qquad (k \to +\infty) .$$

Inoltre si vede facilmente che è $\| v - v_{n_k} \| \to 0$ e dalla (8) si ricava

$$\| (v - v_{n_k})_x \| \to 0 .$$

Dalla (10) (con $\beta = 0$) si vede che le w_{n_k} soddisfano ad una stessa condizione di Hölder di esponente $1/2$; così pure le v_{n_k}, come abbiamo visto prima. Si ha perciò

$$| w - w_{n_k} |_\gamma \to 0 \quad , \quad | v - v_{n_k} |_\gamma \to 0$$

essendo $\gamma < 1/2$.

Dunque, secondo la norma di $\mathfrak{S}$, si ha

$$w_{n_k} \to w \quad , \quad v_{n_k} \to v \qquad (k \to \infty).$$

Queste relazioni implicano che, secondo la norma di $\mathfrak{S}'$, si abbia

$$w_{n_k}(x, T) \to w(x, T) \quad , \quad v_{n_k}(x, T) \to v(x, T) \qquad (k \to \infty).$$

Dopo ciò, consideriamo la successione delle funzioni

$$z_{n_k}(x, t) = \int_0^t d\eta \int_0^l \Gamma(x, \xi; t - \eta) F(\xi, \eta, u_{n_k}(\xi, \eta), u_{n_k x}(\xi, \eta)) d\xi$$

Essendo la successione $\{ u_n \}$ limitata in $\mathfrak{S}$, avremo

$$| F(\xi, \eta, u_{n_k}(\xi, \eta), u_{n_k x}(\xi, \eta)) | \leq k \eta^{-a}$$

dove K è una opportuna costante (dipendente dalla successione

$\{u_n\}$). Potremo allora valerci delle formule (14). Ripetenendo il ragionamento fatto nel § 4 e ricordando, in particolare che è $\gamma < 1 - \alpha$, si trova che dalla successione delle z_{n_k} si può estrarre una seconda successione di indice $n_{k'}$ convèrgente in $\mathfrak{S}$.

La convergenza della successione $\{z_{n_{k'}}\}$ in $\mathfrak{S}$ implica anche ora la convergenza di $\{z_{n_{k'}}(x, T)\}$ in $\mathfrak{S}'$.

Concludendo: noi abbiamo estratto dalla successione $\{(u_n, \chi_n)\}$ di $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}'$ una successione parziale $\{(u_{n_{k'}}, \chi_{n_{k'}})\}$ che viene trasformata dalla (Q, R) in una successione convergente di $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}'$. La (Q, R) muta perciò ogni successione limitata in una successione compatta. Occorre far vedere che la (Q, R) è continua: ma questo è immediato. Dopo la proprietà di compattezza che abbiamo dimostrato, basta anche ora osservare che una successione convergente in $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}'$ viene mutata in una successione puntualmente convergente in senso ordinario.

A questo punto possiamo procedere in perfetta analogia con quanto fatto nel lavoro (P). Abbiamo trovato prima che, al variare di λ da 0 ad 1, le eventuali soluzioni devono soddisfare alle limitazioni

$$\underline{u}(x) \leqq u(x, t) \leqq \bar{u}(x) \quad , \quad |u_x(x, t)| < \mu .$$

Da queste si deduce che deve essere

$$\underline{u}(x) \leqq \chi(x) \leqq \bar{u}(x), \left\| \frac{d\chi}{dx} \right\| \leqq \mu, \| u_x \| \leqq \mu T^{1/2}, \| u \|_\gamma \leqq \tau$$

essendo τ una costante opportuna. Se indichiamo con ε una arbitraria costante positiva, abbiamo che, per $0 \leqq \lambda \leqq 1$, le eventuali soluzioni periodiche devono risultare *interne* al dominio $\mathfrak{D}'$ di $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}'$ così definito:

$$\mathfrak{D}' \equiv \begin{cases} \| u \| \leqq \nu + \varepsilon & \| \chi \| \leqq \nu + \varepsilon \\ \| u_x \| \leqq \mu T^{1/2} + \varepsilon & \left\| \frac{d\chi}{dx} \right\| \leqq \mu + \varepsilon . \\ \| u \|_\gamma \leqq \tau + \varepsilon & \end{cases}$$

dove è $\nu = \max(\| \bar{u} \|, \| \underline{u} \|)$.

Basterà ora far vedere che per $\lambda = 0$ il grado topologico della (26′) relativamente al dominio $\mathfrak{D}'$ e all'origine dello

spazio $\mathcal{S} \times \mathcal{S}'$ è ± 1. Questo noi l'otterremo trovando una funzione della sola x, $u(x)$, tale che la coppia $(u(x), u(x))$ soddisfi alle (26) per $\lambda = 0$; dimostreremo che questa è l'unica soluzione della (26) per $\lambda = 0$ e ad essa compete indice topologico ± 1 perchè essa è *interna* alla regione $\underline{u}(x) \leqq u \leqq \bar{u}(x)$ in cui il sistema (26) è lineare (sempre per $\lambda = 0$) e la relativa trasformazione lineare (26′) risulta completamente invertibile.

Infatti, per $\lambda = 0$ e per u soddisfacente alla limitazione $\underline{u}(x) \leqq u \leqq \bar{u}(x)$, l'equazione che traduce il nostro problema è

$$u_t = u_{xx} + F^*(x, u) = u_{xx} + \psi(x)u + \omega(x) \tag{27}$$

dove abbiamo posto

$$\psi(x) = \frac{F(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x)) - F(x, \underline{u}(x)\ \underline{u}'(x))}{\bar{u}(x) - \underline{u}(x)}$$

$$\omega(x) = \frac{\bar{u}(x)\underline{F}(x, \underline{u}(x), \underline{u}'(x)) - \underline{u}(x)\bar{F}(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x))}{\bar{u}(x) - \underline{u}(x)}$$

mentre le condizioni al contorno sono

$$\left\{ \begin{aligned} -u_x(0, t) &= \mu_1 u(0, t) + \beta_1 \\ u_x(l, t) &= \mu_2 u(l, t) + \beta_2 \end{aligned} \right. \tag{28}$$

avendo posto

$$\mu_1 = \frac{\bar{\varphi}_1(\bar{u}(0)) - \underline{\varphi}_1(\underline{u}(0))}{\bar{u}(0) - \underline{u}(0)}, \quad \beta_1 = \frac{\bar{u}(0)\underline{\varphi}_1(\underline{u}(0)) - \underline{u}(0)\bar{\varphi}_1(\bar{u}(0))}{\bar{u}(0) - \underline{u}(0)},$$

$$\mu_2 = \frac{\bar{\varphi}_2(\bar{u}(l)) - \underline{\varphi}_2(\underline{u}(l))}{\bar{u}(l) - \underline{u}(l)}, \quad \beta_2 = \frac{\bar{u}(l)\underline{\varphi}_2(\underline{u}(l)) - \underline{u}(l)\bar{\varphi}_2(\bar{u}(l))}{\bar{u}(l) - \underline{u}(l)}.$$

Le soluzioni indipendenti da t soddisferanno all'equazione ordinaria

$$u''(x) + \psi(x)u(x) + \omega(x) = 0 \tag{27′}$$

con le condizioni al contorno

$$\left\{ \begin{aligned} -u'(0) &= \mu_1 u(0) + \beta_1 \\ u'(l) &= \mu_2 u(l) + \beta_2 . \end{aligned} \right. \tag{28′}$$

Teniamo ora presente che tanto $\bar{u}(x)$ che $\underline{u}(x)$ soddisfano alla (27') e perciò la loro differenza

$$\bar{r}(x) = \bar{u}(x) - \underline{u}(x)$$

soddisferà all'equazione omogenea corrispondente. Per l'ipotesi J_4) si avrà, posto $\sigma_1 = -\bar{r}'(0) - \mu_1\bar{r}(0)$,

$$\sigma_1 = (-\bar{u}'(0) - \mu_1\bar{u}(0) - \beta_1) - (-\underline{u}'(0) - \mu_1\underline{u}(0) - \beta_1) =$$

$$= (-\bar{u}'(0) - \bar{\varphi}_1(\bar{u}(0))) - (-\underline{u}'(0) - \underline{\varphi}_1(\underline{u}(0))) < 0$$

Analogamente, posto $\sigma_2 = \bar{r}'(l) - \mu_2\bar{r}(l)$, σ_2 risulterà certamente positivo.

Ora, per trovare la soluzione del problema (27'), (28'), poniamo $r(x) = u(x) - \underline{u}(x)$. Le nuove condizioni ai limiti saranno:

$$-r'(0) - \mu_1 r(0) = \gamma_1 = [-u'(0) - \mu_1 u(0) - \beta_1] -$$

$$- [-\underline{u}'(0) - \mu_1\underline{u}(0) - \beta_1] = - [-\underline{u}'(0) - \varphi_1(\underline{u}(0))] < \sigma_1$$

inoltre sarà $\gamma_1 > 0$. Analogamente si avrà:

$$0 < r'(l) - \mu_2 r(l) = \gamma_2 < \sigma_2 .$$

Vogliamo dimostrare che si ha una ed una sola $r(x)$ soddisfacente a queste condizioni e che si ha, per $0 \leq x \leq l$, $0 < r(x) < \bar{r}(x)$.

Infatti l'integrale generale dell'equazione

$$r''(x) + \psi(x)r(x) = 0 .$$

si può scrivere

$$r(x) = c_1\bar{r}(x) + c_2\bar{r}(x)\int_0^x \frac{d\xi}{\bar{r}^2(\xi)} .$$

Imponendo le condizioni

$$-r'(0) - \mu_1 r(0) = \gamma_1$$

$$r'(l) - \mu_2 r(l) = \gamma_2$$

si ottiene il sistema lineare, per le costanti

$$\begin{cases} \sigma_1 c_1 - \dfrac{1}{\bar{r}(0)}\, c_2 = \gamma_1 \\ \sigma_2 c_1 + \left\{ \dfrac{1}{\bar{r}(l)} + \sigma_2 \displaystyle\int_0^l \dfrac{d\xi}{\bar{r}^2(\xi)} \right\} c_2 = \gamma_2 . \end{cases}$$

Il determinante ha l'espressione

$$\frac{\sigma_1}{\bar{r}(l)} + \frac{\sigma_2}{\bar{r}(0)} + \sigma_1\sigma_2 \int_0^l \frac{d\xi}{\bar{r}^2(\xi)}$$

ed è certamente positivo.

Riflettendo sul fatto che, ponendo $\gamma_1 = \sigma_1$, $\gamma_2 = 0$ e $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = \sigma_2$ si ottengono sempre soluzioni che sono positive in tutto l'intervallo chiuso $(0, l)$, si vede che, per ogni $0 < \gamma_1 < \sigma_1$, $0 < \gamma_2 < \sigma_2$ deve essere

$$0 < r(x) < \bar{r}(x) .$$

Abbiamo trovato così una soluzione indipendente da t e perciò periodica del problema (27), (28). Per dimostrare che essa è l'unica soluzione, passiamo al problema omogeneo associato al (27), (28) e dimostriamo che esso ammette solo la soluzione periodica identicamente nulla; per questo useremo un metodo molto vicino a quello seguito nel lavoro (P). Abbiamo visto che l'equazione

$$r''(x) + \psi(x) r(x) = 0$$

ammette la soluzione $\bar{r}(x) = \bar{u}(x) - \underline{u}(x)$ soddisfacente alle diseguaglianze

$$\bar{r}(x) > 0 \quad , \quad -\bar{r}'(0) > \mu_1 \bar{r}(0) \quad , \quad \bar{r}'(l) > \mu_2 \bar{r}(l) .$$

Si può allora trovare un numero positivo ε abbastanza piccolo perchè l'equazione

$$r''(x) + \{ \psi(x) + \varepsilon \}\, r(x) = 0$$

ammetta ancora una soluzione $r^*(x)$ positiva in tutto l'intervallo $0 \leq x \leq l$ e soddisfacente, negli estremi, alle diseguaglianze

$$-r^{*\prime}(0) > \mu_1 r^*(0) \quad , \quad r^{*\prime}(l) > \mu_2 r^*(l) .$$

Consideriamo allora la funzione

$$u^*(x, t) = r^*(x) \exp(-\varepsilon t/2) .$$

Si avrà

$$u_t^* = -\varepsilon u^*/2$$

e, inoltre,

$$u_{xx}^* + \psi(x) u^* = -\varepsilon u^* .$$

Perciò

$$u_t^* > u_{xx}^* + \psi(x) u^* .$$

e, agli estremi,

$$-u_x^*(0, t) > \mu_1 u^*(0, t) \quad , \quad u_x^*(l, t) > \mu_2 u^*(l, t) .$$

Poichè è $\lim_{t \to -\infty} u^*(x, t) = +\infty$ (uniformemente rispetto ad x), per ogni soluzione periodica $u(x, t)$ del problema omogeneo associato al problema (27), (28) sarà possibile trovare un valore $\bar{t}$ tale che, per $t < \bar{t}$, si abbia

$$u(x, t) < u^*(x, t) .$$

Ma, per il lemma 1, si avrà sempre $u(x, t) < u^*(x, t)$ e, poichè $u^*(x, t)$ è infinitesimo per $t \to +\infty$, si deduce che la funzione periodica $u(x, t)$ non può assumere valori positivi. Così pure si vede che non può assumere valori negativi: rimane solo possibile la soluzione periodica identicamente nulla. Per $\lambda = 0$, dunque, il sistema omogeneo associato al sistema (26) ammette solo la soluzione identicamente nulla. Questo significa, sempre per il teorema generale dell'alternativa [8]), che la trasformazione lineare che coincide con la (26′) (con $\lambda = 0$) per $\underline{u}(x) \leqq u(x) \leqq \bar{u}(x)$, risulta completamente invertibile. Poichè la soluzione periodica $u(x)$, che abbiamo sopra trovato, soddisfa alla limitazione

$$\underline{u}(x) < u(x) < \bar{u}(x)$$

possiamo affermare che la (26′), per $\lambda = 0$, subordina una corrispondenza biunivoca tra un intorno di $(u(x), u(x))$ ed un intorno dell'origine di $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}'$; cioè alla soluzione $(u(x), u(x))$ della (26), per $\lambda = 0$, si deve attribuire un indice topologico ± 1.

Essendovi dunque in $\mathfrak{D}'$, per $\lambda = 0$, una sola soluzione e questa con indice ± 1, si conclude che il grado topologico della (26') per $\lambda = 0$ è ± 1. Tale grado, per quanto abbiamo visto prima, si manterrà immutata nel passare da $\lambda = 0$ a $\lambda = 1$. Ne risulta l'esistenza di una soluzione, almeno, del sistema (26) per $\lambda = 1$, cioè di una soluzione periodica con periodo T del problema al contorno (21), (22).

Possiamo aggiungere ancora questa osservazione:

Nell'enunciato del teorema 3 l'ipotesi J_1) può essere sostituita da questa:

« J_1') *la funzione* $f(x, t, u, u_x)$ *sia continua per* $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$, $-\infty < u < +\infty$, $-\infty < u_x < +\infty$, *e, per* u *variabile in ogni intervallo finito, si abbia* $|f(x, t, u, u_x)| =$

$$|f(x, t, u, u_x)| = o(|u_x|^2) \qquad (|u_x| \to +\infty)$$

(*uniformemente rispetto ad* x, t, u) ».

Basta osservare che quest'ultima condizione è sufficiente ad assicurare la limitazione « a priori » per la derivata u_x. Ottenuta questa, si può modificare (una seconda volta) la definizione della $f(x, t, u, u_x)$ in modo che essa risulti limitata, comunque si prenda u_x, al variare di u in un intervallo limitato. Questo si può fare in modo che la definizione della f rimanga inalterata nella regione in cui possono cadere soluzioni periodiche.

Un riesame dei ragionamenti che hanno condotto alla dimostrazione del Teorema 3 rende evidente questa seconda osservazione:

« *Il risultato del teorema 3 sussiste ancora se la funzione* $\bar{f}(x, u, u_x)$, *nella ipotesi* J_4), *anzichè essere il massimo di* $f(x, t, u, u_x)$ *al variare di* t, *è una qualunque funzione continua soddisfacente alla condizione*

$$\bar{f}(x, u, u_x) \geq f(x, t, u, u_x)\,.$$

Analogamente, basterà che $\underline{f}(x, u, u_x)$ sia continua e tale che

$$\underline{f}(x, u, u_x) \leqq f(x, t, u, u_x) .$$

Così pure basterà che sia

$$\bar{\varphi}_1(u) \geqq \varphi_1(t, u) \qquad \bar{\varphi}_2(u) \geqq \varphi_2(t, u)$$

$$\underline{\varphi}_1(u) \leqq \varphi_1(t, u) \qquad \underline{\varphi}_2(u) \leqq \varphi_2(t, u)$$

purchè $\bar{\varphi}_1$, $\underline{\varphi}_1$, $\bar{\varphi}_2$, $\underline{\varphi}_2$ siano continue ».

Questa osservazione è molto utile al fine di stabilire alcuni corollari che rendano più spedita l'applicazione del teorema 3 ai vari casi.

Corollario 3. — « *Supponiamo soddisfatte le condizioni* $J_1)$, $J_2)$, $J_3)$; *inoltre esista un numero positivo M tale che, per $|u| = M$, sia*

$$u\, f(x, t, u, 0) \leqq 0 \quad , \quad u\, \varphi_1(t, u) < 0 \quad , \quad u\, \varphi_2(t, u) < 0$$

allora il problema (21), (22) *ammette almeno una soluzione periodica ».*

Infatti, in queste ipotesi, si può prendere come maggiorante la funzione (costante) $\bar{u}(x) = M$, soluzione dell'equazione ordinaria

$$\bar{u}''(x) = 0 \geqq f(x, t, M, 0)$$

e soddisfacente alle condizioni al contorno

$$-\bar{u}'(0) = 0 > \max_{0 \leqq t < T} \varphi_1(t, M), \quad \bar{u}'(l) = 0 > \max_{0 \leqq t < T} \varphi_2(t, u) .$$

Così si vede che $-M$ può essere presa come minorante.

Per applicare il teorema 3 al caso in cui la funzione f non dipenda dall'argomento u_x, può essere utile il seguente corollario.

Corollario 4. — « *L'equazione*

$$u_t = u_{xx} + f(x, t, u)$$

con le condizioni al contorno

$$u_x(0, t) = -\varphi_1(t, u(0, t))$$

$$u_x(l, t) = \quad \varphi_2(t, u(l, t))$$

dove le funzioni f, φ_1, φ_2 sono periodiche rispetto a t di periodo T, ammette certamente una soluzione periodica di periodo T se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

le funzioni f, φ_1, φ_2 siano continue per $0 \leqq x \leqq l$, $-\infty < t < +\infty$, $-\infty < u < +\infty$; la funzione f soddisfi ad una condizione di Hölder, puntualmente, all'interno del suo campo di definizione;

posto

$$\overline{\lim_{|u| \to \infty}} \max_{(x,t) \subset \bar{R}} \frac{f(x, t, u)}{u} = k$$

$$\overline{\lim_{|u| \to +\infty}} \max_{0 \leq t < T} \frac{\varphi_1(t, u)}{u} = \mu_1, \quad \overline{\lim_{|u| \to +\infty}} \max_{0 \leq t < T} \frac{\varphi_2(t, u)}{u} = \mu_2$$

sia μ_1, μ_2 $k < +\infty$; inoltre k sia inferiore al più piccolo autovalore del problema ai limiti

$$r''(x) + \lambda r(x) = 0$$
$$-r'(0) = \mu_1 r(0)$$
$$r'(l) = \mu_1 r(l) \text{ ».}$$

Infatti, preso un ε positivo sufficientemente piccolo, è possibile trovare un integrale dell'equazione

$$r''(x) + (\lambda_0 - \varepsilon) r(x) = 0 ,$$

(dove λ_0 è il più piccolo autovalore), che sia sempre positivo nell'intervallo $0 \leqq x \leqq l$ e che soddisfi alle condizioni ai limiti

$$-r'(0) > \mu_1 r(0) \quad , \quad r'(l) > \mu_1 r(l) .$$

Se ε è tale che sia $\lambda_0 - \varepsilon > k$, questo integrale, moltiplicato per una opportuna costante positiva, può essere preso come maggiorante. Cambiato di segno diventa una minorante.

APPENDICE

1) *Dimostrazione della formula* (10).

Per stabilire la limitazione (10) possiamo procedere in questo modo: consideriamo, per semplicità, l'integrale

$$w^*(x,\ t) = \int_0^t \Gamma(x,\ 0;\ t-\eta)\varphi_1(\eta)d\eta\,.$$

Avremo, se è $k \leqq t$,

$$w^*(x,\ t+k) - w^*(x,\ t) = \int_{t-k}^{t+k} \Gamma(x,\ 0;\ t+k-\eta)\varphi_1(\eta)d\eta\, -$$

$$-\int_{-k}^{t} \Gamma(x,\ 0;\ t-\eta)\varphi_1(\eta)d\eta + k\int_0^{t-k} \Gamma_t(x,\ 0;\ t+\theta k-\eta)\varphi_1(\eta)d\eta\,.$$

Maggioriamo i primi due termini. Si vede subito dalla (6) che si può scrivere

$$\Gamma(x,\ 0;\ t) = (\pi t)^{-1/2}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) + \Lambda(x,\ t) \tag{29}$$

dove la funzione Λ è continua in $\bar{\mathfrak{R}}$ con tutte le sue derivate. Si ha allora la limitazione

$$0 \leqq \Gamma(x,\ 0;\ t) \leqq Lt^{-1/2}\,.$$

Tenendo presente questa ed eseguendo la sostituzione $\chi = t\zeta$, si ottiene, ricordando la I_3'),

$$\int_{t-k} \Gamma(x,\ 0;\ t-\eta)\,|\,\varphi_1(\eta)\,|\,d\eta \leqq \|\,\varphi_1\,\|\,L\int_{t-k}^{t}(t-\eta)^{-1/2}\eta^{-\beta}d\eta =$$

$$= \|\varphi_1\|\,Lt^{1/2-\beta}\int_{1-\frac{k}{t}}^{1}(1-\zeta)^{-1/2}\zeta^{-\beta}d\zeta \leqq L\,\|\,\varphi_1\,\|\,t^{1/2-\beta}\left(\frac{k}{t}\right)^{1/2} \leqq L\|\varphi_1\|\,t^{-\beta}k^{1/2}$$

Analogamente si ha

$$\int_{-k}^{t+k} \Gamma(x,\ 0;\ t+k-\eta)\,|\,\varphi_1(\eta)\,|\,d\eta \leqq L\,\|\,\varphi_1\,\|\,t^{-\beta}k^{1/2}\,.$$

Per il terzo termine, teniamo sempre presente che si ha, dalla (29),

$$\Gamma_t(x,\ 0;\ t) = -2^{-1}\pi^{-1/2}t^{-3/2}\left\{1-\frac{x^2}{2t}\right\}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)+\Lambda_t(x,\ t)$$

dove $\Lambda_t(x,\ t)$ è continua in $\overline{\mathfrak{R}}$. Consideriamo allora l'integrale

$$2^{-1}\pi^{-1/2}\int_0^{t-k}(t-\eta)^{-3/2}\left|1-\frac{x^2}{2(t-\eta)}\right|\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\eta)}\right)\eta^{-\beta}d\eta$$

Poichè la funzione $\left|1-\frac{x^2}{2(t-\eta)}\right|\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\eta)}\right)$ si mantiene limitata, possiamo scrivere

$$2^{-1}\pi^{-1/2}\int_0^{t-k}(t-\eta)^{-3/2}\left|1-\frac{x^2}{2(t-\eta)}\right|\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\eta)}\right)\eta^{-\beta}d\eta \leqq$$

$$\leqq L\int_0^{t-k}(t-\eta)^{-3/2}\eta^{-\beta}d\eta = Lt^{-1/2-\beta}\int_0^{1-\frac{k}{t}}(1-\zeta)^{-3/2}\zeta^{-\beta}d\eta \leqq$$

$$\leqq Lt^{-1/2-\beta}\left(\frac{k}{t}\right)^{-1/2} = Lt^{-\beta}k^{-1/2}\,.$$

Possiamo dedurre che si ha, per $0<k\leqq t$,

$$|\,w^*(x,\ t+k)-w^*(x,\ t)\,|\leqq L\,||\varphi_1||\,t^{-\beta}k^{1/2}\leqq L\,||\,\varphi\,||\,k^{1/2-\beta}.$$

Per $k\geqq t$ si ha

$$|w^*(x,\ t+k)-w^*(x,\ t)|\leqq\int_0^{t+k}\Gamma(x,\ 0;\ t+k-\eta)\,|\,\varphi_1(\eta)\,|\,d\eta+$$

$$+\int_0^t\Gamma(x,\ 0;\ t-\eta)\,|\,\varphi_1(\eta)\,|\,d\eta\leqq L\,||\,\varphi_1\,||\,(t^{1/2-\beta}+[t+k]^{1/2-\beta})\leqq$$

$$\leqq L\,||\,\varphi_1\,||\,k^{1/2-\beta}$$

Questa limitazione rientra in quella già ottenuta, con una opportuna scelta della costante L. Operando in modo analogo sul secondo integrale della (9) si ottiene la (10).

Dimostrazione della limitazione (11).

Cerchiamo di limitare la derivata rispetto ad x del primo termine della espressione di $w(x,\ t)$ data dalla (9), cioè di quella funzione che abbiamo indicato con $w^*(x, t)$. Anche in questo caso potremo limitarci allo studio del solo termine relativo alla parte singolare di $\Gamma_x(x, 0, t)$, secondo la rappresentazione (29).

Premettiamo questa limitazione che ci sarà utile anche nella parte **3)**:

$$\int_0^\delta x(t-\eta)^{-3/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\eta)}\right)\eta^{-\beta}d\eta \leqq Lt^{-\beta}\left(\frac{\delta}{t}\right)^{1-\beta} \qquad (0 \leqq \delta \leqq t) \tag{30}$$

Per dimostrarla, cominciamo col far vedere che, per $0 \leqq \delta \leqq t$, si ha:

$$\int_0^\delta x(t-\eta)^{-3/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\eta)}\right)\eta^{-\beta}d\eta \leqq Lt^{-\beta}.$$

Infatti maggioriamo col porre $\delta = t$; quindi eseguiamo la sostituzione $t - \eta = \frac{t}{\tau^2}$ e poniamo $\frac{xt^{-1/2}}{2} = \lambda$. Avremo

$$\int_0^\delta x(t-\eta)^{-3/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\eta)}\right)\eta^{-\beta}d\eta \leqq$$

$$\leqq \int_0^t x(t-\eta)^{-3/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\eta)}\right)\eta^{-\beta}d\eta =$$

$$= 4t^{-\beta}\int_1^\infty \lambda \exp(-\lambda^2\tau^2)\left(1-\frac{1}{\tau^2}\right)^{-\beta}d\tau <$$

$$< 4t^{-\beta}\lambda \exp(-\lambda^2)\int_1^2\left(1-\frac{1}{\tau^2}\right)^{-\beta}d\tau +$$

$$+ 4t^{-\beta}\left(\frac{3}{4}\right)^{-\beta}\int_2^\infty \lambda \exp(-\lambda^2\tau^2)d\tau \leqq Lt^{-\beta}$$

essendo L una costante indipendente da λ. D'altra parte si può scrivere

$$\int_0^\delta x(t-\eta)^{-2/3}\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\eta)}\right)\eta^{-\beta}d\eta =$$

$$= 2\int_0^\delta (t-\eta)^{-1}\mu\exp(-\mu^2)\eta^{-\beta}d\eta$$

avendo posto $\mu = \dfrac{x(t-\eta)^{-1/2}}{2}$ e, poichè $\mu\exp(-\mu^2)$ si mantiene limitata al variare di μ, si ha

$$\int_0^\delta x(t-\eta)^{-3/2}\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\eta)}\right)\eta^{-\beta}d\eta \leqq L\int_0^\delta (t-\eta)^{-1}\eta^{-\beta}d\eta\,.$$

Supponiamo ora che $\dfrac{\delta}{t}$ vari in un intorno fisso dello zero: prendiamo, ad esempio $\dfrac{\delta}{t} \leqq 1/2$. Eseguendo la sostituzione $\eta = t\zeta$, abbiamo

$$\int_0^\delta (t-\eta)^{-1}\eta^{-\beta}d\eta = t^{-\beta}\int_0^{\delta/t}(1-\zeta)^{-1}\zeta^{-\beta}d\zeta \leqq L\,t^{-\beta}\left(\frac{\delta}{t}\right)^{1-\beta}.$$

Riunendo questa limitazione con quella trovata sopra per δ qualsiasi (sempre nell'intervallo $0 \leqq \delta \leqq t$) si ottiene la (30).

Tenendo conto della (30) (applicata per $\delta = t$), si ottiene subito la limitazione

$$|\,w_x^*(x,\,t)\,| \leqq L\,||\,\varphi_1\,||\,t^{-\beta}$$

relativa al primo degli integrali della (9). Procedendo in modo analogo per il secondo, si ottiene la (11).

2) *Dimostrazione delle formule* (13) *e* (14).

Possiamo procedere passo per passo con il metodo che abbiamo seguito nel lavoro (D) per giungere alla maggiorazione degli incrementi della funzione che là era indicata col simbolo $v(x,\,t)$. La diversità è costituita dal fatto che la funzione

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{l-x}+\dfrac{1}{t^{1/2}}$, che là era indicata col simbolo $\psi(x, t)$, si riduce ora al solo termine $\dfrac{1}{t^{1/2}}$.

a) In primo luogo osserviamo che, essendo $\int\limits_0^l \Gamma(x, \xi; t)d\xi$ limitato per (x, t) variabile in $\overline{\mathfrak{R}}$, si ha

$$\int\limits_{t-k}^{t} d\eta \int\limits_0^l \Gamma(x, \xi; t-\eta)\,|\,f(\xi, \eta)\,|\,d\xi \leqq \tag{31}$$

$$\leqq \|f\| \int\limits_{t-k}^{t} \eta^{-\alpha} \int\limits_0^l \Gamma(x, \xi; t-\eta)d\xi \leqq L\,\|f\| \int\limits_{t-k}^{t} \eta^{-\alpha} d\eta =$$

$$= L\,\|f\|\,(t^{1-\alpha}-(t-k)^{1-\alpha}) \leqq L\,\|f\|\,k^{1-\alpha}$$

b) Dimostriamo ora che la funzione $z(x, t)$ è derivabile rispetto ad x e la sua derivata è rappresentata dall'espressione

$$\int\limits_0^t d\eta \int\limits_0^l \Gamma_x(x, \xi; t-\eta) f(\xi, \eta) d\xi$$

dove l'integrale risulta assolutamente convergente. Infatti si ha, dalla (6) con calcoli semplicissimi;

$$\int\limits_0^l |\,\Gamma_x(x, \xi; t-\eta)\,|\,d\xi \leqq L(t-\eta)^{-1/2}.$$

Tenendo presente questa limitazione, si ha per $0 \leqq t' \leqq t$:

$$\int\limits_{t'}^{t} d\eta \int\limits_0^l |\,\Gamma_x(x, \xi; t-\eta)\,|\,|\,f(\xi, \eta)\,|\,d\xi \leqq$$

$$\leqq \|f\| \int\limits_{t'}^{t} \eta^{-\alpha} d\eta \int\limits_0^l |\,\Gamma_x(x, \xi; t-\eta)\,|\,d\eta \leqq L\,\|f\| \int\limits_{t'}^{t} \eta^{-\alpha}(t-\eta)^{-1/2} d\eta \leqq$$

$$\leqq L\,\|f\|\,t^{1/2-\alpha} \int\limits_{t'/t}^{1} \zeta^{-\alpha}(1-\zeta)^{-1/2} d\zeta .$$

Ponendo $t' = t - k$, si ha (tenendo presente che è $\alpha > 1/2$)

$$(32) \quad \int_{t-k}^{t} d\eta \int_{0}^{l} |\Gamma_x(x, \xi;\, t-\eta)|\, |f(\xi, \eta)|\, d\xi \leqq L\, \|f\|\, t^{1/2-\alpha} \left(\frac{k}{t}\right)^{1/2} =$$

$$= L\, \|f\|\, t^{-\alpha} k^{1/2} = L\, \|f\|\, t^{-1/2} k^{1-\alpha} \left(\frac{k}{t}\right)^{\alpha - \frac{1}{2}} \leqq L\, \|f\|\, t^{-1/2} k^{1-\alpha}.$$

Essendo dunque l'integrale $\int_0^\delta d\eta \int_0^l \Gamma_x(x, \xi; t-\eta)\, |f(\xi, \eta)|\, d\xi$ uniformemente convergente, quando δ tende a t, per $0 \leqq x \leqq l$, si deduce che la funzione z ha derivata rispetto ad x, che si può ottenere dall'espressione (12) derivando sotto il segno di integrale. Dalla (32), facendo $k = t$, si ottiene subito la limitazione (13). A fortiori si ha, per $\delta \leqq t$,

$$(33) \quad \int_0^\delta d\eta \int_0^l |\Gamma_x(x, \xi;\, t-\eta)|\, |f(\xi, \eta)|\, d\xi \leqq L\, \|f\|\, t^{1/2-\alpha}$$

c) Dalla (6) si ottiene; con semplici calcoli,

$$(34) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^l |\Gamma_{xx}(x, \xi;\, t)|\, d\xi = \int_0^l |\Gamma_t(x, \xi;\, t)|\, d\xi \leqq L t^{-1} \\ \displaystyle\int_0^l |\Gamma_{xt}(x, \xi;\, t)|\, d\xi = L t^{-3/2}. \end{cases}$$

Applicando la prima di queste formule, si ha (per $0 < k \leqq t$)

$$\int_0^{t-k} d\eta \int_0^l |\Gamma_{xx}(x, \xi;\, t-\eta)|\, |f(\xi, \eta)|\, d\xi \leqq L\, \|f\| \int_0^{t-k} \eta^{-\alpha}(t-\eta)^{-1} d\eta =$$

$$= L\, \|f\|\, t^{-\alpha} \int_0^{1-\frac{k}{t}} \zeta^{-\alpha}(1-\zeta)^{-1}\, d\zeta \leqq L\, \|f\|\, t^{-\alpha}\left(\left|\log\frac{k}{t}\right| + 1\right) =$$

$$= L\, \|f\|\, k^{-\alpha}\left[\left(\frac{k}{t}\right)^{\alpha}\left(\left|\log\frac{k}{t}\right| + 1\right)\right] \leqq L\, \|f\|\, k^{-\alpha}.$$

Possiamo anche scrivere, tenendo presente che è $\alpha > 1/2$ ed è $k \leqq t$,

$$t^{-\alpha}\left(\left|\log\frac{k}{t}\right| + 1\right) = t^{-\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{2}-\alpha}\left[\left(\frac{k}{t}\right)^{\alpha - \frac{1}{2}}\left(\left|\log\frac{k}{t}\right| + 1\right)\right] \leqq L t^{-\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{2}-\alpha}.$$

Concludendo abbiamo

$$\int_0^{t-k} d\eta \int_0^l |\Gamma_{xx}(x, \xi;\ t-\eta)||f(\xi, \eta)|\,d\xi = \tag{35}$$

$$= \int_0^{t-k} d\eta \int_0^l |\Gamma_t(x, \xi;\ t-\eta)||f(\xi, \eta)|\,d\xi \begin{cases} \leqq L\,||f||\,k^{-\alpha} \\ \leqq L\,||f||\,t^{-1/2}k^{1/2-\alpha} \end{cases}$$

Applichiamo ora la seconda delle (34) al seguente integrale

$$\int_0^{t-k} d\eta \int_0^l |\Gamma_{xt}(x, \xi;\ t-\eta)||f(\xi, \eta)|\,d\xi \leqq L\,||f|| \int_0^{t-k} \eta^{-\alpha}(t-\eta)^{-3/2} d\eta \leqq$$

$$\leqq L\,||f||\,t^{-\alpha-1/2} \int_0^{1-\frac{k}{t}} \zeta^{-\alpha}(1-\zeta)^{-3/2} d\zeta \leqq L\,||f||\,t^{-\alpha-1/2}\left(\frac{k}{t}\right)^{-1/2} =$$

$$= L\,||f||\,t^{-\alpha}k^{-1/2} \leqq L\,||f||\,k^{-\alpha}t^{-1/2}\left(\frac{k}{t}\right)^{\alpha-1/2} \leqq L\,||f||\,k^{-\alpha}t^{-1/2}.$$

Dunque si ha

$$\int_0^{t-k} d\eta \int_0^l |\Gamma_{xt}(x, t;\ t-\eta)||f(\xi, \eta)|\,d\xi \leqq L\,||f||\,t^{-1/2}k^{-\alpha}. \tag{36}$$

Siamo ora in grado di dimostrare le (14).

Incremento di $z(x, t)$ rispetto ad x.

Si ha, se k è un numero tale che $0 \leqq k \leqq t$

$$|z(x+h, t) - z(x, t)| \leqq \left|\int_{t-k}^{t} d\eta \int_0^l \Gamma(x+h, \xi;\ t-\eta) f(\xi, \eta)\,d\xi\right| +$$

$$+ \left|\int_{t-k}^{t} d\eta \int_0^l \Gamma(x, \xi;\ t-\eta)\, f(\xi, \eta)\,d\xi\right| +$$

$$+ |h| \left|\int_0^{t-k} d\eta \int_0^l \Gamma_x(x+\theta h, \xi;\ t-\eta) f(\xi, \eta)\,d\xi\right| \leqq$$

$$\leqq L\,||f||\,k^{1-\alpha} + |h|\,L\,||f||\,k^{1/2-\alpha} \leqq L\,||f||\,\{k^{1-\alpha} + |h|\,k^{1/2-\alpha}\}.$$

Di qui, ponendo $k = h^2$ (oppure $k = t$ se è $h^2 > t$)

$$|z(x+h,\ t) - z(x,\ t)| \leqq L\,\|f\|\,h^{2-2\alpha}\,.$$

Incremento di $z(x, t)$ rispetto a t.

$$|z(x,\ t+k) - z(x,\ t)| \leqq \left|\int_{t-k'}^{t+k} d\eta \int_0^l \Gamma(x,\ \xi;\ t+k-\eta) f(\xi,\ \eta) d\xi\right| +$$

$$+ \left|\int_{t-k'}^{t} d\eta \int_0^l \Gamma(x,\ \xi;\ t-\eta) f(\xi,\ \eta) d\xi\right| +$$

$$+ k \left|\int_0^{t-k'} d\eta \int_0^l \Gamma_t(x,\ \xi;\ t+\theta k-\eta) f(\xi,\ \eta) d\xi\right|,\ (k > 0)\ (t > k' > 0)$$

applicando la (31) e la prima delle (35), si ha

$$|z(x,\ t+k) - z(x,\ t)| \leqq L\,\|f\|\,(k+k')^{1-\alpha} + L\,\|f\|\,k'^{1-\alpha} +$$
$$+ L\,\|f\|\,kk'^{-\alpha}.$$

Ponendo ora $k' = k$, se è $k < t$ (altrimenti si porrà $k' = t$ e l'ultimo termine non comparirà più), si avrà

$$|z(x,\ t+k) - z(x,\ t) \leqq L\,\|f\|\,k^{1-\alpha}.$$

Incremento di $z_x(x, t)$ rispetto ad x.

$$|z(x+h,\ t) - z_x(x,\ t)| \leqq \left|\int_{t-k}^{t} d\eta \int_0^l \Gamma_x(x+h, \xi;\ t-\eta) f(\xi,\ \eta) d\xi\right| +$$

$$+ \left|\int_{t-k}^{t} d\eta \int_0^l \Gamma_x(x,\ \xi;\ t-\eta) f(\xi,\ \eta) d\xi\right| +$$

$$+ |h| \left|\int_0^{t-k} d\eta \int_0^l \Gamma_{xx}(x+\theta h,\ \xi;\ t-\eta) f(\xi,\ \eta) d\xi\right|.$$

Applicando la (32) e la seconda delle (35)

$$|z_x(x+h,\ t) - z_x(z,\ t)| \leqq L\,\|f\|\,t^{-1/2} k^{1-\alpha} +$$
$$+ L\,\|f\|\,|h|\,t^{-1/2} k^{1/2-\alpha}$$

da cui, facendo $k = h^2$ (se è $h^2 < t$, altrimenti porremo $k = t$)

$$| z_x(x+h,\ t) - z_x(z,\ t) | \leq L \,||\, f \,||\, t^{-1/2} \,|\, h \,|^{2-2\alpha}.$$

Da questa, infine, si ha

$$| t^{1/2} z_x(x+h,\ t) - t^{1/2} z_x(x,\ t) | \leq L \,||\, f \,||\, |\, h \,|^{2-2\alpha}.$$

Incremento di $t^{1/2} z_x(x, t)$ rispetto a t.

$$| (t+k)^{1/2} z_x(x,\ t+k) - t^{1/2} z_x(x,\ t) | \leq$$

$$\leq \left| (t+k)^{1/2} \int_{t-k'}^{t+k} d\eta \int_0^l \Gamma_x(x,\ \xi;\ t+k-\eta) f(\xi,\ \eta) d\xi \right| +$$

$$+ \left| t^{1/2} \int_{t-k'}^{t} d\eta \int_0^l \Gamma_x(x,\ \xi;\ t-\eta) f(\xi,\ \eta) d\xi \right| +$$

$$+ k \left| \frac{1}{2} (t+\theta k)^{-1/2} \int_0^{t-k'} d\eta \int_0^l \Gamma_x(x,\ \xi;\ t+\theta k-\eta) f(\xi,\ \eta) d\xi \right| +$$

$$+ k \left| (t+\theta k)^{1/2} \int_0^{t-k'} d\eta \int_0^l \Gamma_{xt}(x,\ \xi;\ t+\theta k-\eta) f(\xi,\ \eta) d\xi \right| .$$

$$(0 < \theta < 1,\ k > 0,\ 0 < k' < t)$$

Applicando ai primi due termini la (32), al terzo la (33) e al quarto la (36), si ha

$$| (t+k)^{1/2} z_x(x,\ t+k) - t^{1/2} z_x(x,\ t) | \leq L \,||\, f \,||\, (k+k')^{1-\alpha}$$
$$+ L \,||\, f \,||\, k'^{1-\alpha} + k(L \,||\, f \,||\, (t+\theta k)^{-\alpha} + L \,||\, f \,||\, (k'+\theta k)^{-\alpha}) .$$

Ponendo ora $k' = k$ (se è $k < t$, altrimenti si può porre $k' = t$, eliminando così il terzo e il quarto termine) si ha

$$| (t+k)^{1/2} z_x(x,\ t+k) - t^{1/2} z_x(x,\ t) | \leq L \,||\, f \,||\, k^{1-\alpha} +$$
$$+ L \,||\, f \,||\, k t^{-\alpha} + L \,||\, f \,||\, k^{1-\alpha} \leq L \,||\, f \,||\, k^{1-\alpha} .$$

Così tutte le (14) risultano dimostrate.

3) *Dimostrazione delle formule* $||\, w - w_{n_k} \,|| \to 0$ *e* $||\, (w - w_{n_k})_x \,|| \to 0$ (§ 4).

Consideriamo, per semplicità, il solo integrale

$$w^*(x, t) = \int_0^t \Gamma(x, 0; t - \eta)\varphi_1(\eta, g_1(\eta))d\eta$$

e dimostriamo che la successione

$$w^*_{n_k}(x, t) = \int^t \Gamma(x, 0; t - \eta)\varphi_1(\eta, u_{n_k}(0, \eta))d\eta$$

tende uniformemente verso w^* in $\overline{\mathfrak{R}}$.
Teniamo presente che è, per l'ipotesi I_3),

$$|\varphi_1(t, g_1(t))| \leqq H(\nu)t^{-\beta}, \quad |\varphi_1(t, u_{n_k}(0, t))| \leqq H(\nu)t^{-\beta}$$

essendo $||u|| \leqq \nu$.

Sia ora δ un numero qualsiasi dell'intervallo $0 \leqq \delta \leqq t$. Avremo

$$|w^*(x, t) - w^*_{n_k}(x, t)| \leqq \int_0^\delta \Gamma(x, 0; t - \eta)\,|\varphi_1(\eta, g_1(\eta))|\,d\eta +$$

$$+ \int_0^\delta \Gamma(x, 0; t - \eta)\,|\varphi_1(\eta, u_{n_k}(0, \eta))|\,d\eta +$$

$$+ \max_{\delta \leqq \eta \leqq t} |\varphi_1(\eta, g_1(\eta)) - \varphi_1(\eta, u_{n_k}(0, \eta))| \int_\delta^t \Gamma(x, 0; t - \eta)d\eta \leqq$$

$$\leqq 2H(\nu)\int_0^\delta \Gamma(x, 0; t - \eta)\eta^{-\beta}d\eta +$$

$$+ \max_{\delta \leqq \eta \leqq T} |\varphi_1(\eta, g_1(\eta)) - \varphi_1(\eta, u_{n_k}(0, \eta))| \cdot \int_0^T \Gamma(x, 0; t - \eta)d\eta .$$

L'integrale che compare nel penultimo termine si può così limitare, procedendo come nella parte **1**):

$$\int_0^\delta \Gamma(x, 0; t - \eta)\eta^{-\beta} \leqq Lt^{-1/2}\delta^{1-\beta} .$$

Nel caso in cui sia $\delta = t$, avremo, più semplicemente,

$$| w^*(x, t) - w^*_{n_k}(x, t) | \leqq 2H(\nu) \int_0^t \Gamma(x, 0; t - \eta) d\eta \leqq LH(\nu) t^{1/2-\beta}.$$

Si ha perciò

$$| w^*(x, t) - w^*_{n_k}(x, t) | \leqq$$

$$\leqq \begin{cases} LH(\nu) t^{1/2-\beta} \\ L\{ H(\nu) t^{-1/2} \delta^{1-\beta} + \max\limits_{\delta \leqq \eta \leqq T} | \varphi_1(\eta, g_1(\eta)) - \varphi_1(\eta, u_{n_k}(0, \eta)) | \}. \end{cases}$$

Scelto ora ε arbitrariamente piccolo, consideriamo l'intervallo $0 \leqq t \leqq \delta$, dove $\delta > 0$ è tale che sia $\delta \leqq T$, $\delta^{1/2-\beta} \leqq \varepsilon$. Quando t varia in questo intervallo, dalla prima diseguaglianza risulta

$$| w^*(x, t) - w^*_{n_k}(x, t) | \leqq LH(\nu)\varepsilon .$$

Per $t > \delta$, prendiamo un indice k tanto grande che sia

$$\max_{\delta \leqq \eta \leqq T} | \varphi_1(\eta, g_1(\eta)) - \varphi_1(\eta, u_{n_k}(0, \eta)) | \leqq \varepsilon .$$

Applicando la seconda diseguaglianza, avremo

$$| w^*(x, t) - w^*_{n_k}(x, t) | \leqq L \{ H(\nu) + 1 \} \varepsilon .$$

Risulta così dimostrata la convergenza uniforme. In modo del tutto analogo, applicando la (30), si dimostra che è

$$t^{1/2} | w_x^*(x, t) - w^*_{n_k x}(x, t) | \leqq$$

$$\leqq \begin{cases} LH(\nu) t^{1/2-} \\ L\{ H(\nu) t^{-1/2} \delta^{1-\beta} + \max\limits_{\delta \leqq \eta \leqq T} | \varphi_1(\eta, g_1(\eta)) - \varphi_1(\eta, u_{n_k}(0, \eta)) | \} . \end{cases}$$

Da questa segue immediatamente che la successione $t^{1/2} w^*_{n_k x}(x, t)$ converge verso $t^{1/2} w_x^*$ uniformemente in $\overline{\mathfrak{R}}$.